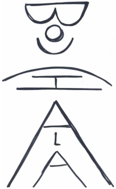
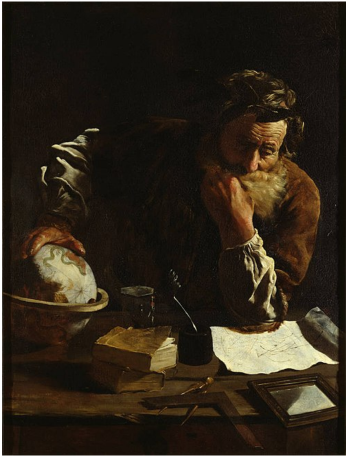
Banachova věta a fraktály

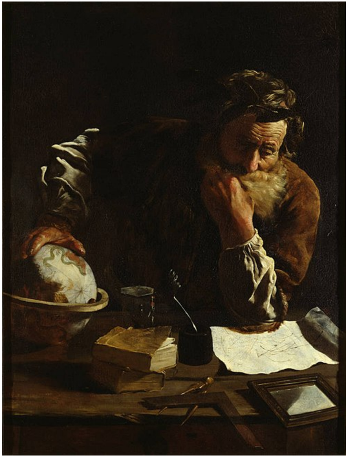
Jiří Bouchala



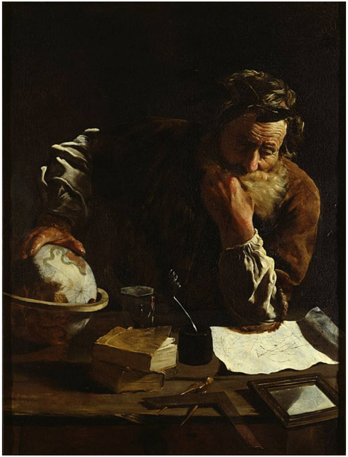
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY | KATEDRA APLIKOVANÉ MATEMATIKY

Matematika a fyzika ve škole
20. - 22. 8. 2025, Jevíčko



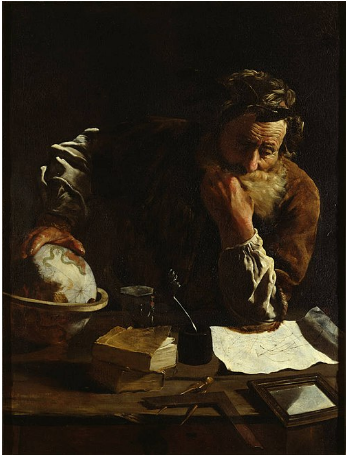


Archimedes (Domenico Fetti)



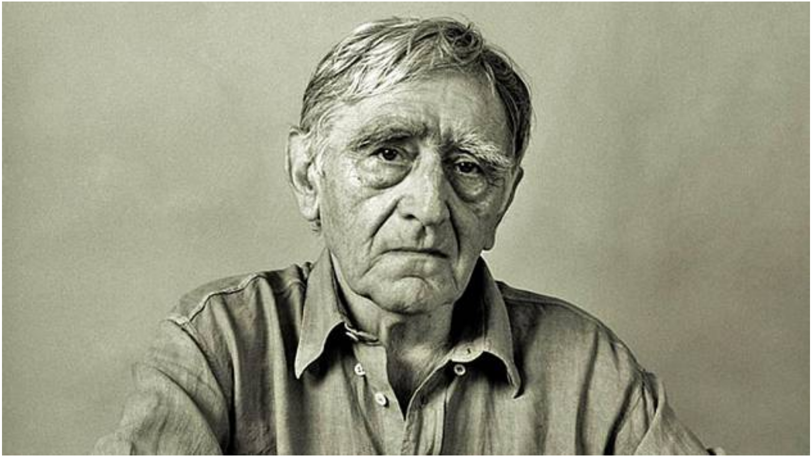
Archimedes (Domenico Fetti)

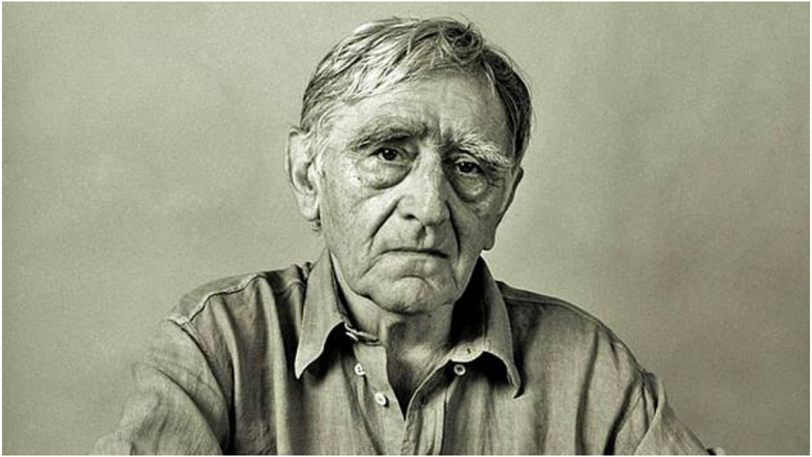
Archimédés ze Syrakus



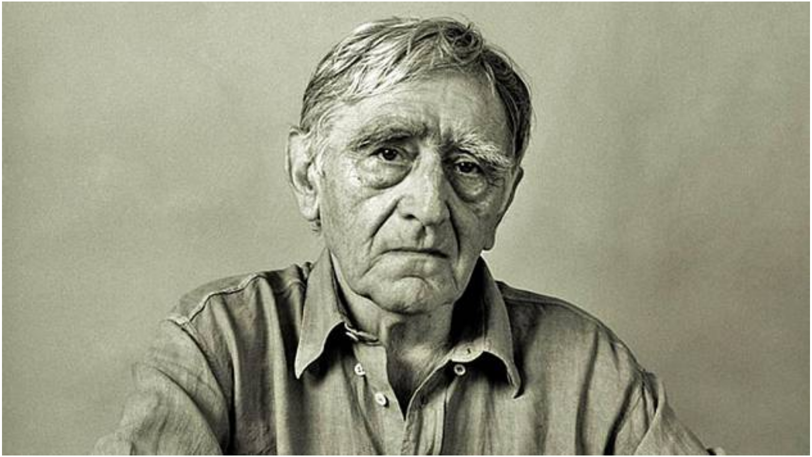
Archimedes (Domenico Fetti)

