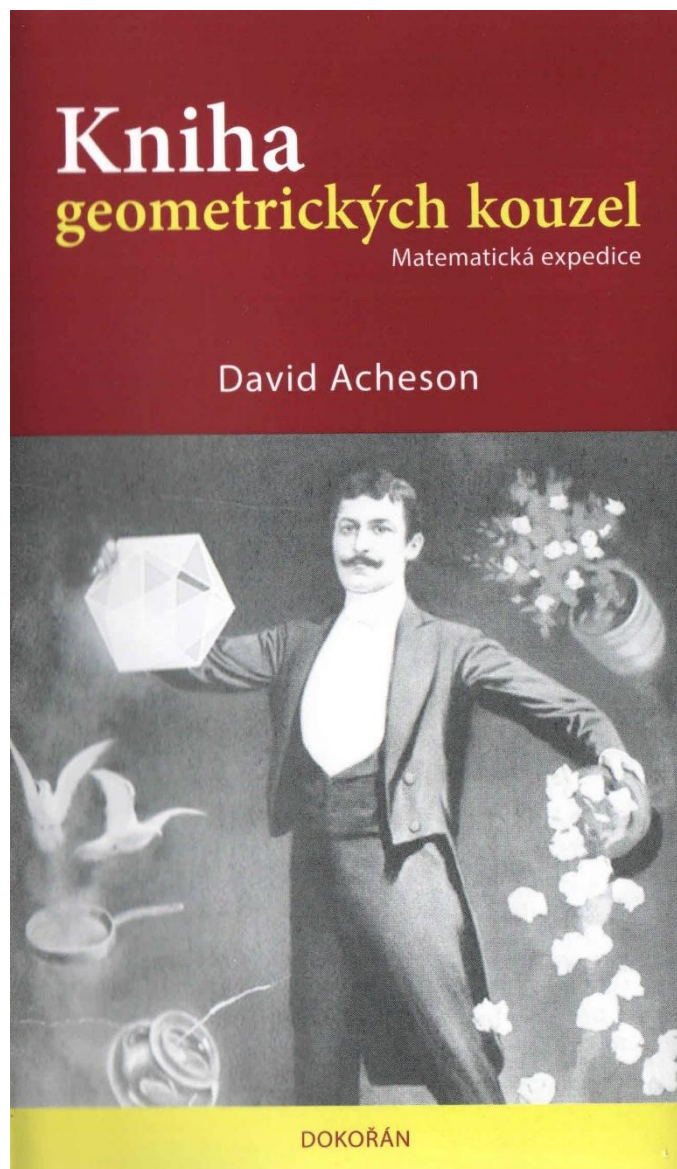


Trocha geometrie nikoho nezabije

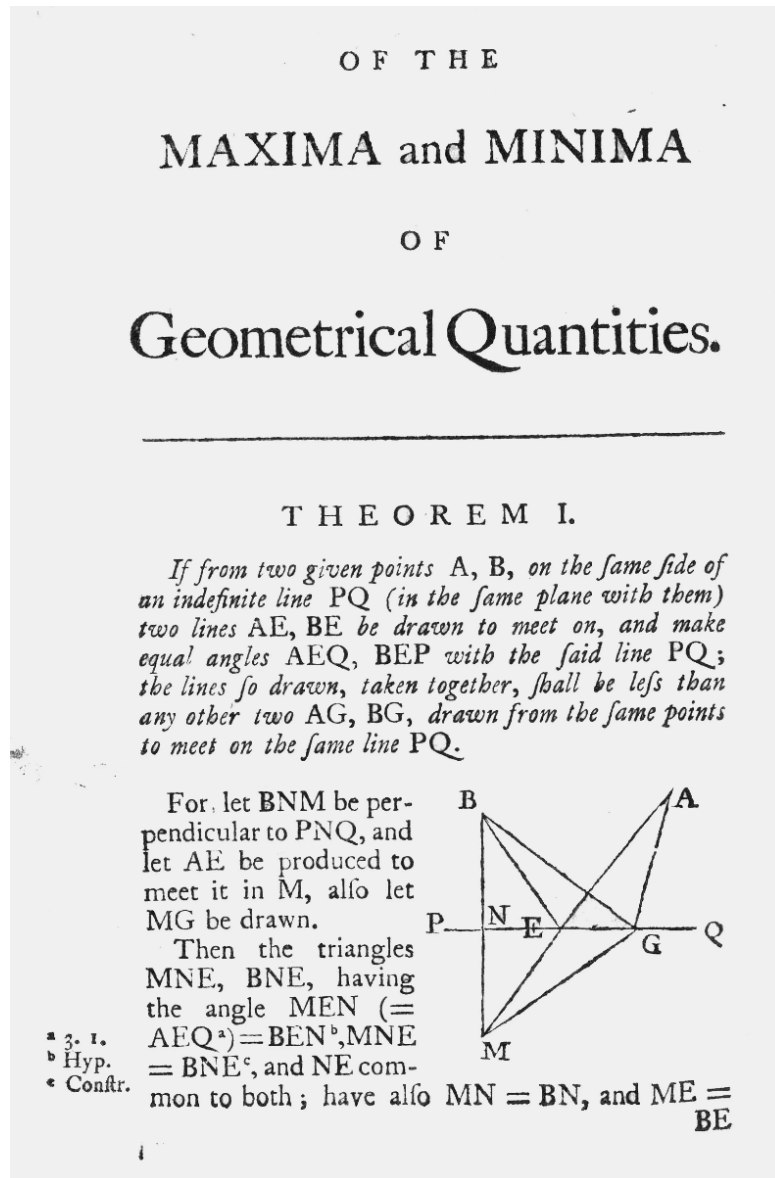
Jiří Rákosník

IV. seminář Matematika a fyzika ve škole, Jevíčko 20.—22. srpna 2025

David Acheson: Kniha geometrických kouzel, Dokořán 2020

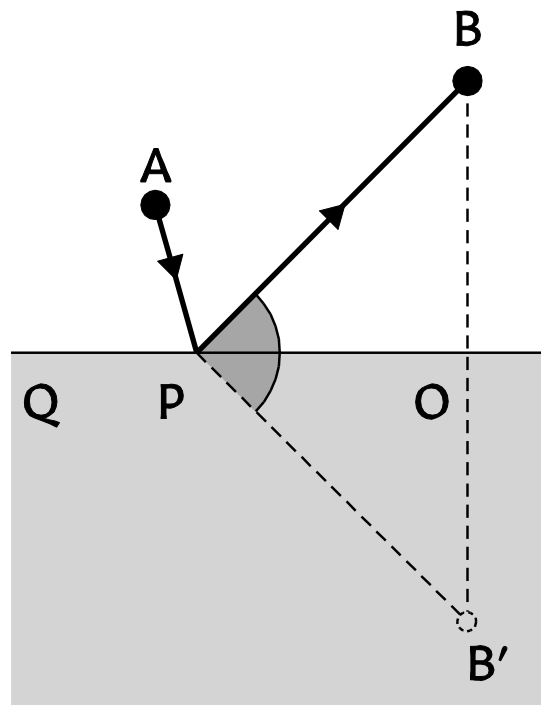


Thomas Simpson: Základy rovinné geometrie, 1760

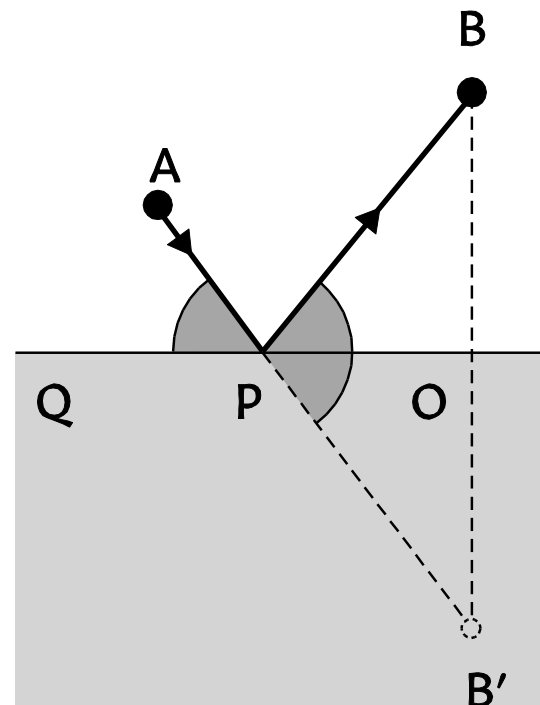


Thomas Simpson (1710–1761)

Thomas Simpson: Základy rovinné geometrie, 1760



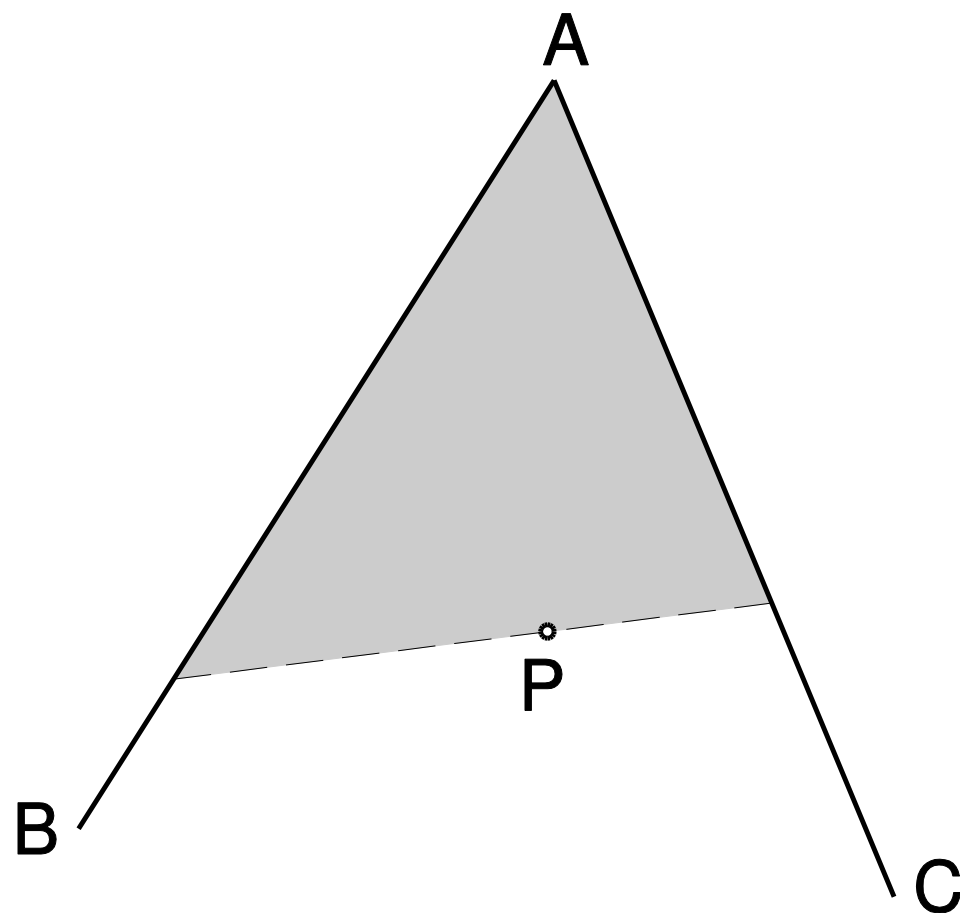
(a)



