

O JISTÝCH KOMBINATORICKÝCH ÚLOHÁCH

Jiří Fiala

Katedra aplikované matematiky MFF UK

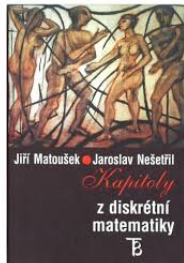


UČEBNICOVÁ ÚLOHA

Kolika způsoby lze rozestavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

Vodníci jsou navzájem nerozeznatelní, a stejně tak i čarodějnice.

[Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil:
Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum]



Řadou zde rozumíme uspořádání od první pozice po dvanáctou (zleva doprava), tedy následující rozestavení je bráno jako odlišné.



ŘEŠENÍ

Rozestavíme 7 čarodějnic, získáme 8 pozic pro vodníky



Z těchto 8 pozic vybereme 5, což je $\binom{8}{5} = 56$ možností.

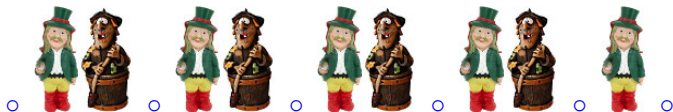


Na neobsazené pozice zapomeneme.



ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ, PONĚKUD SLOŽITĚJŠÍ

Rozestavíme vodníky a mezi ně 4 čarodějnice.
Zbývají 3 čarodějnice, pro které máme 6 míst.



Na jednom místě nemusí přibýt žádná čarodějnice,
ale také jich může přibýt víc. To je $\binom{3+5}{3} = 56$ možností.



VARIANTA S RŮZNÝMI POSTAVAMI

Kolika způsoby lze rozestavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe, ale *všechny postavy jsou navzájem rozeznatelné*?



ŘEŠENÍ

Každou z 56 možností rozestavení nerozeznatelných postav



lze rozšířit 5! způsoby tak, že nejprve rozlišíme vodníky,



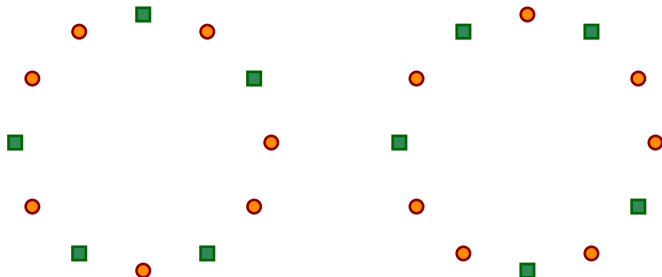
a poté 7! způsoby rozlišíme i čarodějnice.



Možných rozestavení je $56 \cdot 5! \cdot 7! = 33\,868\,800$.

VARIANTA S ROZESTAVENÍM DO KRUHU

Kolika způsoby lze rozestavit 5 stejných vodníků a 7 stejných čarodějnic *do kruhu* tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

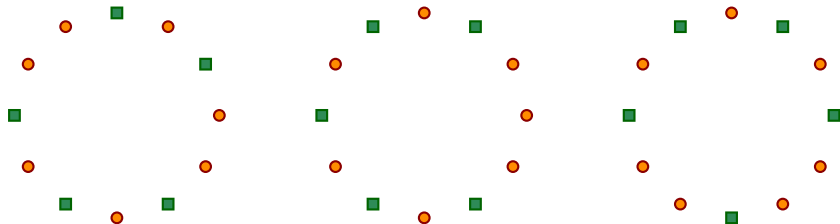


Dvě rozestavení *do kruhu* považujeme za shodná, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace (osové souměrnosti neuvažujeme).

ŘEŠENÍ

Nejprve postavíme čarodějnice do kruhu a doplníme vodníky do vybraných pěti mezer. Těchto možností je $\binom{7}{5} = 21$.

V tomto počtu jsou ovšem některé (ve skutečnosti všechny) způsoby započteny vícekrát. Kruh čarodějnic nemá žádnou jednoznačnou „první“ mezeru. Tuto „první“ mezeru si můžeme vybrat sedmi způsoby a tedy každé rozmístění je zvoleno sedmkrát. Různých rozmístění je $\frac{21}{7} = 3$:



DALŠÍ VARIANTA S KRUHEM

Kolika způsoby lze rozestavit 5 stejných vodníků a 10 stejných čarodějnic do kruhu tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

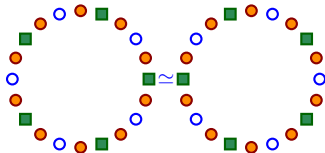
ŘEŠENÍ:

Podobně jako v předchozím případě spočteme nejprve všechna rozmístění, těch je $\binom{10}{5} = 252$ a pak budeme počítat ty vícekrát započtené.