Archimédés ze Syrakus: „Dejte mi pevný bod a pohnu Zemí.“



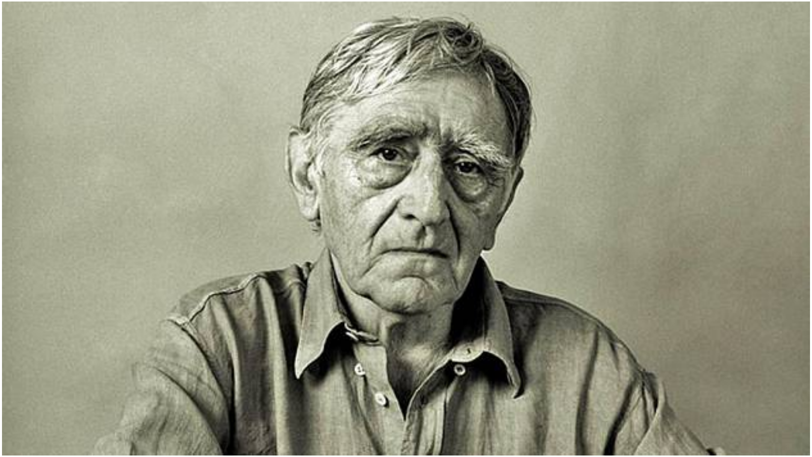


Jan Skácel



Jan Skácel

Jan Skácel z Brna



Jan Skácel

Jan Skácel z Brna: „Archimedes žádný pevný bod nehledal, říkal jenom: Dejte mi jej. Dobře věděl, že jsou blbci a žádný nemají.“


JASNÁ PÁKA
PRAŽSKÁ ROCKOVÁ SKUPINA
+
−
Název Jasná páka
Kytary Ambrož
Zatloukal
Baskytara Wünsch
Varhany Janda
Bicí Koller
Albrecht
Zpěv Pražová
Vojtěchová
Nakreslil

Jaroslav Olin Nejezchleba z Kyjova

Jaroslav Olin Nejezchleba z Kyjova: „Dejte mi pevný bod kdekoli ve vesmíru, a já se vám na něm ožeru jako prase.“

Dejte mi pevný bod a pohnu i českým školstvím

Petra a Slávek, ISSN 2788-1377

ÚVODNÍ STRÁNKA | SLÁVEK HORA | PETRA BOHÁČKOVÁ | INSPIRACE... | ŠKOLENÍ | O2 CHYTRÁ ŠKOLA | O NÁS

O nás

Vydavatelé: Petra Boháčková, Odolena Voda a Bohuslav Hora, Planá nad Lužnicí

vychází jedenkrát týdně, vždy v pátek

ISSN 2788-1377

Hledat ...

NEJNOVĚJŠÍ PŘÍSPĚVKY

Krásné léto

Dokončená opakovací únikovka

Konečně už to stiskni

Únikovka jako opakování

Digitální hudebka

Dejte mi pevný bod a pohnu i českým školstvím

Petra a Slávek, ISSN 2788-1377

ÚVODNÍ STRÁNKA | SLÁVEK HORA | PETRA BOHÁČKOVÁ | INSPIRACE... | ŠKOLENÍ | O2 CHYTRÁ ŠKOLA | O NÁS

O nás

Vydavatelé: Petra Boháčková, Odolena Voda a Bohuslav Hora, Planá nad Lužnicí

vychází jedenkrát týdně, vždy v pátek

ISSN 2788-1377

Hledat ...

NEJNOVĚJŠÍ PŘÍSPĚVKY

- Krásné léto
- Dokončená opakovací únikovka
- Konečně už to stiskni
- Únikovka jako opakování
- Digitální hudebka

https://dejtemipevnybod.cz/

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f : X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f: X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f: X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.
Například takto:

$$A(x) = b$$

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f:\ X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení. Například takto:

$$A(x) = b$$

$$\Updownarrow$$

$$A(x) - b = 0$$

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f : \; X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení. Například takto:

$$A(x) = b$$

$$\Updownarrow$$

$$A(x) - b = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{f(x)} := x + A(x) - b \mathbf{= x}.$$

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f:\ X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.
Například takto:

$$A(x) = b$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x) - b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{f(x)} := x + A(x) - b \mathbf{= x}.$$

Problémy:

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f:\; X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.
Například takto:

$$A(x) = b$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x) - b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{f(x)} := x + A(x) - b \mathbf{= x}.$$

Problémy:

Existuje pevný bod f?

Definice.

Pevným bodem zobrazení
$$f:\ X \to X$$
rozumíme $x \in X$ takové, že
$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.
Například takto:
$$A(x) = b$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x) - b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{f(x)} := x + A(x) - b \mathbf{= x}.$$

Problémy:

Existuje pevný bod f? Pokud ano, je jediný?

Definice.

Pevným bodem zobrazení

$$f: \ X \to X$$

rozumíme $x \in X$ takové, že

$$f(x) = x.$$

Spousty úloh (rovnic) lze převést na úkol najít pevný bod zobrazení.
Například takto:

$$A(x) = b$$
$$\Updownarrow$$
$$A(x) - b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathbf{f(x)} := x + A(x) - b \mathbf{= x}.$$

Problémy:

Existuje pevný bod f? Pokud ano, je jediný? A jak ho (aspoň přibližně) najít?

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.
Potom

$$\exists x \in \mathbb{R}: \; f(x) = x.$$

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.
Potom

$$\exists\, x \in \mathbb{R}:\ \ f(x) = x.$$

`Obecněji:`

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.
Potom

$$\exists\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) = x.$$

`Obecněji:`

Nechť

- $K \subset \mathbb{R}^n$ je **neprázdná, konvexní a kompaktní** (tj. uzavřená a omezená) **podmnožina** $\mathbb{R}^n$,
- $f: K \to K$ je na K **spojitá**.