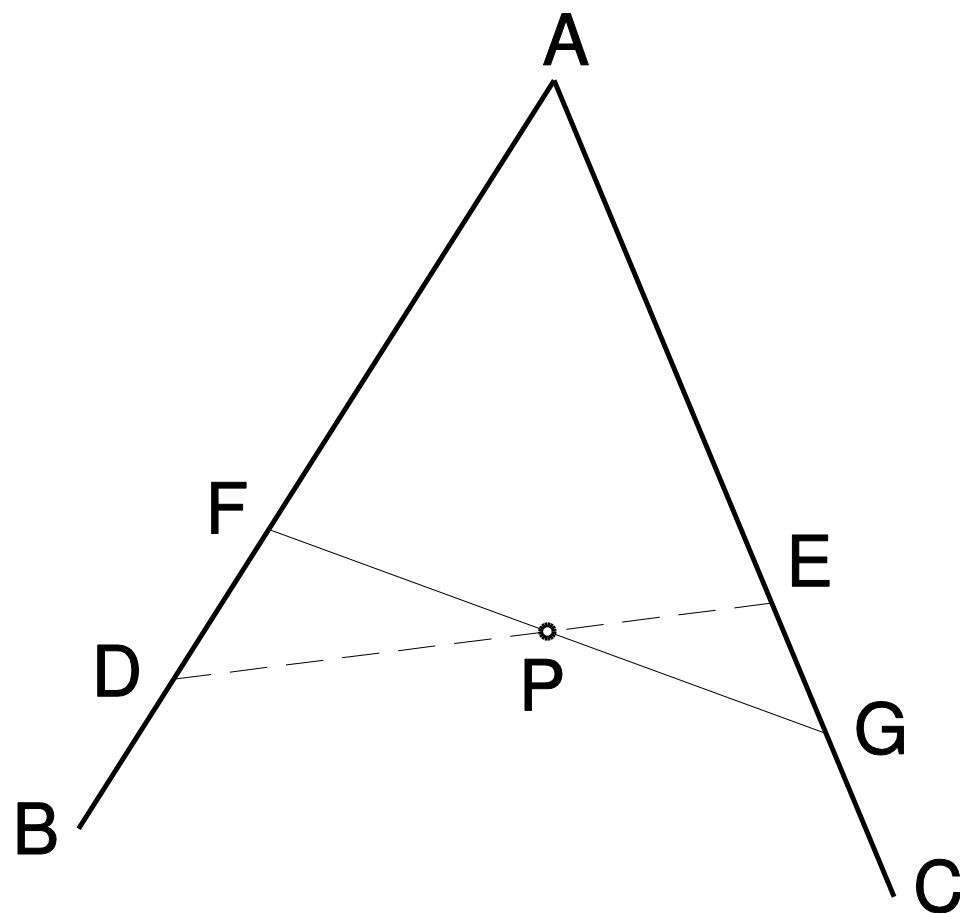
(b)

Hérón Alexandrijský (asi 624 př. n. – asi 548 př. n. l.)

