

# Teorie relativity a GPS

Aleš Trojáněk

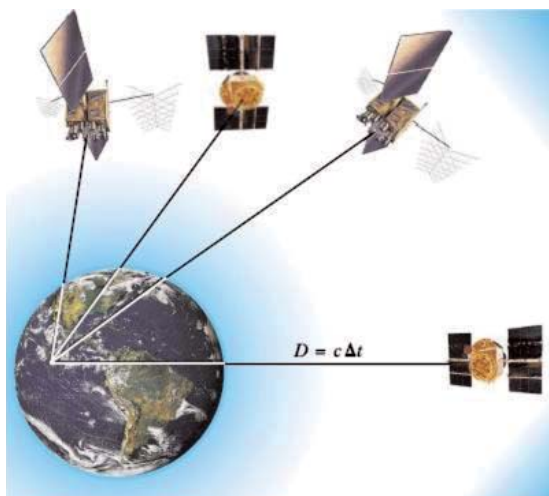
Gymnázium Velké Meziříčí, Sokolovská 235/27, 594 01 Velké Meziříčí

V poslední době se stále rozšiřuje okruh osob, které užívají nebo brzy budou užívat GPS (Global Positioning System). Na tomto novém a atraktivním zařízení se uplatňuje mnoho fyzikálních poznatků či samotných základních principů fyziky. Je proto vhodné využít příležitosti a například žákům gymnázia ukázat, že „fyzika je na každém kroku“. V tomto příspěvku si všimneme pro mnohé překvapující souvislosti GPS a speciální i obecné teorie relativity. Níže uvedený text, který byl inspirován článkem [1], je určen spíše učitelům fyziky, kteří si ho pro svůj případný výklad upraví zejména s ohledem na fyzikální průpravu žáků.

Navігаční systém GPS sestává z 24 družic, z nichž každá nese přesné atomové hodiny. Základní princip činnosti je následující (viz obr. 1): Předpokládáme, že přijímač na povrchu Země přijímá současně elektromagnetické signály ze 4 družic. Pro jednu družici a pro přijímač platí podle obrázku 1:

$$D = c\Delta t, \tag{1}$$

kde vzdálenost  $D$  je dána součinem rychlosti světla (konstantní ve všech inerciálních soustavách) a časovým intervalem  $\Delta t$  mezi vysláním signálu z družice a jeho registrací pozemní stanicí. Protože se družice vzhledem k Zemi pohybuje velkou rychlostí a protože je ve velké výšce (kde je jiný gravitační potenciál), hodiny na družici (atomové) a na Zemi nemohou být synchronizovány, aniž by se neuvažovaly relativistické efekty. Porovnání údajů ze 4 družic podle rovnice (1) je základem pro určení polohy.



Obr. 1 Převzat z N. Ashby: *Relativity and the Global Positioning System* [2].

Podívejme se nyní stručně a zjednodušeně, jak se uplatňuje TR při synchronizaci hodin.



Navigace pomocí GPS.

1. Družice se pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí o velikosti např. 4 km/s. Podle vztahu z STR pro dilataci času

$$t_R = \frac{t_h}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx t_h \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

ubíhá čas  $t_h$  na pohybující se družici pomaleji než na hodinách na povrchu Země  $t_R$ . Pro  $v = 4$  km/s a pro  $t_h = 1$  den dostaneme

$$t_h - t_R \sim -8 \mu\text{s}. \tag{2}$$

2. Družice je ve výšce  $h = 20\,000$  km nad Zemí. Předpokládejme pro jednoduchost, že hodiny na družici se vzhledem k Zemi nepohybují, zanedbejme rotaci Země a uvažujme, že gravitační potenciál se mění podle Newtonova zákona. Pak se hodiny ve výšce  $h$



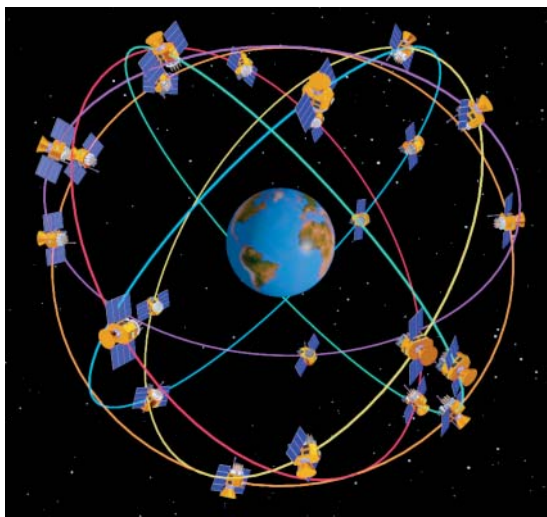
Global Positioning System (GPS), blok IIR, spravovaný Druhou vesmírnou řídicí skupinou leteckých sil Spojených států.

předbíhají před hodinami u povrchu Země podle vztahu<sup>1</sup>

$$\tau_R = \tau_h \left( 1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2} \right),$$

kde  $\Delta\varphi = \varphi_h - \varphi_R$ ,  $\varphi \approx -\frac{GM}{r}$ ,  $r = R + h$ .

<sup>1</sup> Za podnětné diskuse a za odvození výše uvedeného jednoduchého vztahu ze vzorce pro vliv gravitačních potenciálů a potenciálů setrvačných sil na plynutí času podle OTR děkuji prof. Janu Novotnému z Přírodovědecké fakulty MU. Pěkná odvození závislosti chodu hodin na výšce nad Zemí s užitím elementární matematiky a základních principů či zákonů fyziky jsou pro malé rozdíly výšek (gravitační potenciál se mění lineárně s výškou) ve Feynmanových přednáškách z fyziky [4].



Global Positioning System (GPS).

Pro  $\tau_h = 1$  den na družici dostaneme

$$\tau_h - \tau_R \sim 45 \mu\text{s}. \quad (3)$$

Porovnáním relací (2) a (3) zjistíme, že efekt OTR převyšší (pro danou výšku  $h$ ) efekt STR, takže čas na družici běží rychleji. Kdyby se neprováděla relativistická korekce času (frekvence), byla by denní chyba v určeni vzdálenosti řádově:

$$\Delta D \sim 3,7 \times 10^{-5} \text{ s} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 11 \text{ km}.$$

## DALŠÍ TÉMATA NA DISKUSE SE ŽÁKY:

- Jak spolu souvisejí tyto hodnoty: velikost rychlosti družice a její výška nad Zemí?
- Co jsou to atomové hodiny? Na jakém principu pracují? S jakou přesností měří?
- Družice používají jako zdroj solární články. Na jakém principu pracují a kde se používají?
- Co víte o systému GPS a o evropském systému GALILEO? (Viz např. [3].)
- Jaké je využití navigačních systémů? (Uvažujte oblasti: doprava silniční, letecká, námořní, telekomunikace, civilní bezpečnost a záchranné a humanitární systémy, ochrana životního prostředí, ...)
- Je vhodné budovat mikrovlnný systém na výběr mýtného pomocí mýtných bran na dálnicích, když se má v Evropě v budoucnu užívat satelitní systém GALILEO?

## LITERATURA

- [1] P. Yam: „Na každém kroku Einstein“. Sci. Am. (české vydání) 6, 64 (2005).
- [2] N. Ashby: „Relativity and the Global Positioning System“. Physics Today 5, 41 (2002).
- [3] [http://cs.wikipedia.org/wiki/Global\\_Positioning\\_System](http://cs.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System)
- [4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmanove přednášky z fyziky 4*. Alfa, Bratislava 1988, s. 420.



Galileo – evropský globální navigační satelitní systém.