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.
Potom

$$\exists x \in \mathbb{R}: \ f(x) = x.$$

`Obecněji:`

Nechť

- $K \subset \mathbb{R}^n$ je **neprázdná, konvexní a kompaktní** (tj. uzavřená a omezená) **podmnožina** $\mathbb{R}^n$,
- $f: K \to K$ je na K **spojitá**.

Potom

$$\exists x \in K: \ f(x) = x.$$

Brouwerova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **spojitá** a **omezená**.
Potom

$$\exists x \in \mathbb{R}: \; f(x) = x.$$

`Obecněji:`

Nechť

- $K \subset \mathbb{R}^n$ je **neprázdná, konvexní a kompaktní** (tj. uzavřená a omezená) **podmnožina** $\mathbb{R}^n$,
- $f: K \to K$ je na K **spojitá**.

Potom

$$\exists x \in K: \; f(x) = x.$$

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **kontraktivní**, tzn.

$$(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in \mathbb{R}) : \ |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|.$$

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **kontraktivní**, tzn.

$$(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in \mathbb{R}): \; |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|.$$

Potom

$$\exists!\, x \in \mathbb{R}: \; f(x) = x.$$

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $\mathbb{R}$ **kontraktivní**, tzn.

$$(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in \mathbb{R}): \ |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|.$$

Potom

$$\exists!\, x \in \mathbb{R}: \ f(x) = x.$$

I toto tvrzení lze zobecnit.

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$

Banachova věta o pevném bodu.

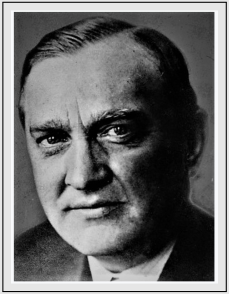
Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f : X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X) : \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

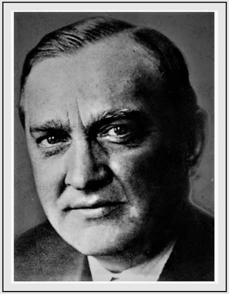
  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X : \ f(x) = x.$$



Banachova věta o pevném bodu.



Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f : X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X) : \; \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X : \; f(x) = x.$$

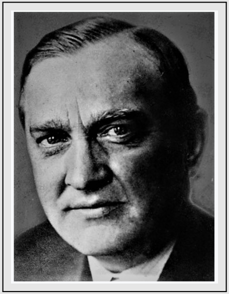
Aplikace:

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).



Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$

Aplikace:

- Picardova – Lindelöfova věta,

Banachova věta o pevném bodu.

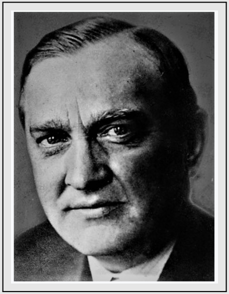
Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: \ X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$



Aplikace:

- Picardova – Lindelöfova věta,
- řešitelnost okrajových úloh,

Banachova věta o pevném bodu.

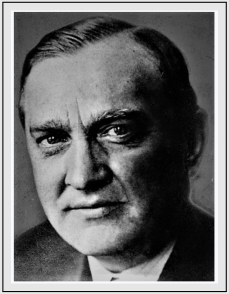
Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: \ X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$



Aplikace:

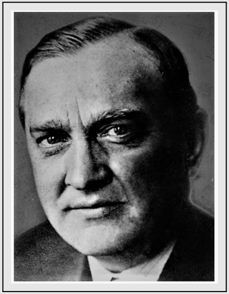
- Picardova – Lindelöfova věta,
- řešitelnost okrajových úloh,
- Laxovo – Milgramovo lemma,

Banachova věta o pevném bodu.

Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: \ X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).



Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$

Aplikace:

- Picardova – Lindelöfova věta,
- řešitelnost okrajových úloh,
- Laxovo – Milgramovo lemma,
- řešitelnost variačních nerovnic,

Banachova věta o pevném bodu.

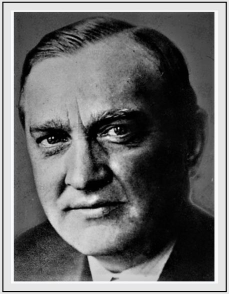
Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f : X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X) : \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X : \ f(x) = x.$$



Aplikace:

- Picardova – Lindelöfova věta,
- řešitelnost okrajových úloh,
- Laxovo – Milgramovo lemma,
- řešitelnost variačních nerovnic,
- věta o implicitní funkci,

Banachova věta o pevném bodu.

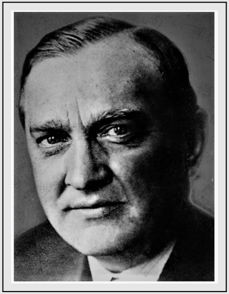
Nechť

- (X, ϱ) je **úplný metrický** prostor,
- $f: X \to X$,
- $(\exists q < 1)\,(\forall x, y \in X): \ \varrho(f(x), f(y)) \leq q\,\varrho(x, y)$

  (f ... tzv. **kontraktivní** zobrazení).

Potom

$$\exists!\, x \in X: \ f(x) = x.$$



Aplikace:

- Picardova – Lindelöfova věta,
- řešitelnost okrajových úloh,
- Laxovo – Milgramovo lemma,
- řešitelnost variačních nerovnic,
- věta o implicitní funkci,
- Newtonova metoda, ...