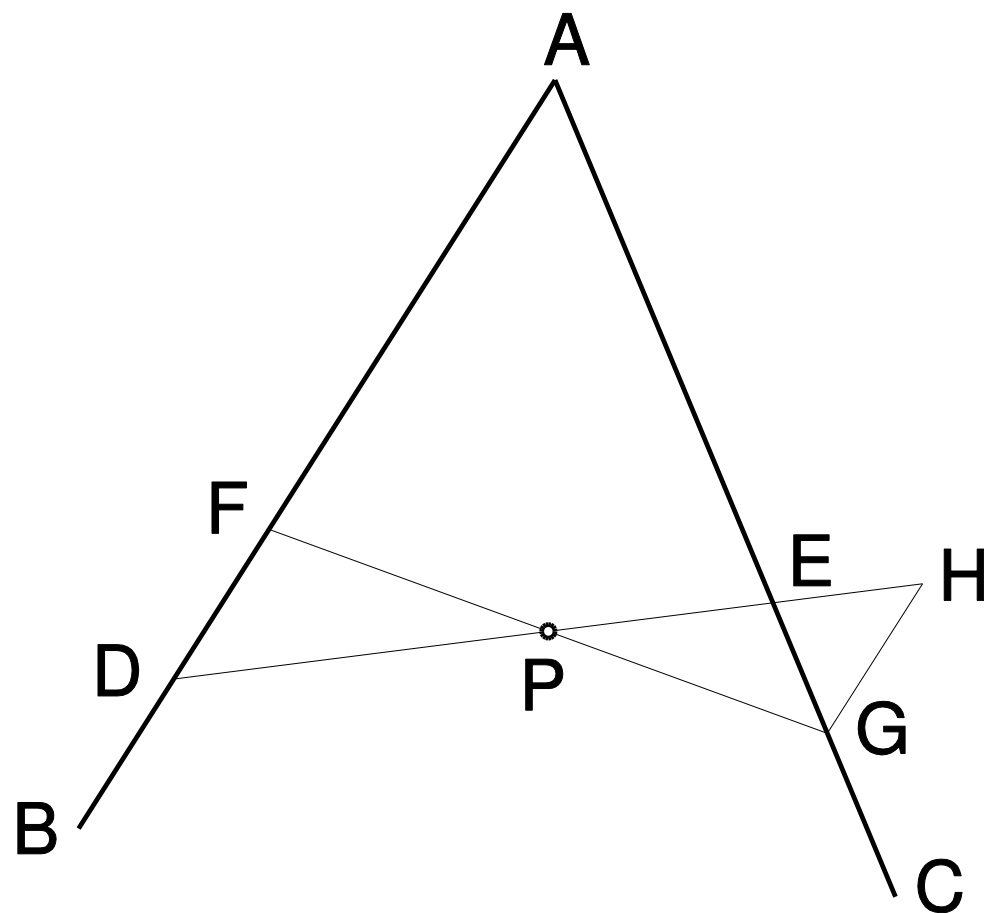
Jiná Simpsonova úloha na minimum



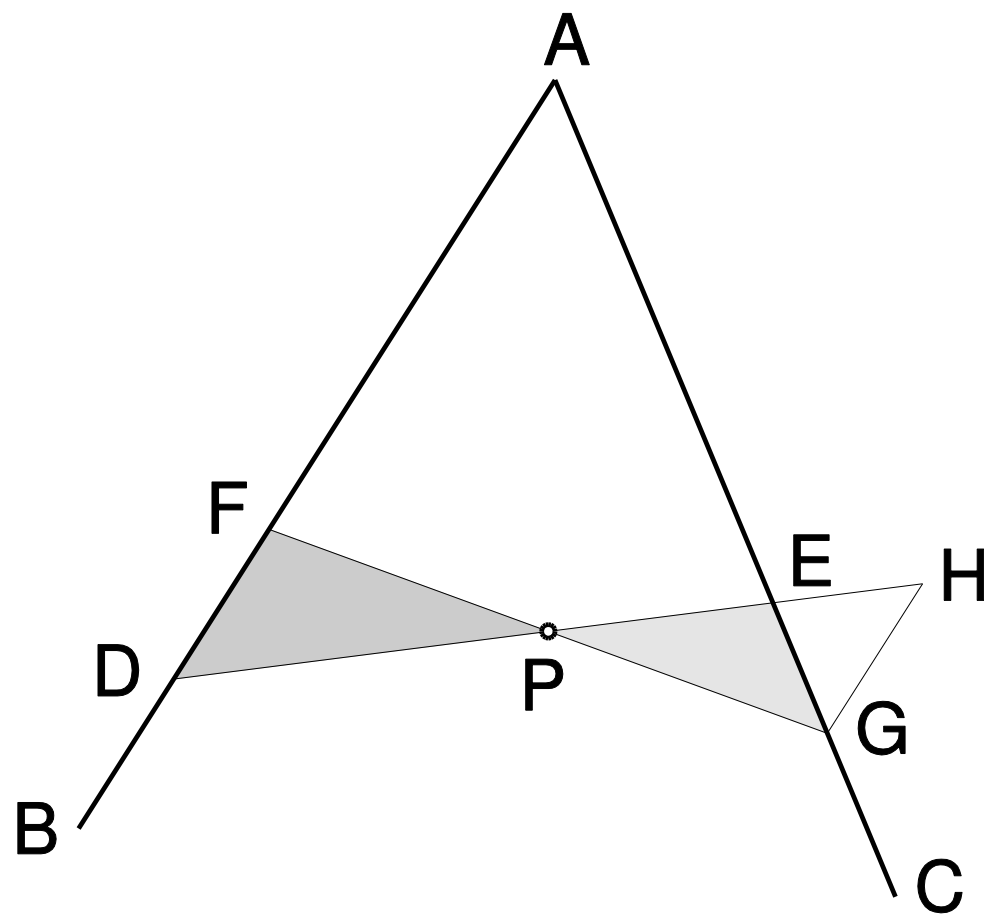
Jiná Simpsonova úloha na minimum



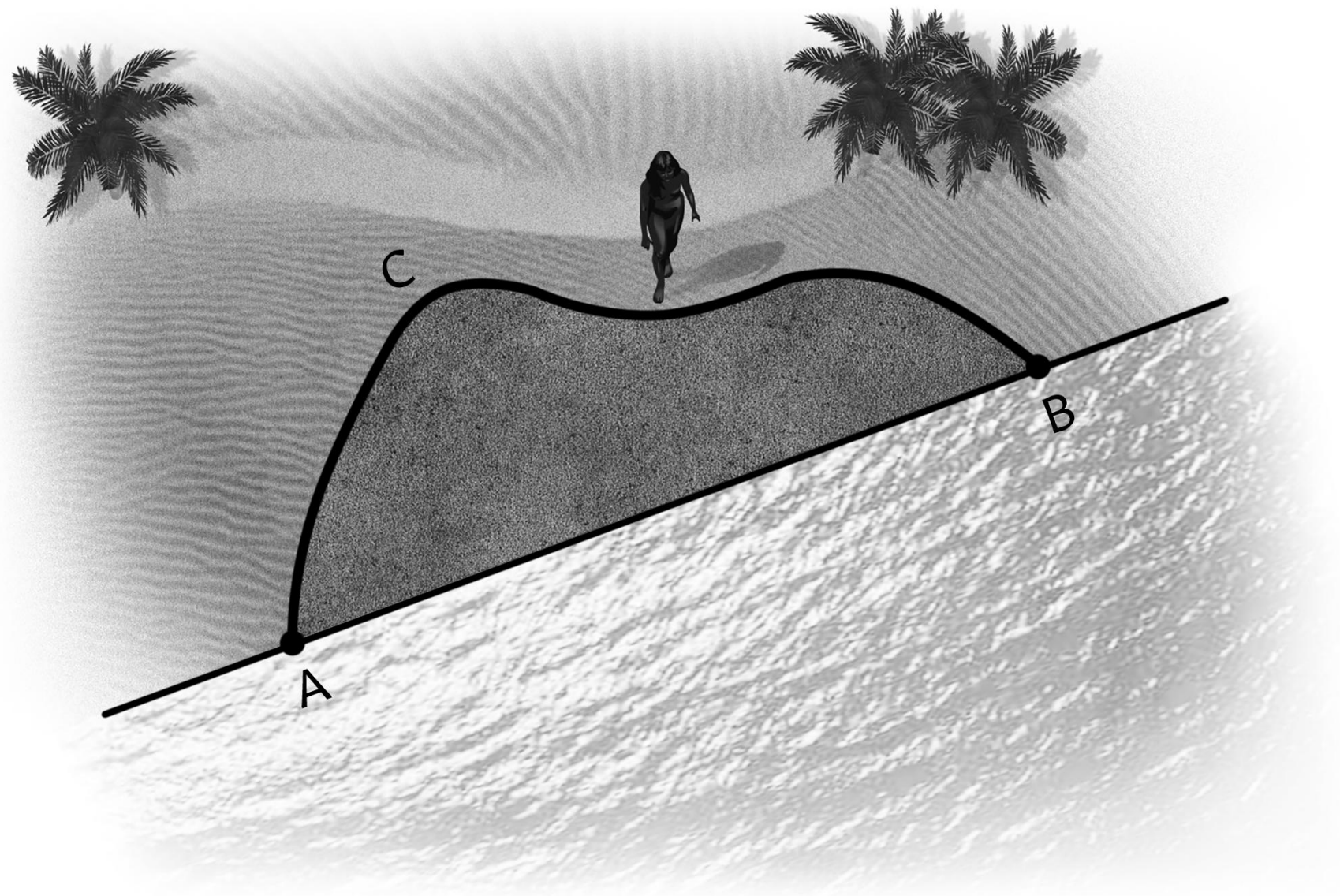
Jiná Simpsonova úloha na minimum



Jiná Simpsonova úloha na minimum

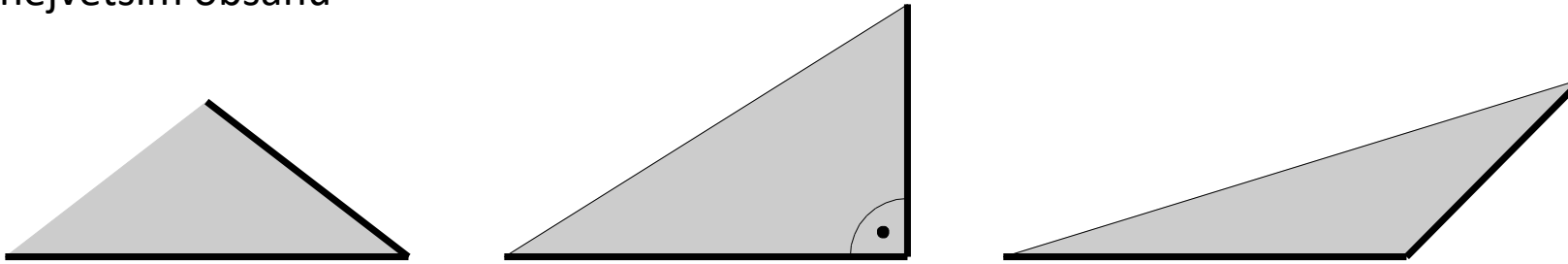


Didónina úloha

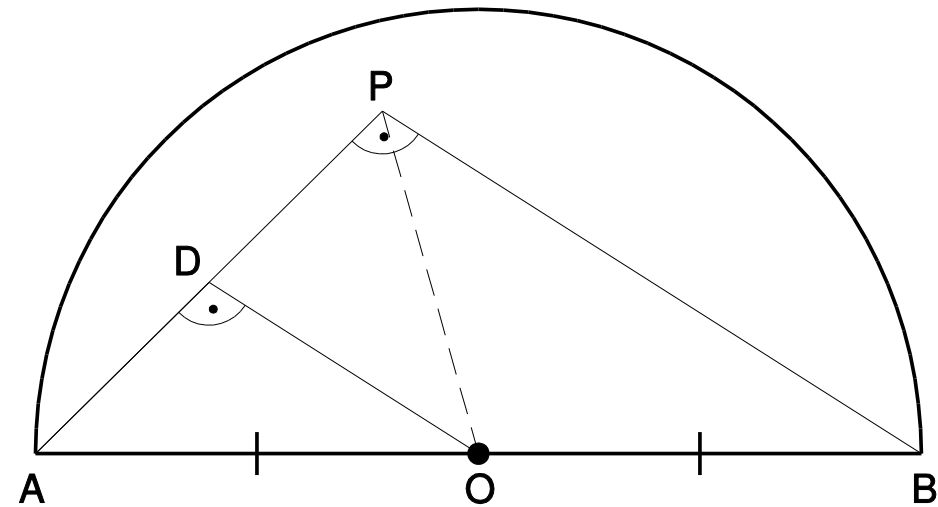
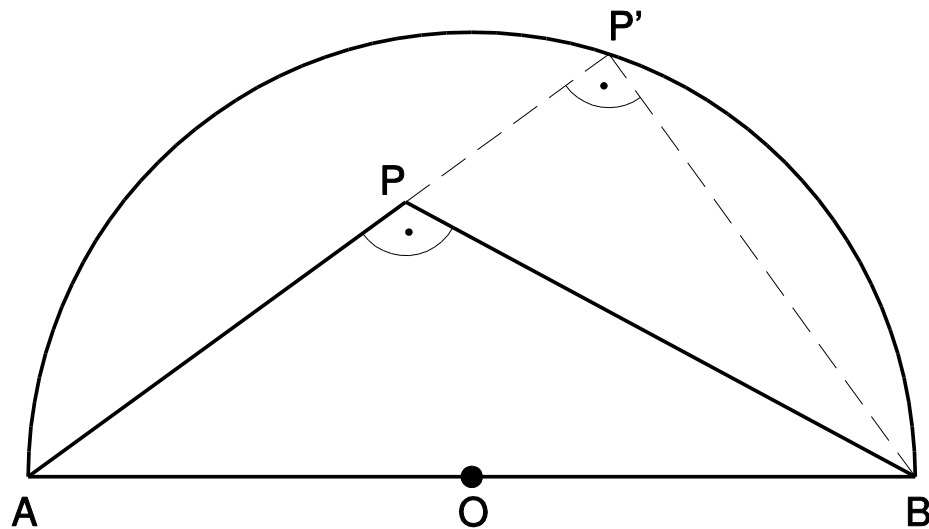


Didónina úloha, příprava

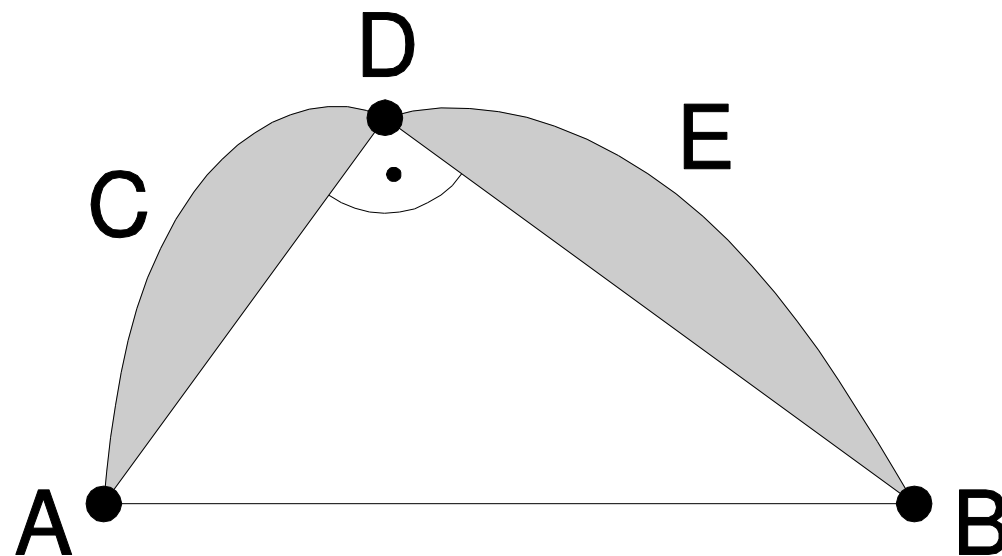
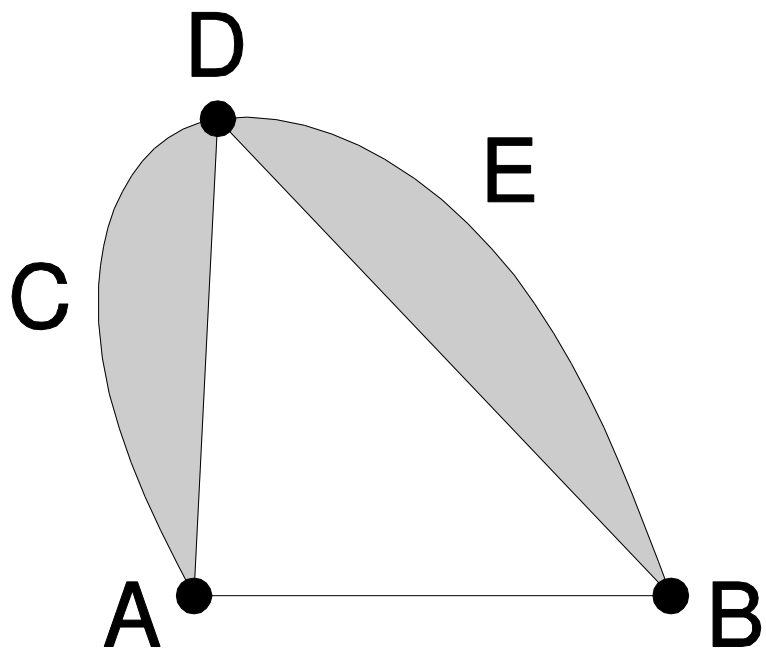
Trojúhelník o největším obsahu