Evidentně neprojde vydělení počtu všech kombinací 10 za volbu „první“ mezery, výsledek by *nebyl celočíselný*.

Jedno z možných rozmístění je totiž zopakováno jen dvakrát:

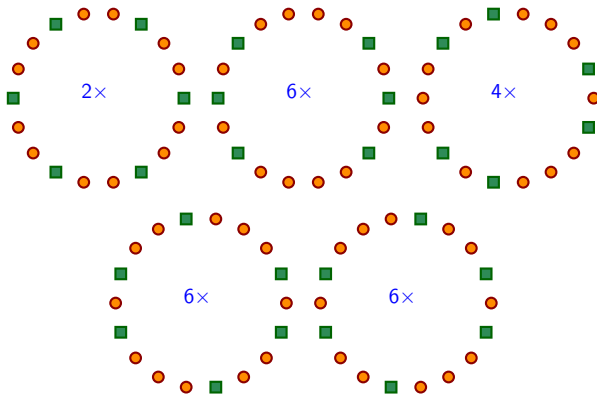
Možných rozmístění je $\frac{250}{10} + \frac{2}{2} = 26$.



PROZATÍM POSLEDNÍ VARIANTA ...

Kolika způsoby lze rozestavit 6 stejných vodníků a 12 stejných čarodějnic do kruhu tak, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

ŘEŠENÍ: Rozmístění je $\binom{12}{6} = 924$. Různá jsou započtena $12\times$, kromě:



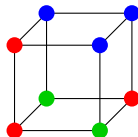
Různých rozmístění je $\frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{6+6+6}{6} + \frac{900}{12} = 80$.

TĚŽŠÍ ÚLOHA TÉHOŽ TYPU

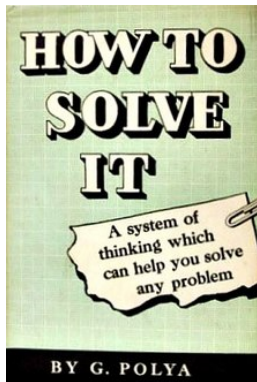
Kolika různými způsoby lze obarvit vrcholy krychle nejvýše třemi barvami: červenou, modrou a zelenou?

Kolik z těchto obarvení má tři vrcholy červené, tři modré a dva zelené?

Za stejná obarvení bereme ta, která se liší jen natočením krychle.



JAK TO ŘEŠIT?



1. vydání, Princeton
Univ. Press, 1944



George Pólya
1887–1985



1. české vydání,
Matfyzpress, 2016

JAK ŘEŠIT MATEMATICKOU ÚLOHU

POROZUMĚNÍ ÚLOZE

Za první.

Musíte porozumět úloze.

Co je zde neznámá? Jaké jsou údaje? Jaké jsou podmínky?

Je možné vyhovět podmínkám? Jsou podmínky dostatečné pro určení neznámé? Nebo jsou nedostačující? Nebo nadbytečné? Nebo obsahují rozpor?

Nakreslete si obrázek. Zaveďte vhodné označení.

Oddělte od sebe různé podmínky. Umíte je zapsat?

NAVRŽENÍ PLÁNU ŘEŠENÍ

Za druhé.

Najděte souvislosti mezi údaji a neznámou.

Možná budete muset vyřešit pomocné úlohy, pokud bezprostřední souvislost nelze najít. Nakonec budete muset sestavit *plán* řešení.

Už jste viděli úlohu předtím? Nebo jste ji viděli v trochu jiném tvaru?

Znáte nějakou příbuznou/podobnou úlohu? Znáte nějakou větu, která by mohla být užitečná?

Podívejte se na neznámou! A zkuste přemýšlet o všeobecně známé úloze mající tutéž nebo podobnou neznámou.

Tady je úloha příbuzná té vaší, která již byla vyřešena. Můžete ji využít? Můžete využít její výsledek? Můžete použít její metodu?

Uměli byste zavést nějaký pomocný prvek, abyste takové využití umožnili? Umíte úlohu přeformulovat? Můžete ji přeformulovat ještě jednou?