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) \\
x_2 &= f(x_1) \\
x_3 &= f(x_2) \\
&\vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

a současně (f je zřejmě spojitá)

$$f(x_{n-1}) \to f(x).$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

a současně (f je zřejmě spojitá)

$$f(x_{n-1}) \to f(x).$$

- Odtud plyne

$$x = f(x).$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

a současně (f je zřejmě spojitá)

$$f(x_{n-1}) \to f(x).$$

- Odtud plyne

$$x = f(x).$$

- A konečně

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ y &= f(y) \end{aligned}$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

a současně (f je zřejmě spojitá)

$$f(x_{n-1}) \to f(x).$$

- Odtud plyne

$$x = f(x).$$

- A konečně

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ y &= f(y) \end{aligned} \Rightarrow \varrho(x, y) \leq q\, \varrho(x, y),$$

Ukažme si, jaká je **struktura důkazu**.

- Zvolme si libovolně $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n):

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Dokažme, že posloupnost (x_n) je cauchyovská, a proto existuje (X je úplný) $x \in X$ takové, že

$$x_n \to x.$$

- Pak

$$x \leftarrow x_n = f(x_{n-1})$$

a současně (f je zřejmě spojitá)

$$f(x_{n-1}) \to f(x).$$

- Odtud plyne

$$x = f(x).$$

- A konečně

$$\begin{aligned} x &= f(x) \\ y &= f(y) \end{aligned} \Rightarrow \varrho(x, y) \leq q\, \varrho(x, y),$$

a proto

$$x = y.$$

Buď (X, ϱ) metrický prostor a značme pro každé $\emptyset \neq M \subset X$ a $\delta > 0$

$$U(M, \delta) = \bigcup_{x \in M} U(x, \delta)$$

Buď (X, ϱ) metrický prostor a značme pro každé $\emptyset \neq M \subset X$ a $\delta > 0$

$$U(M, \delta) = \bigcup_{x \in M} U(x, \delta) \; = \{y \in X : \text{ existuje } x \in M \text{ takové, že } \varrho(y, x) < \delta\}.$$

Buď (X, ϱ) metrický prostor a značme pro každé $\emptyset \neq M \subset X$ a $\delta > 0$

$$U(M, \delta) = \bigcup_{x \in M} U(x, \delta) \;= \{y \in X : \text{ existuje } x \in M \text{ takové, že } \varrho(y, x) < \delta\}.$$

Nyní definujme metrický prostor

$$(\mathbb{H}(X), d),$$

kde

$$\mathbb{H}(X) = \{K \subset X : \; K \text{ je neprázdná a kompaktní}\} \ldots \text{ tzv. } \textbf{hyperprostor},$$

$$d(A, B) := \inf\{\delta > 0 : \; A \subset U(B, \delta) \wedge B \subset U(A, \delta)\} \ldots \text{ tzv. } \textbf{Hausdorffova metrika}.$$

Věta.

Metrický prostor (X, ϱ) je úplný právě tehdy, je-li **úplný** prostor $(\mathbb{H}(X), d)$.

Věta.

Metrický prostor (X, ϱ) je úplný právě tehdy, je-li **úplný** prostor $(\mathbb{H}(X), d)$.

Věta (Hutchinson, 1981).

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_k : \; X \to X$$

jsou na metrickém prostoru (X, ϱ) kontraktivní.

Věta.

Metrický prostor (X, ϱ) je úplný právě tehdy, je-li **úplný** prostor $(\mathbb{H}(X), d)$.

Věta (Hutchinson, 1981).

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_k : \; X \to X$$

jsou na metrickém prostoru (X, ϱ) kontraktivní.

Pak je zobrazení

$$F : \; \mathbb{H}(X) \to \mathbb{H}(X)$$

definované předpisem

$$F(M) := \bigcup_{m=1}^{k} f_m(M) = \bigcup_{m=1}^{k} \{f_m(x) : \; x \in M\}$$

kontraktivní na prostoru $(\mathbb{H}(X), d)$.

Důsledek.

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_k : \; X \to X$$

jsou kontraktivní na úplném metrickém prostoru (X, ϱ).

Důsledek.

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_k : \ X \to X$$

jsou kontraktivní na úplném metrickém prostoru (X, ϱ).

Důsledek.

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \ldots, f_k: \; X \to X$$

jsou kontraktivní na úplném metrickém prostoru (X, ϱ).

Pak existuje právě jedna množina $B \in \mathbb{H}(X)$ taková, že

$$B = F(B) := \bigcup_{m=1}^{k} f_m(B).$$

Důsledek.

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \ldots, f_k : \; X \to X$$

jsou kontraktivní na úplném metrickém prostoru (X, ϱ).

Pak existuje právě jedna množina $B \in \mathbb{H}(X)$ taková, že

$$B = F(B) := \bigcup_{m=1}^{k} f_m(B).$$

Navíc. Definujeme-li pro libovolné $B_0 \in \mathbb{H}(X)$ posloupnost (B_n) v $\mathbb{H}(X)$ rekurzí

$$B_n = F(B_{n-1}),$$

Důsledek.

Nechť zobrazení

$$f_1, f_2, \dots, f_k : \ X \to X$$

jsou kontraktivní na úplném metrickém prostoru (X, ϱ).

Pak existuje právě jedna množina $B \in \mathbb{H}(X)$ taková, že

$$B = F(B) := \bigcup_{m=1}^{k} f_m(B).$$

Navíc. Definujeme-li pro libovolné $B_0 \in \mathbb{H}(X)$ posloupnost (B_n) v $\mathbb{H}(X)$ rekurzí

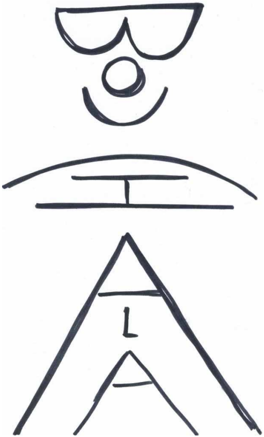
$$B_n = F(B_{n-1}),$$

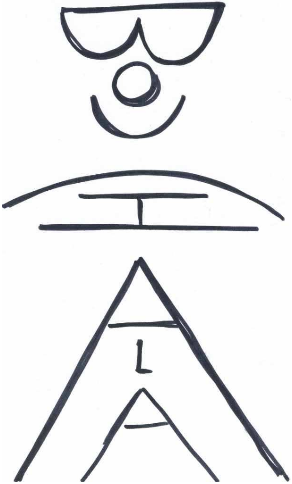
platí

$$B_n \to B \ \text{ v } \ (\mathbb{H}(X), d).$$

Fraktály

Fraktály





Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}(\mathbb{R})$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