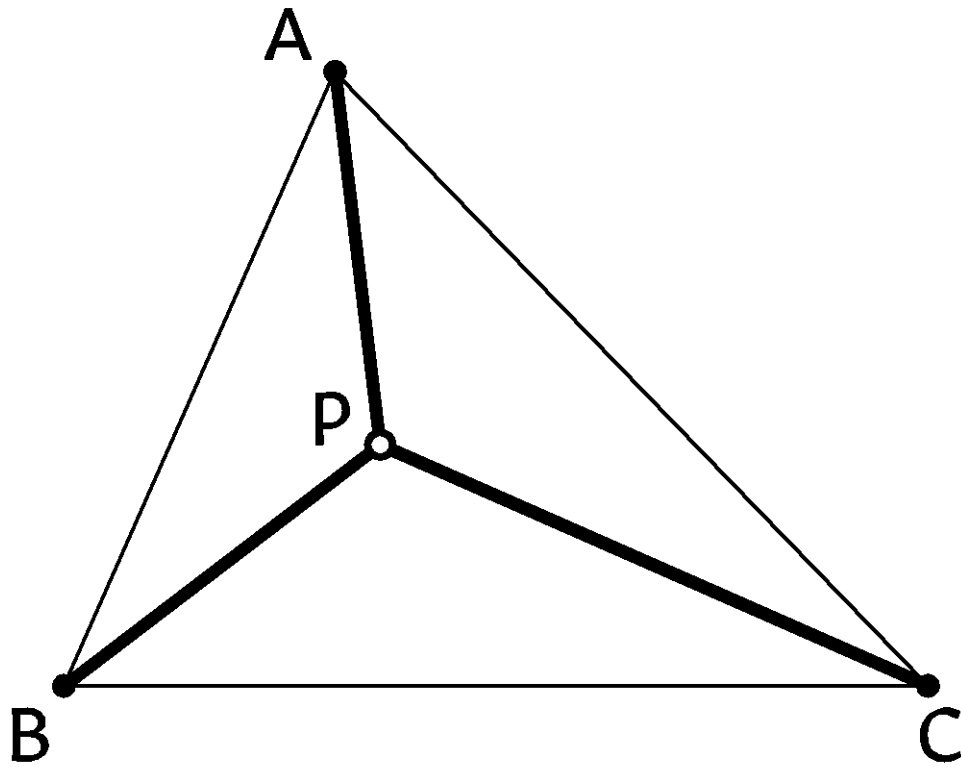
Obrácená Thalétova věta



Didónina úloha, Simpsonovo řešení



Fermatova úloha

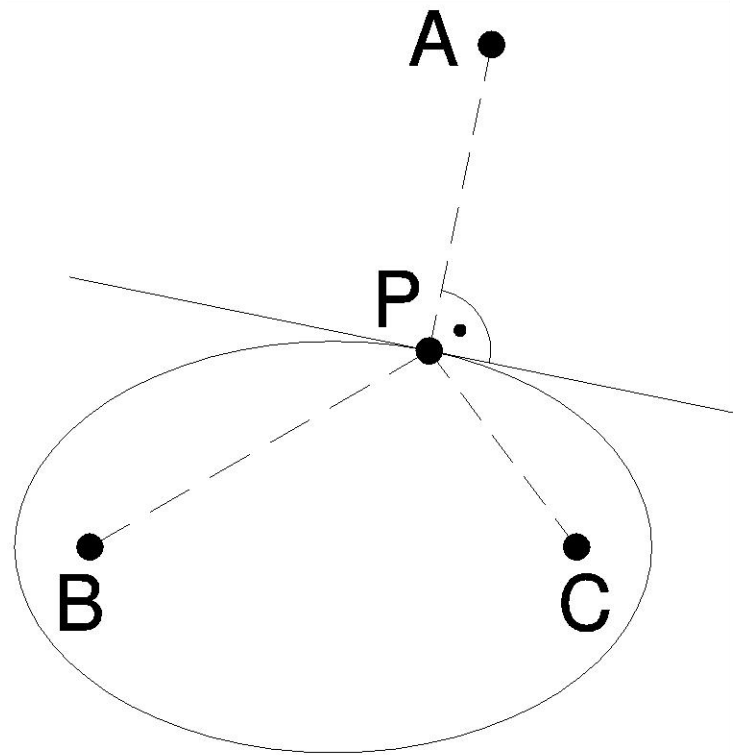


$$|AP| + |BP| + |CP| \rightarrow \text{minimum}$$



Pierre de Fermat (1607–1665)

Fermatova úloha, Torricelliho přístup



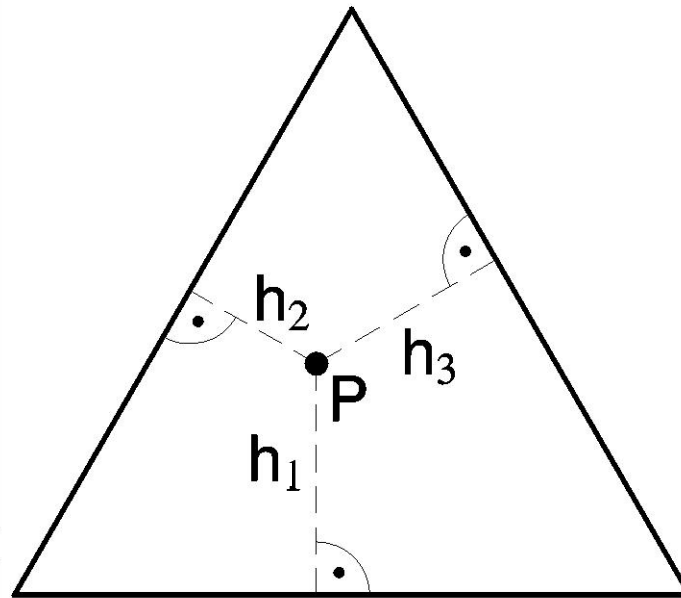
Je-li P hledaný bod,
úsečky AP, BP, CP
svírají úhly $\frac{\pi}{3}$.

Evangelista Torricelli (1608–1647)

Fermatova úloha, Vivianiho přístup



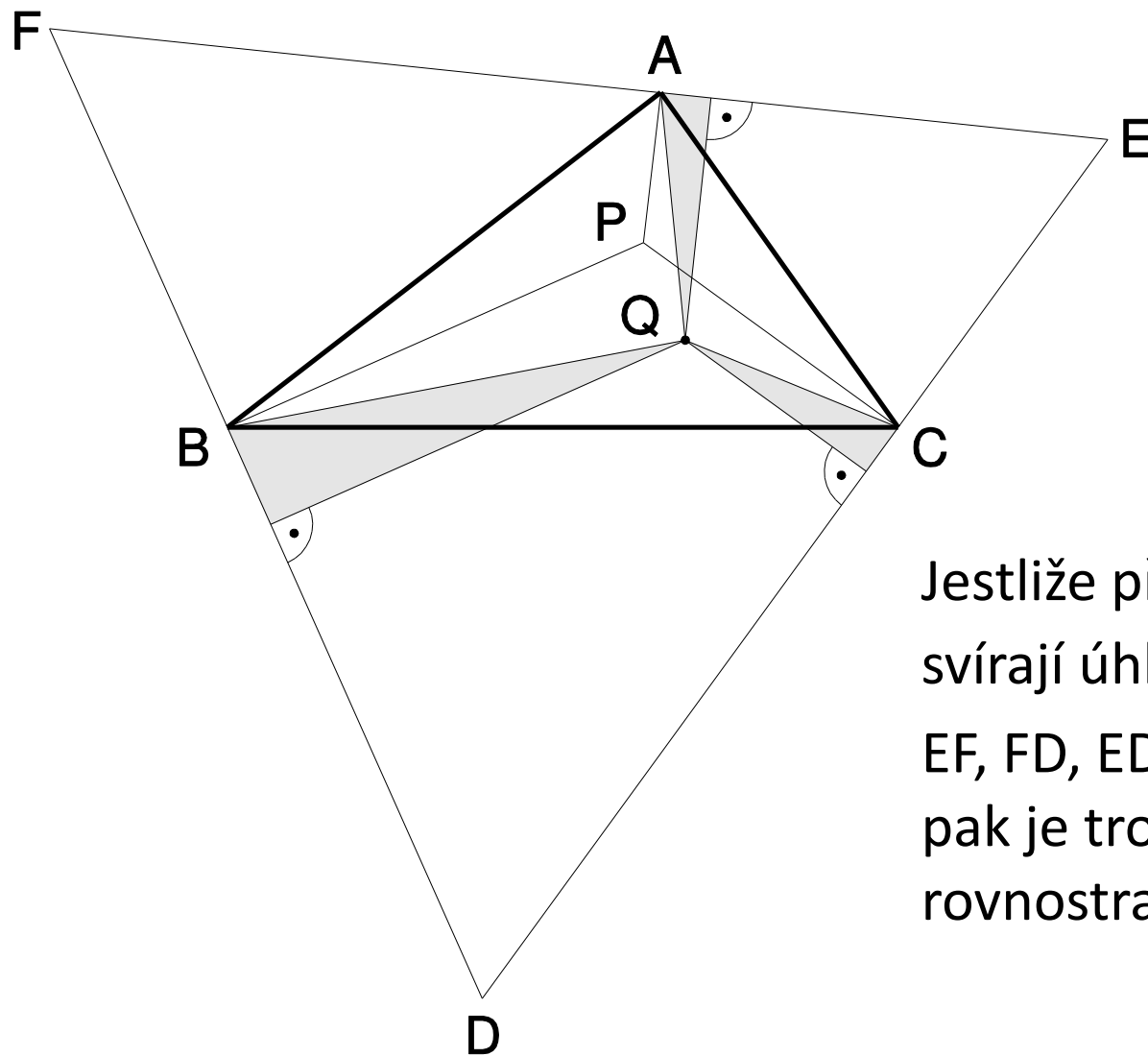
Vincenzo Viviani (1622–1703)