Vraťte se k definicím.

Jestliže nemůžete vyřešit předloženou úlohu, pokuste se vyřešit nějakou příbuznou úlohu. Umíte si představit nějakou přístupnější příbuznou úlohu? Nebo obecnější úlohu? Speciálnější úlohu? Analogickou úlohu? Umíte vyřešit aspoň část úlohy? Uvažujte pouze část z daných podmínek a vynechejte jejich další části. Nakolik je pak neznámá určena, a jak se může měnit? Umíte odvodit něco užitečného z daných údajů? Umíte si představit jiné údaje, vhodné pro určení neznámé? Můžete změnit neznámou nebo údaje, nebo v případě nutnosti obojí tak, že nová neznámá a nové údaje mají k sobě blíže?

Využili jste všechny údaje? Využili jste všechny podmínky? Vzali jste v úvahu všechny podstatné pojmy použité v úloze?

REALIZACE PLÁNU

Za třetí.

Realizujte svůj plán.

Při realizaci vašeho plánu řešení *překontrolujte každý krok.*

Vidíte jasně, že tento krok je správný? Umíte dokázat, že je správný?

POHLED ZPĚT

Za čtvrté.

Přezkoušejte nalezené řešení.

Umíte *překontrolovat výsledek*? Umíte zkontrolovat důkaz?

Umíte stejný výsledek získat jinak? Vidíte to na první pohled?

Umíte použít výsledek nebo metodu na vyřešení jiné úlohy?

JAK POROZUMĚT ZADÁNÍ ÚLOHY?

Obarvení je přiřazení barev vrcholům. Budeme na ně nahlížet jako na zobrazení a z množiny V (vrcholů) do množiny B (barev). Označíme S množinu všech obarvení a , tedy $S = \{a \mid a : V \rightarrow B\}$.

Dvě obarvení jsou shodná pokud jedno lze převést na druhé geometrickou transformací krychle.

Transformace jsou i (vybrané) permutace množiny V . Lze je skládat, invertovat a obsahují identitu, tvoří tedy **grupu** G .

Každá permutace π množiny vrcholů V způsobí i permutaci na množině obarvení S . Využijeme symbol π i pro transformace obarvení. Pak $\pi(a)$ je obarvení, vzniklé transformací π obarvení a .

Obarvení a a b jsou shodná, existuje-li $\pi \in G$ takové, že $\pi(a) = b$.

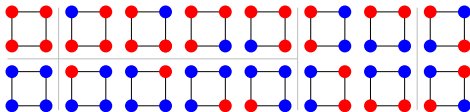
Množina obarvení shodných s obarvením a je $S_a = \{\pi(a) : \pi \in G\}$.

Neznámá: počet různých obarvení, neboli počet různých množin S_a . Neznámou označíme $\#S_a = |\{S_a : a \in S\}|$.

JAK SPOLU SOUVISEJÍ OBARVENÍ A TRANSFORMACE?

Zkusme jednodušší úlohu: obarvení čtverce dvěma barvami.

Všech obarvení je
 $|B|^{|V|} = 2^4 = 16$,
z toho 6 různých.



Možných transformací čtverce je 8:

- ▶ identita id ,
- ▶ rotace o 90° , resp. o -90° ,
- ▶ středová souměrnost , neboli rotace o 180° ,
- ▶ dvě osové souměrnosti podle os protilehlých stran , ,
- ▶ dvě osové souměrnosti podle úhlopříček , .

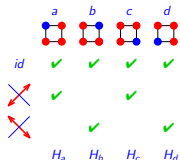
KTERÉ TRANSFORMACE ZACHOVÁVAJÍ OBARVENÍ?

																
<i>id</i>	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	✓															✓
	✓															✓
	✓															✓
	✓															✓
	✓															✓
	✓															✓
	✓	✓		✓												✓
	✓		✓		✓											✓

V každém bloku je osm symbolů ✓, t.j. tolik jako transformací!

$$|\{(\pi, a) : \pi(a) = a\}| = |G| \cdot \#S_a \implies \#S_a = \frac{|\{(\pi, a) : \pi(a) = a\}|}{|G|}$$

PROČ JE V KAŽDÉM BLOKU OSM SYMBOLŮ ✓?