Buď zobrazení $F : \mathbb{H}(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}(\mathbb{R})$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \left\{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=: f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=: f_2(x)} \right\} \quad \text{a zvolme} \quad B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}).$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}(\mathbb{R})$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=: f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=: f_2(x)} \} \text{ a zvolme } B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}).$$

Pak

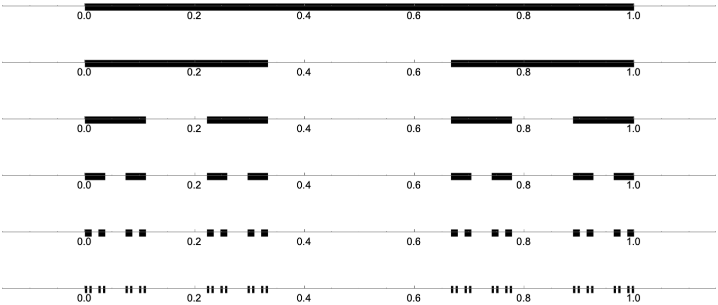
$$F(B_0), F(\underbrace{F(B_0)}_{=B_1}), F(\underbrace{F(F(B_0))}_{=B_2}), \dots \to B = F(B) \text{ ... Cantorovo diskontinuum.}$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x\in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \ B_0 = \langle 0, 1 \rangle.$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \; B_0 = \langle 0, 1 \rangle.$$

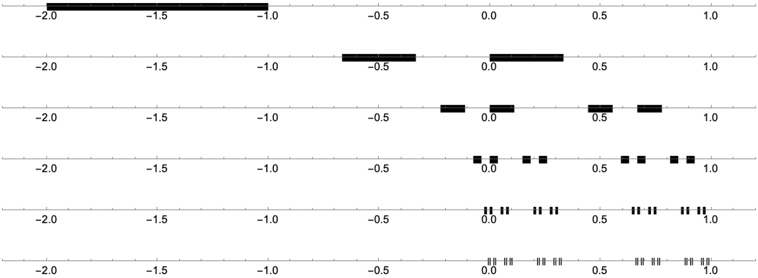


Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \;\; B_0 = \langle -2, -1 \rangle.$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \; B_0 = \langle -2, -1 \rangle.$$

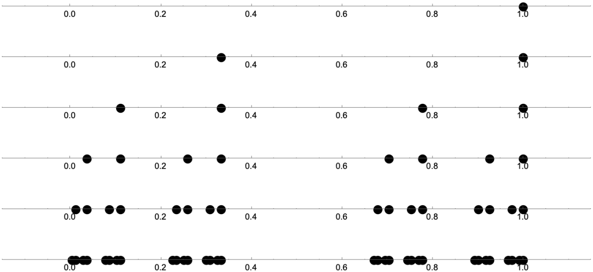


Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \ B_0 = \{1\}.$$

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum).

$$F(M) := \bigcup_{x \in M} \{ \underbrace{\tfrac{1}{3}x}_{=:f_1(x)}, \underbrace{\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{=:f_2(x)} \}, \; B_0 = \{1\}.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x,\, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3},\, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x,\, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3},\, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \right\}$$

Příklad 2 (Cantorův prach).

Buď zobrazení $F : \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\}$$

a zvolme

$$B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^2).$$

Příklad 2 (Cantorův prach).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \right\}$$

a zvolme

$$B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^2).$$

Pak

$$B_n = F(B_{n-1}) \to B = F(B) \text{ ... Cantorův prach.}$$

Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=: f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=: f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=: f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=: f_4(x,y)} \Big\},$$

Příklad 2 (Cantorův prach).

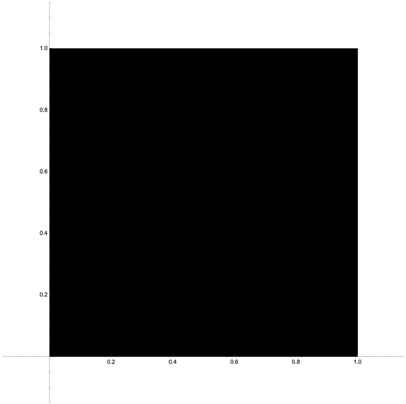
$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x,\, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3},\, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x,\, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3},\, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$

Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

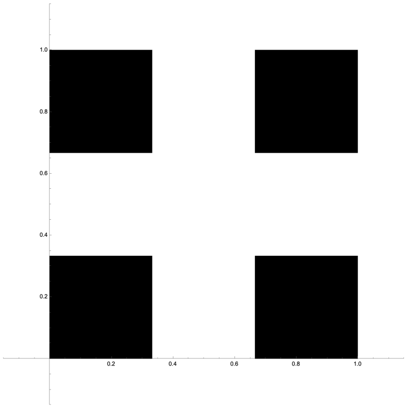
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

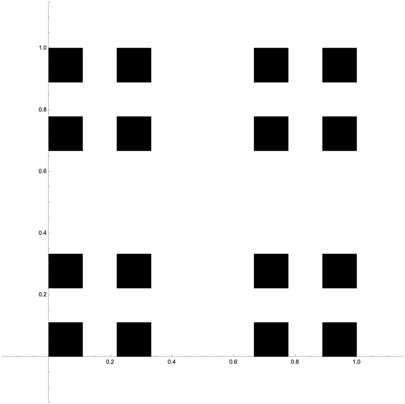
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

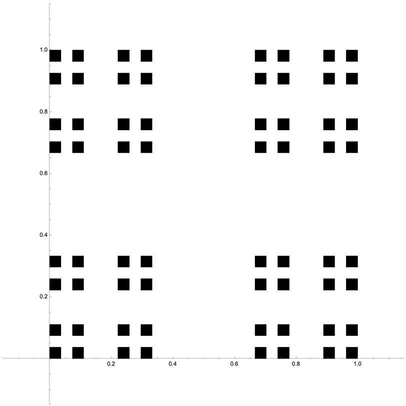
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