Vivianiho věta:
V rovnostranném
trojúhelníku platí

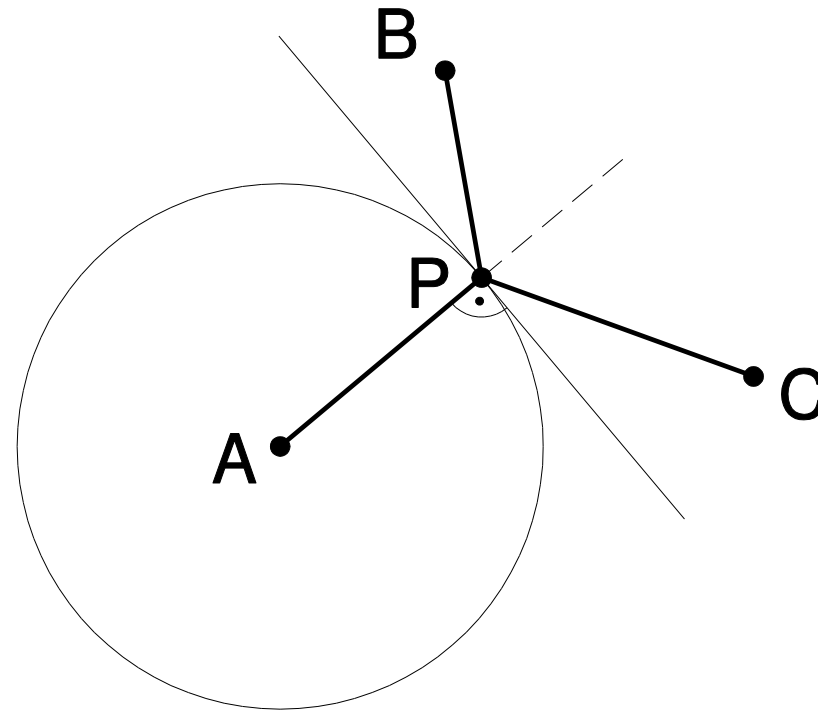
$$h_1 + h_2 + h_3 = h$$

Fermatova úloha, Vivianiho přístup



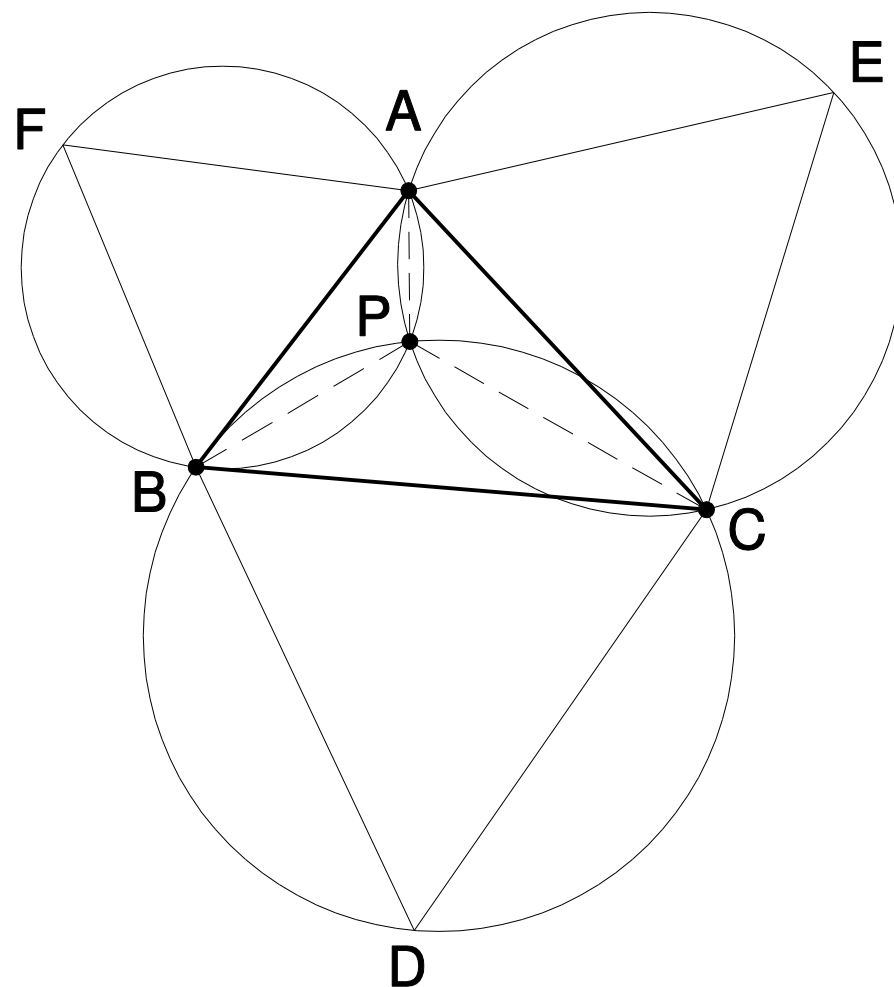
Jestliže přímky AP, BP, CP svírají úhly $\frac{\pi}{3}$ a jsou-li přímky EF, FD, ED kolmé k AP, BP, CP, pak je trojúhelník DEF rovnostranný.

Fermatova úloha, Simpsonův přístup



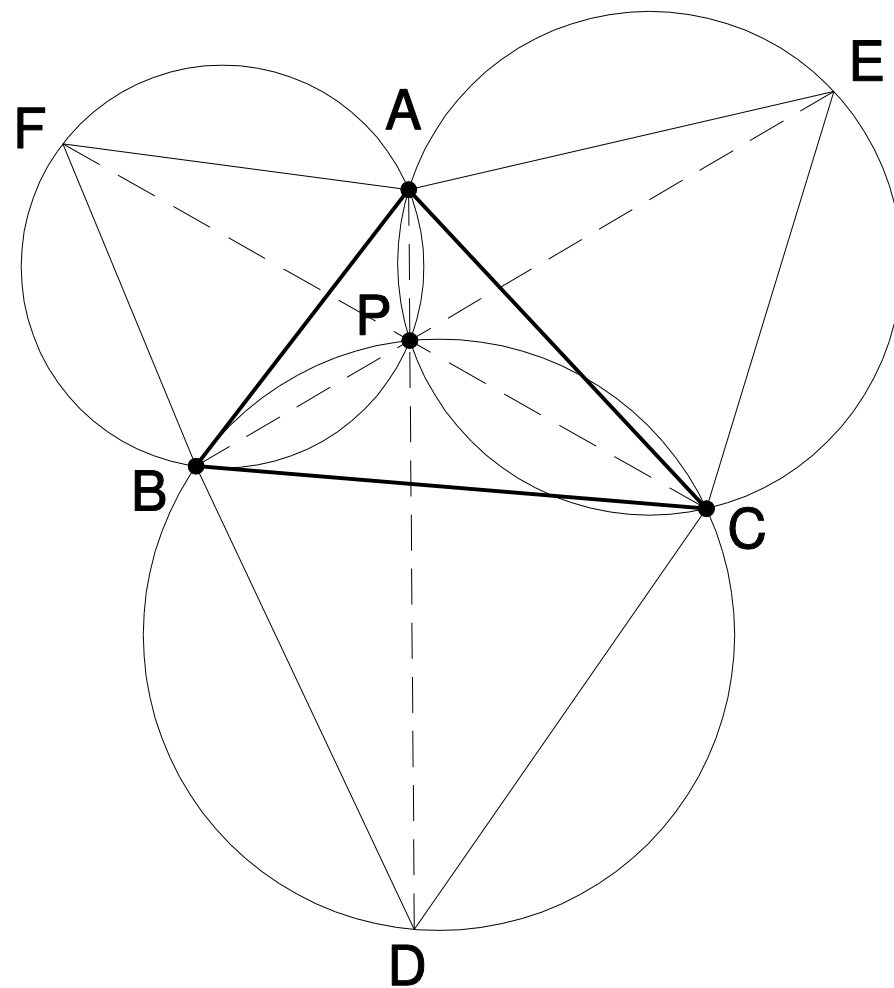
Úhly CPA a APB musí být stejné. Stačí opakovat pro bod B místo A.

Konstrukce Fermatova bodu



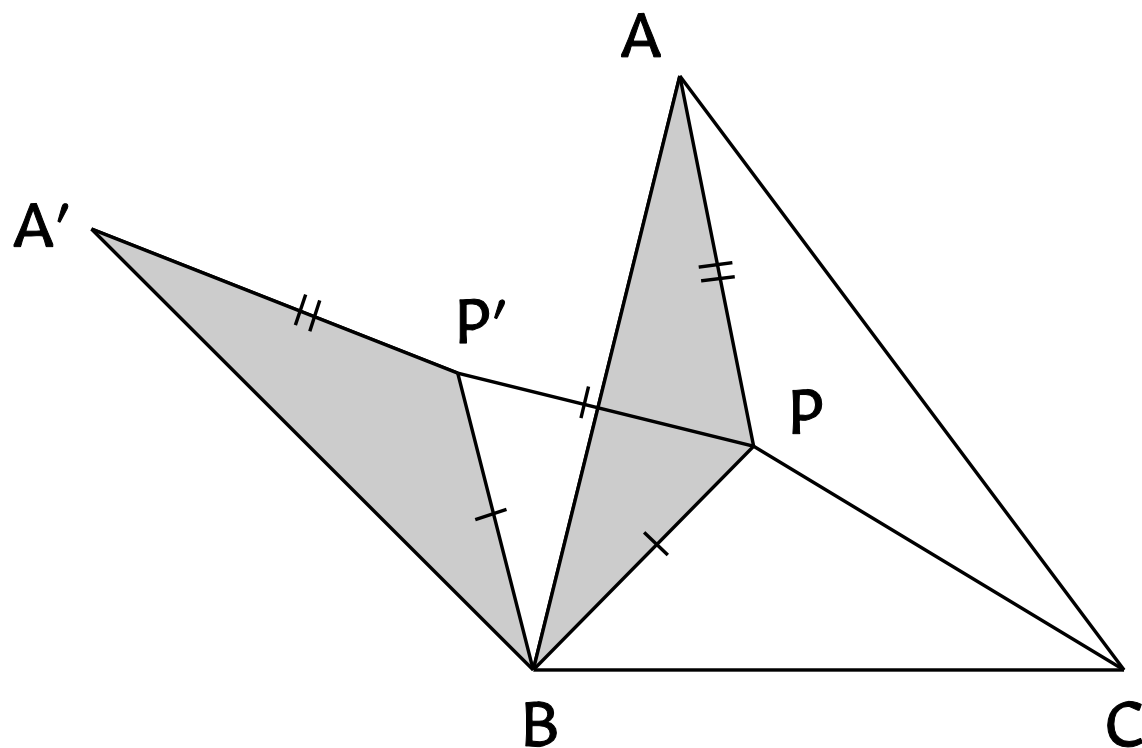
Součet velikostí úhlů APC a CEA je π , proto je čtyřúhelník $APCE$ tětiový.

Konstrukce Fermatova bodu



Úhly APE, FPA, BPF,
DPB, CPD, EPC mají
stejnou velikost: $\frac{\pi}{6}$

Konstrukce Fermatova bodu



Joseph Ehrenfried Hofmann (1900–1973)

Otočíme trojúhelník BPA

kolem B o $\frac{\pi}{6}$:

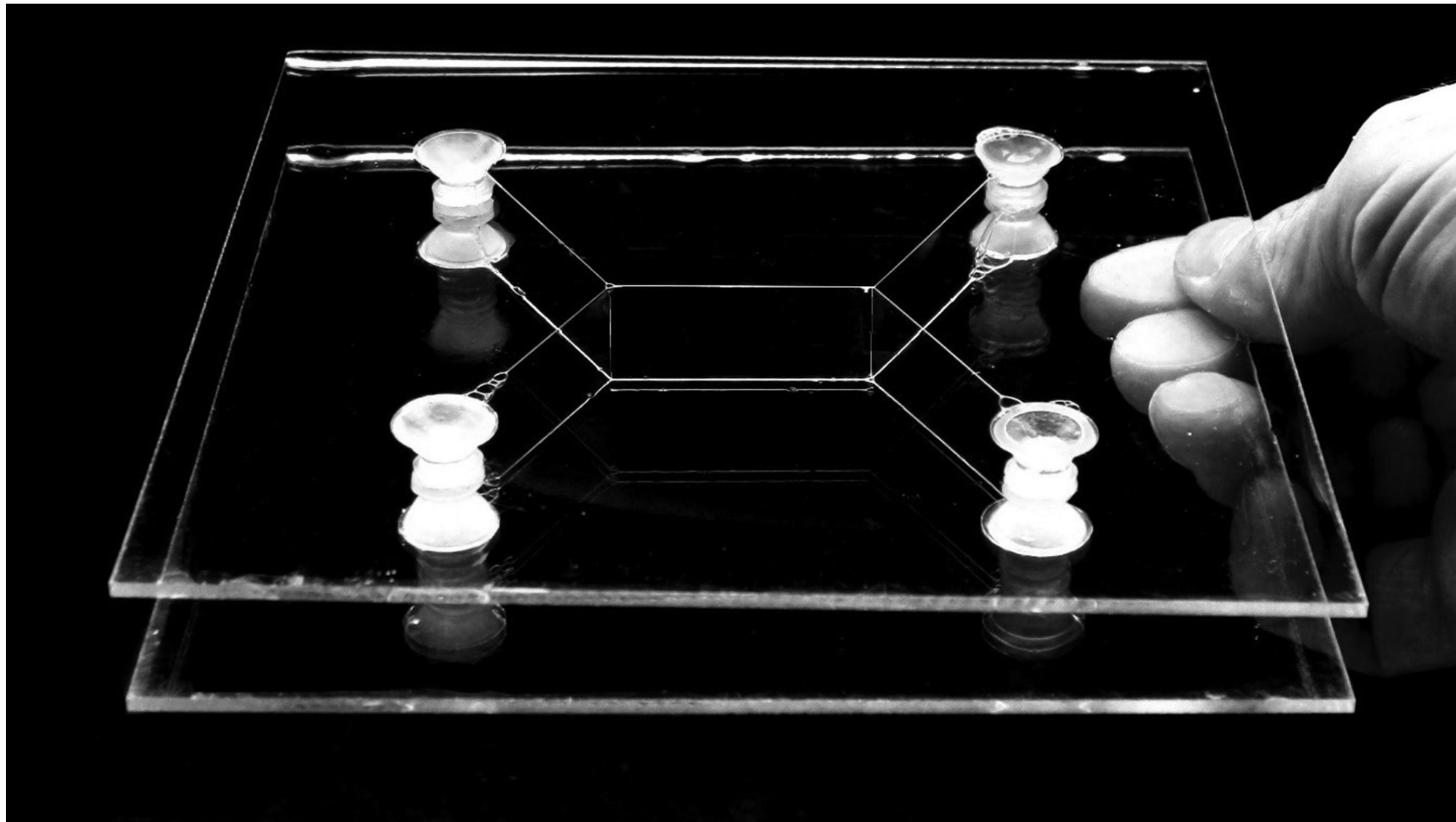
$$A'P' = AP$$

$$P'P = BP$$

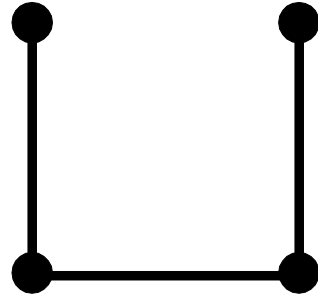
$$AP + BP + CP = A'P' + P'P + CP$$

P je Fermatovým bodem,
když $A'P'PC$ je nejkratší,
tj. když A, P', P, C
leží na přímce.