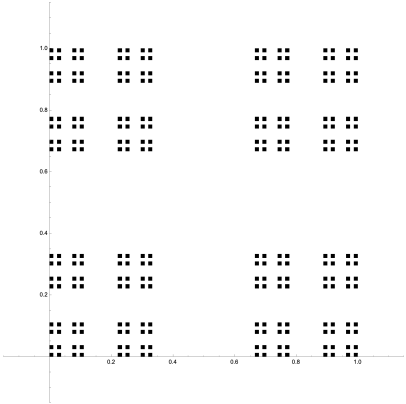
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

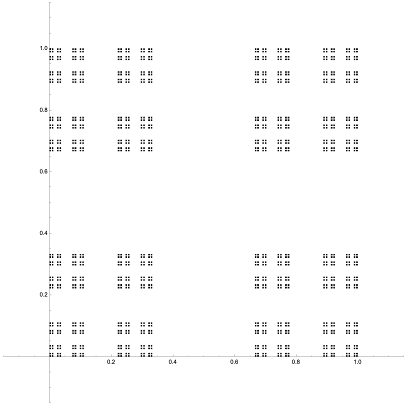
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 2 (Cantorův prach).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_3(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y + \tfrac{2}{3}\right)}_{=:f_4(x,y)} \Big\},$$

$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \right\}$$

Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

Buď zobrazení $F: \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \right\}$$

a zvolme

$$B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^2).$$

Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

Buď zobrazení $F : \mathbb{H}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{H}(\mathbb{R}^2)$ definováno předpisem

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \right\}$$

a zvolme

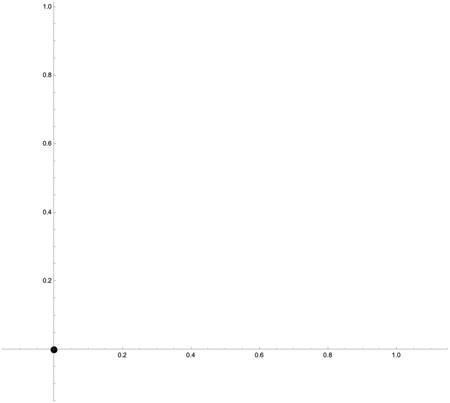
$$B_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^2).$$

Pak

$$B_n = F(B_{n-1}) \to B = F(B) \text{ ... Sierpińského trojúhelník.}$$

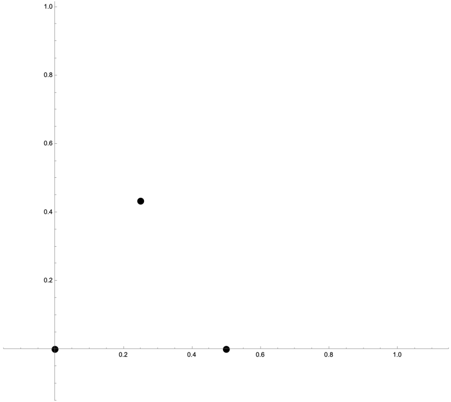
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\}, \ B_0 = \{(0,0)\}.$$



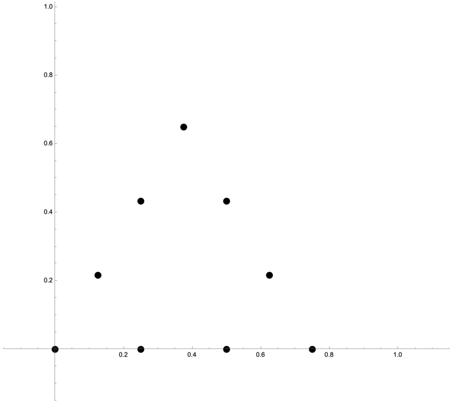
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},\ B_0 = \{(0,0)\}.$$



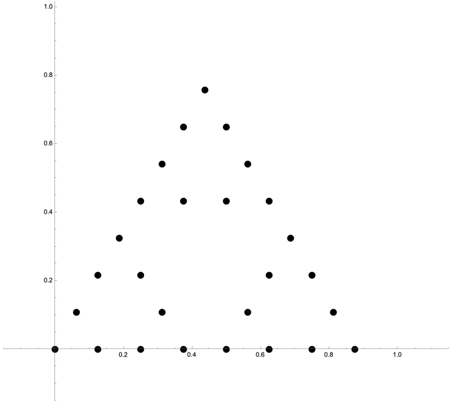
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x,\, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \right\},\ B_0 = \{(0,0)\}.$$



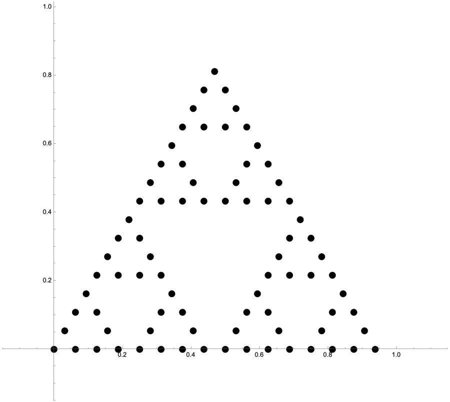
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\}, \;\; B_0 = \{(0,0)\}.$$



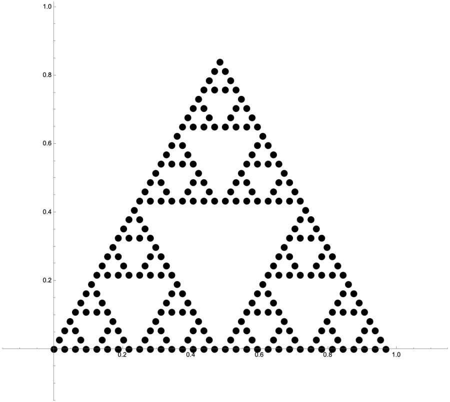
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x,\, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},\ B_0 = \{(0,0)\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