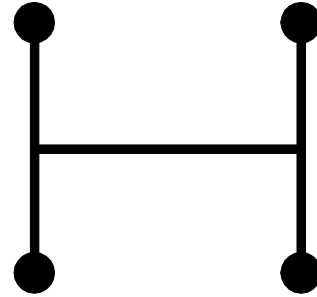
Mýdlové blány



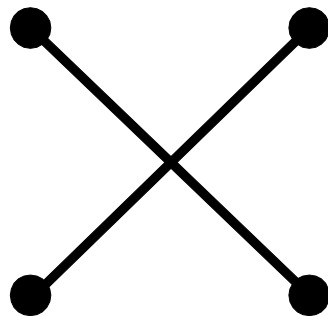
Mýdlové blány



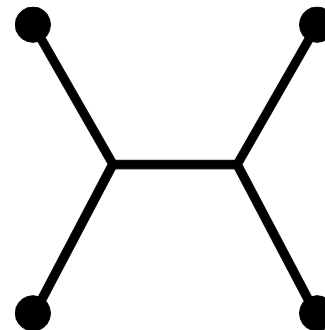
(a) 3



(b) 3

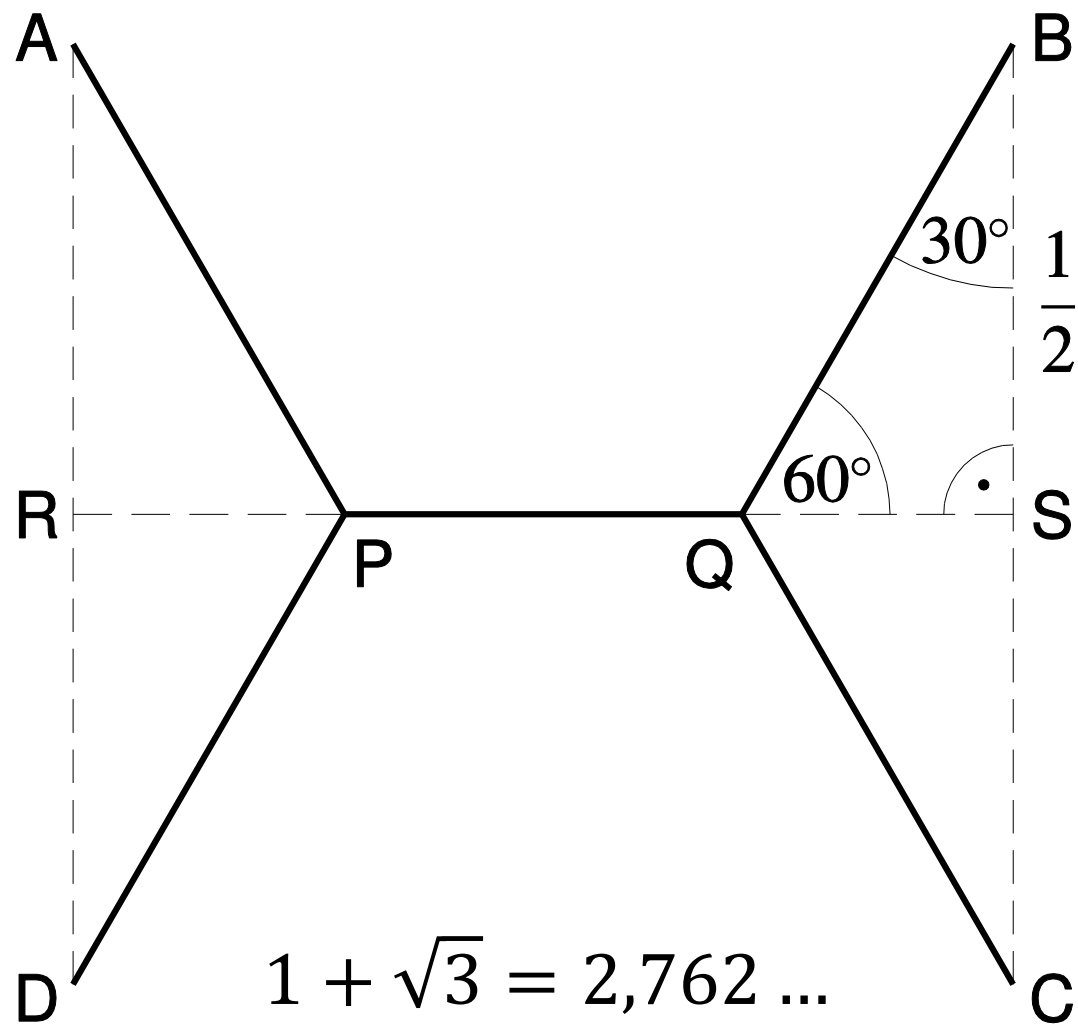


(c) $2\sqrt{2} = 2,828 \dots$



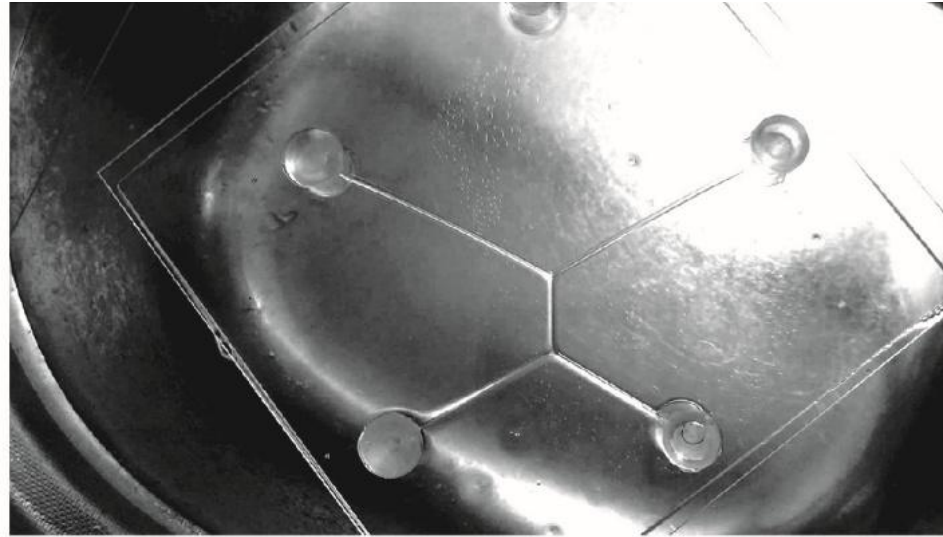
(d) $1 + \sqrt{3} = 2,732 \dots$

Mýdlové blány

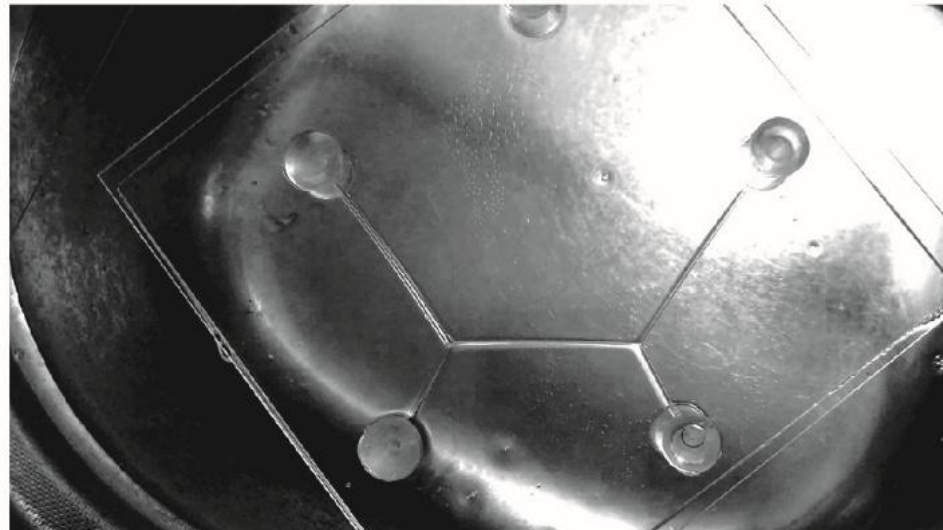


Mýdlové blány

(a)

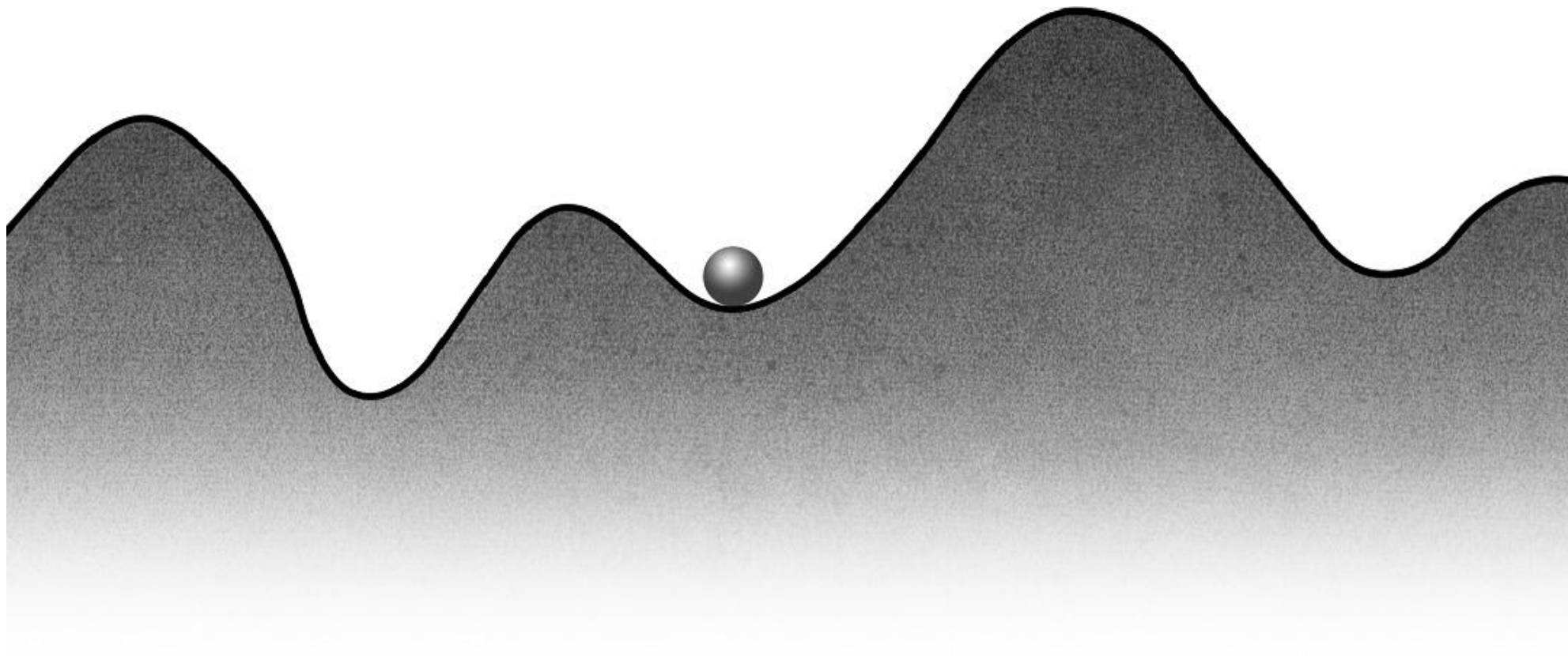


(b)

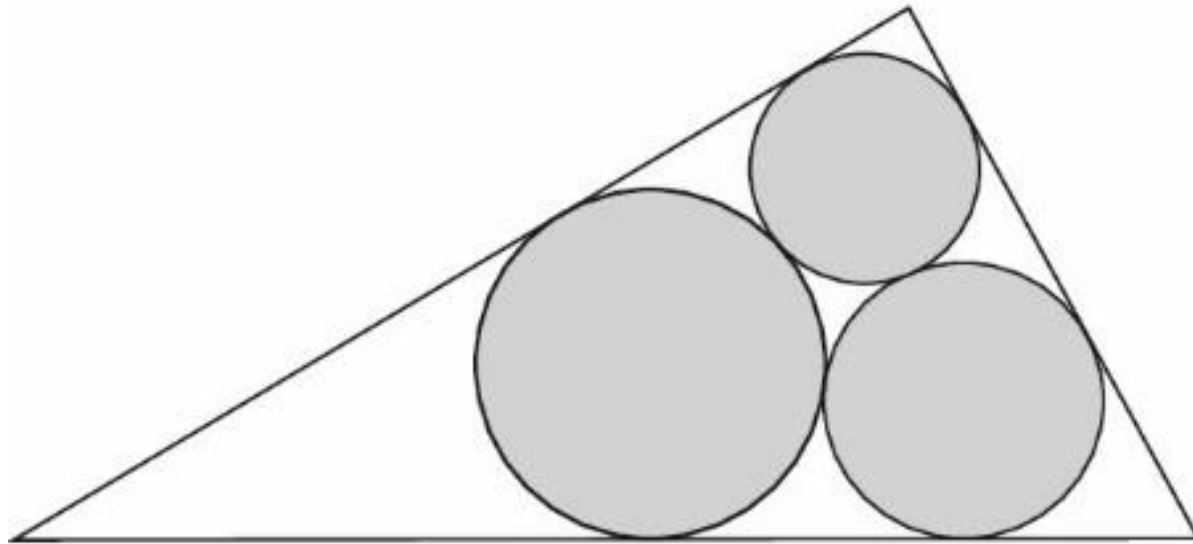


Fyzikální pokus nemusí
ukázat skutečné minimum.

Mýdlové blány



Malfattiho úloha

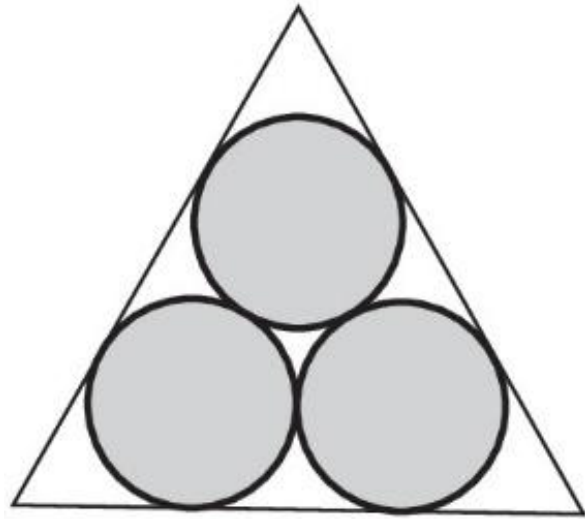


Domněnka: Tři nepřekrývající se kružnice vepsané do trojúhelníku mají největší celkový obsah, pokud se vzájemně dotýkají.

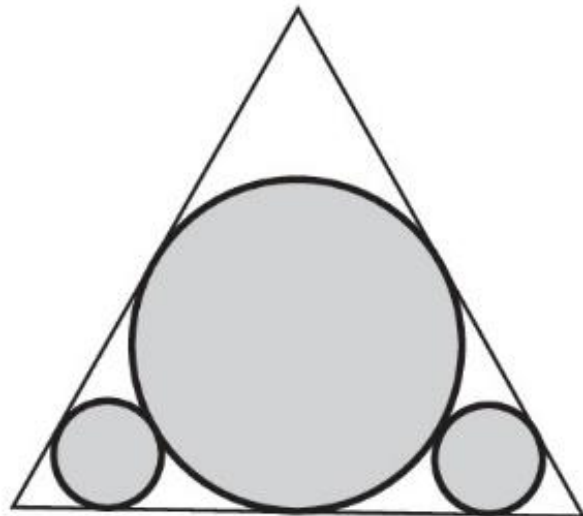


Gianfrancesco Malfatti (1731–1807)

Malfattiho úloha – něco nehraje

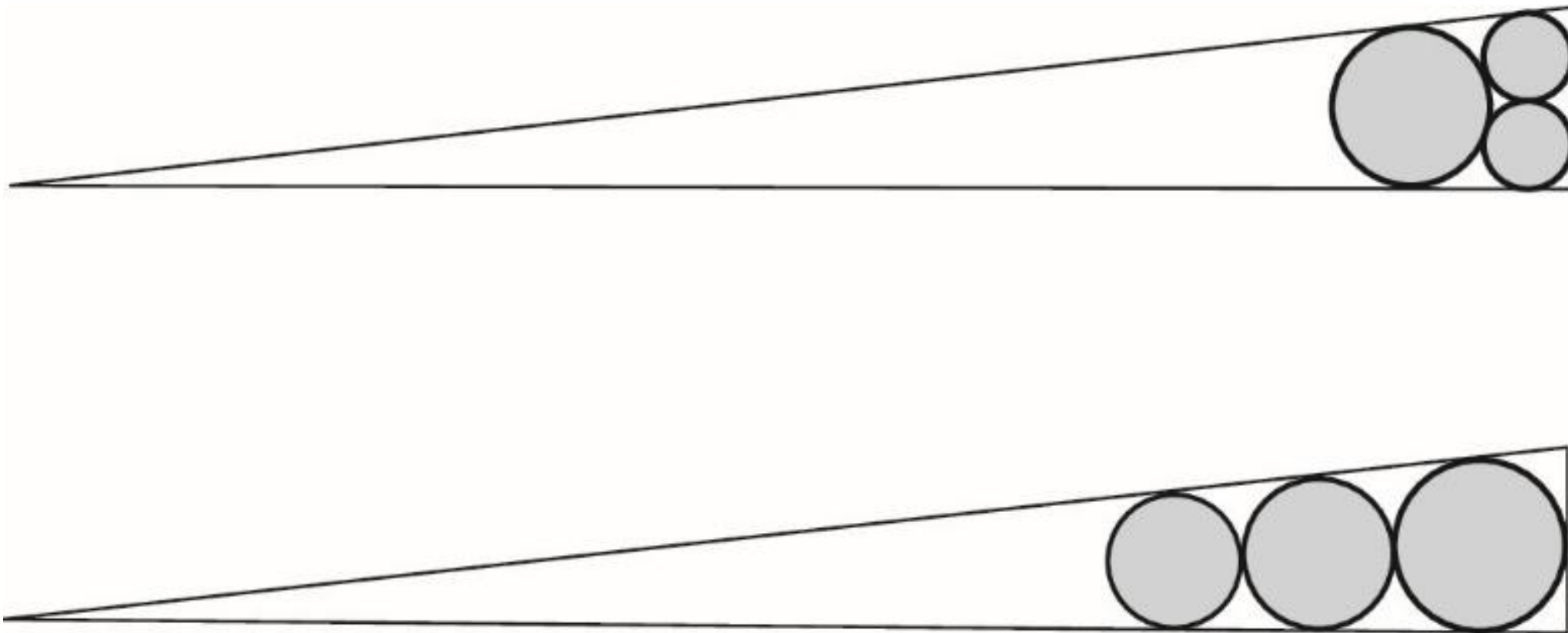


$$\frac{\pi \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})^2} \approx 0,729$$

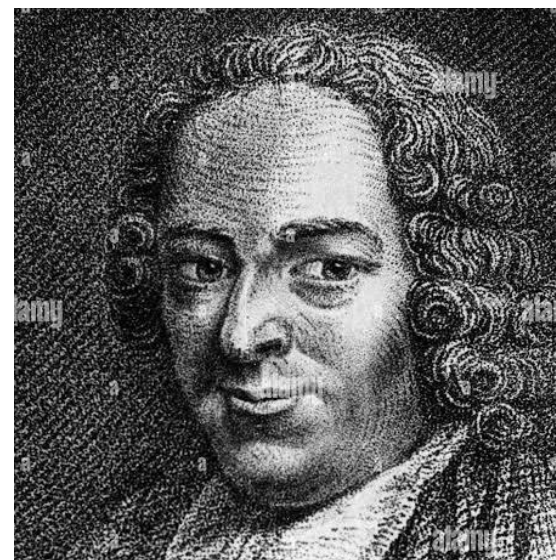
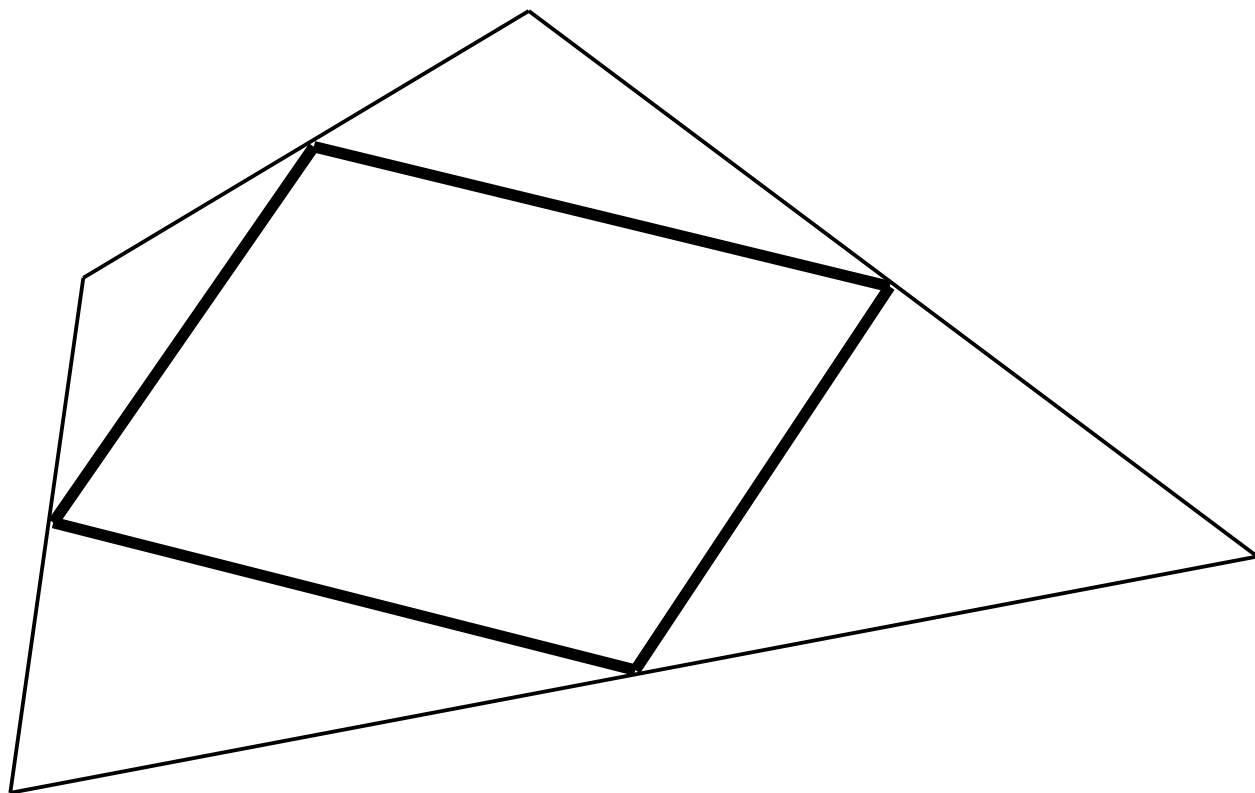


$$\frac{11\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,739$$

Malfattiho úloha – protipříklad

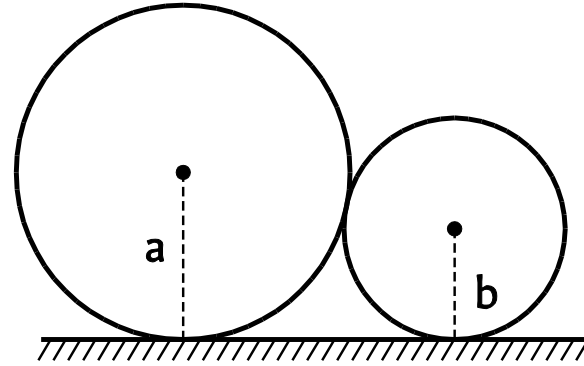


Varignonova věta



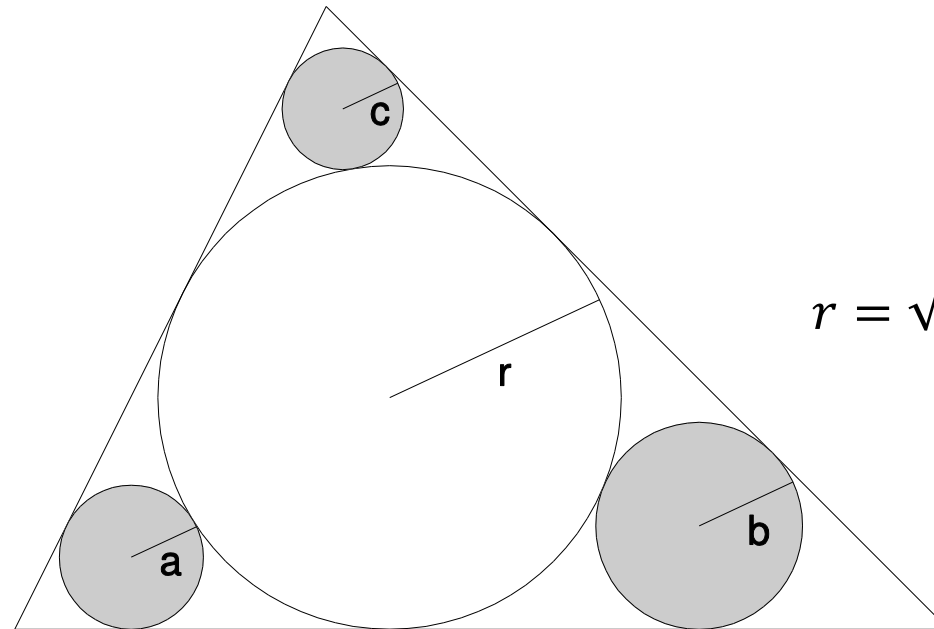
Pierre Varignon (1654–1722)

Geometrie v Dámském zápisníku (1704–1841)



$$D = 2\sqrt{ab}$$

← D →



$$r = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$$