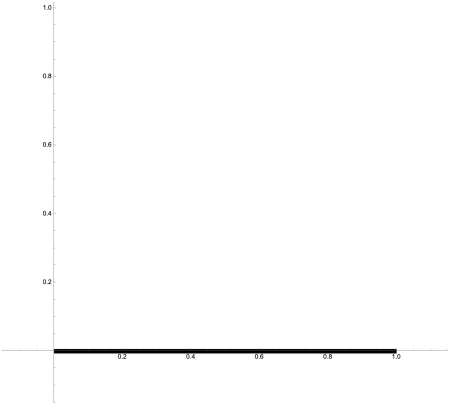
$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\}, \ B_0 = \{(0,0)\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

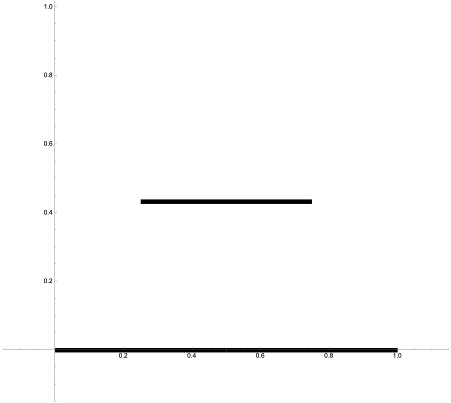
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

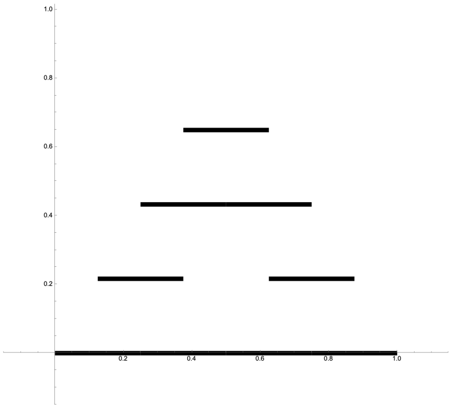
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

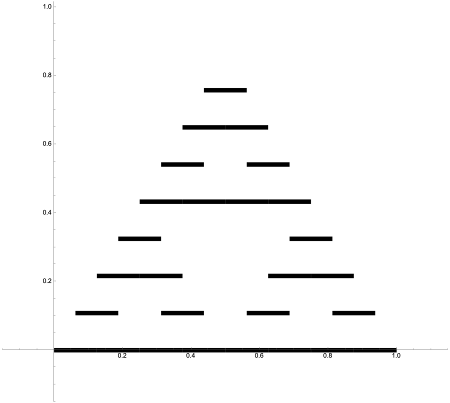
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \left\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \right\},$$

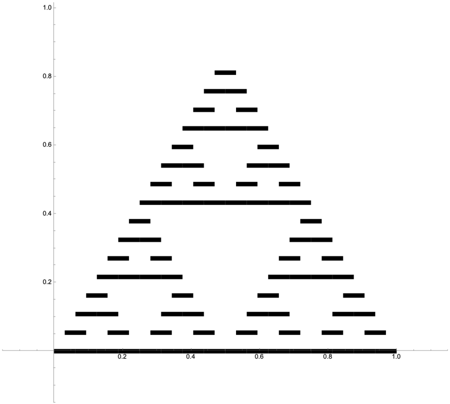
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

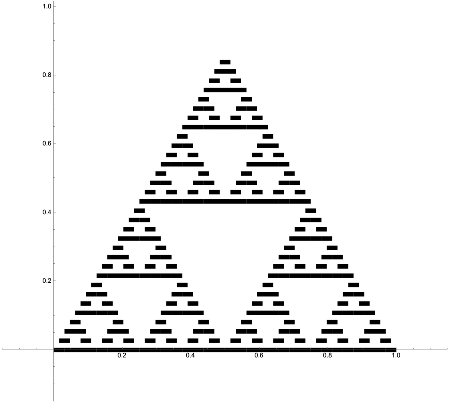
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

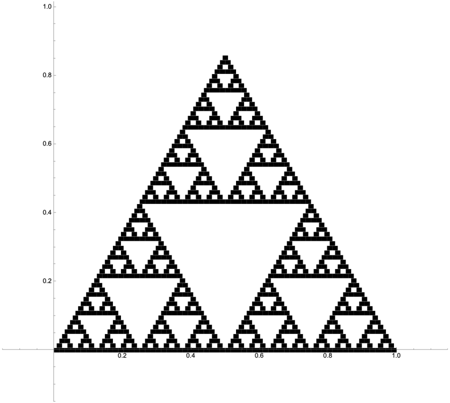
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



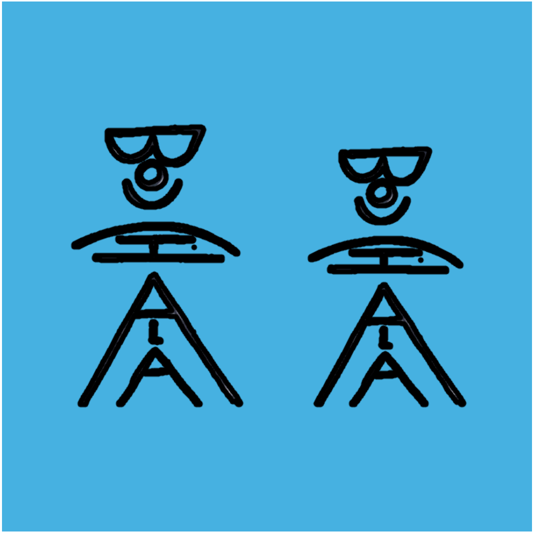
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).

$$F(M) := \bigcup_{(x,y)\in M} \Big\{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_1(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}y\right)}_{=:f_2(x,y)}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}_{=:f_3(x,y)} \Big\},$$

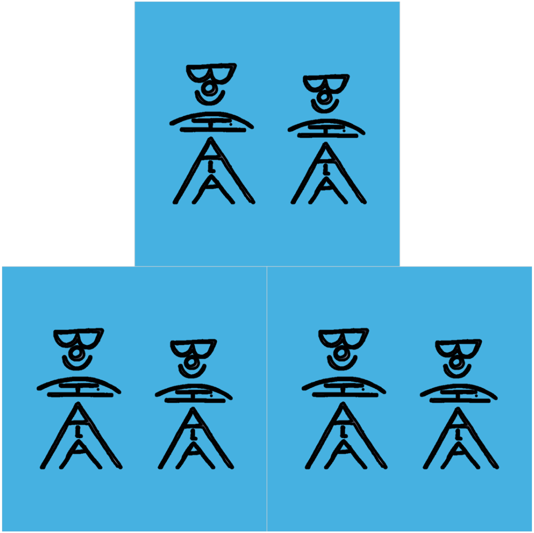
$$B_0 = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}.$$



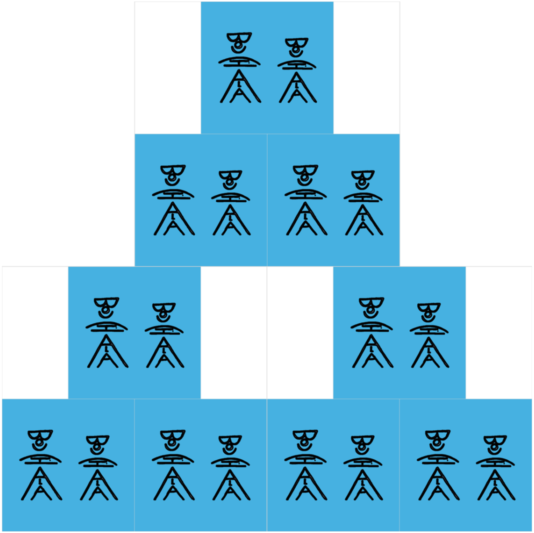
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).



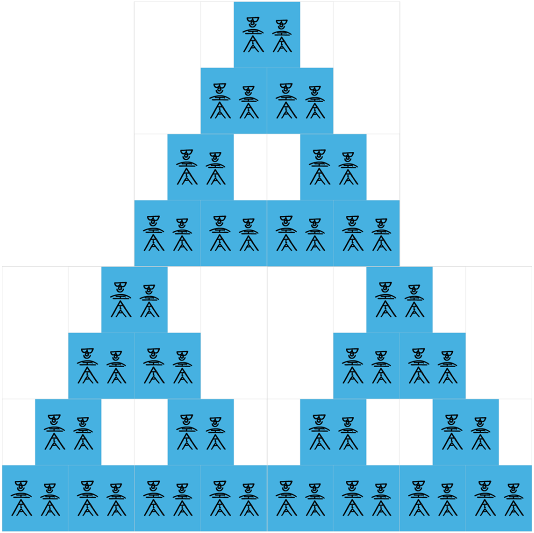
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).



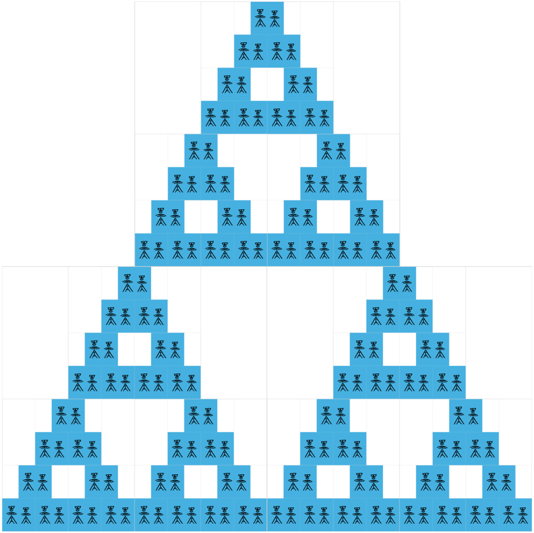
Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).



Příklad 3 (Sierpińského trojúhelník).



128

128

Hlavo-lam

47

47

Jedenáctka informatika Klabzuby

15

15

Kouzelnik

58

58

Kružnice v koňské metrice

Triptych - Kuželosečkářovi

119

119

119

Parabolik

120

120

120

Hyperbolička

121

121

121

Elipsačata

Literatura

John Hutchinson
Fractals and Self Similarity
Indiana Univ. Math. J., 1981

Literatura

John Hutchinson
Fractals and Self Similarity
Indiana Univ. Math. J., 1981

Gerald Edgar
Measure, Topology, and Fractal Geometry
Springer, 2008

Literatura

- John Hutchinson
  Fractals and Self Similarity
  Indiana Univ. Math. J., 1981
- Gerald Edgar
  Measure, Topology, and Fractal Geometry
  Springer, 2008
- Václav Kučera
  Introduction to chaotic dynamical systems and fractal geometry
  XXXII Seminar in Differential Equations, Alfrédov, 2022

Literatura

John Hutchinson
Fractals and Self Similarity
Indiana Univ. Math. J., 1981

Gerald Edgar
Measure, Topology, and Fractal Geometry
Springer, 2008

Václav Kučera
Introduction to chaotic dynamical systems and fractal geometry
XXXII Seminar in Differential Equations, Alfrédov, 2022

Ondřej Bouchala
`F r a k t á l y`
Seminář OSMA, 2020,
am.vsb.cz/osma

Literatura

- John Hutchinson
  Fractals and Self Similarity
  Indiana Univ. Math. J., 1981
- Gerald Edgar
  Measure, Topology, and Fractal Geometry
  Springer, 2008
- Václav Kučera
  Introduction to chaotic dynamical systems and fractal geometry
  XXXII Seminar in Differential Equations, Alfrédov, 2022
- Ondřej Bouchala
  `Fraktály`
  Seminář OSMA, 2020, am.vsb.cz/osma

MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)