Transformace ve sloupci zachovávají obarvení, tvoří *podgroupy* H_i grupy G :

$$H_a = H_c = \{id, \text{red X}\}$$

$$H_b = H_d = \{id, \text{blue X}\}$$

Podgrupa H_a určuje rozdělení grupy G na stejně velké *kosety*, čili každou $\pi \in G$ lze složit z $\tau \in H_a$ a vhodné rotace:

$$a \rightarrow a$$

$$a \rightarrow b$$

$$a \rightarrow c$$

$$a \rightarrow d$$

$H_a = idH_a$	$\boxed{\text{blue X}} H_a = \{\boxed{\text{blue X}}, \text{blue } \leftrightarrow\}$	$\text{red X} H_a = \{\text{red X}, \text{red X}\}$	$\boxed{\text{blue X}} H_a = \{\boxed{\text{blue X}}, \text{blue } \updownarrow\}$
$id \circ id = id$	$\boxed{\text{blue X}} \circ id = \boxed{\text{blue X}}$	$\text{red X} \circ id = \text{red X}$	$\boxed{\text{blue X}} \circ id = \boxed{\text{blue X}}$
$id \circ \text{red X} = \text{red X}$	$\boxed{\text{blue X}} \circ \text{red X} = \text{blue } \leftrightarrow$	$\text{red X} \circ \text{red X} = \text{red X}$	$\boxed{\text{blue X}} \circ \text{red X} = \text{blue } \updownarrow$

Každou $\pi \in G$ lze také složit z rotace a $\tau \in H_i$ pro příslušné i :

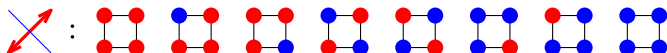
H_a	$H_b \boxed{\text{blue X}} = \{\boxed{\text{blue X}}, \text{blue } \leftrightarrow\}$	$H_c \text{red X} = \{\text{red X}, \text{red X}\}$	$H_d \boxed{\text{blue X}} = \{\boxed{\text{blue X}}, \text{blue } \updownarrow\}$
$id \circ id = id$	$id \circ \boxed{\text{blue X}} = \boxed{\text{blue X}}$	$id \circ \text{red X} = \text{red X}$	$id \circ \boxed{\text{blue X}} = \boxed{\text{blue X}}$
$\text{red X} \circ id = \text{red X}$	$\text{red X} \circ \boxed{\text{blue X}} = \text{blue } \leftrightarrow$	$\text{red X} \circ \text{red X} = \text{red X}$	$\text{red X} \circ \boxed{\text{blue X}} = \text{blue } \updownarrow$

Podgroupy H_i jsou stejně velké a je jich stejně jako kosetů H_a v G .

KOLIK JE V TABULCE CELKEM SYMBOLŮ ✓?

<i>id</i>	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	16	
	✓																✓	2
	✓																✓	2
	✓									✓	✓						✓	4
	✓						✓		✓								✓	4
	✓					✓		✓									✓	4
	✓	✓		✓						✓	✓	✓		✓			✓	8
	✓		✓		✓					✓	✓		✓		✓		✓	8

Pro jedno z $\pi \in G$ konkrétně:



Vrcholy $u, v \in V$ takové, že $\pi(u) = v$ musejí mít stejnou barvu.

Proto π zachová 2^c obarvení, kde c je počet cyklů permutace π .

ORBIT COUNTING THEOREM

Cauchyho–Frobeniova věta (1845/1887), Burnsideovo lemma:

$$\begin{aligned}\#S_a &= \frac{1}{|G|} \sum_{a \in S} |\{\pi : \pi(a) = a\}| \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\{a : \pi(a) = a\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |B|^{c(\pi)}\end{aligned}$$

... vhodné tehdy, je-li transformací podstatně méně než obarvení.



Augustin-Louis
Cauchy
1759–1857



Ferdinand Georg
Frobenius
1849–1917

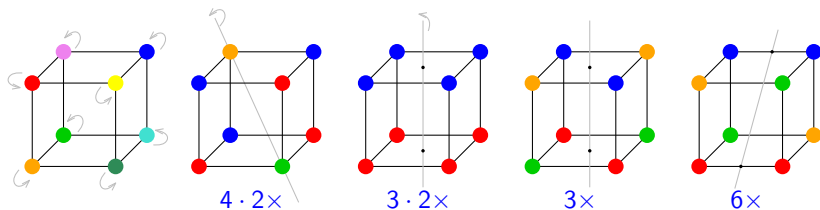


William Burnside
1852–1927

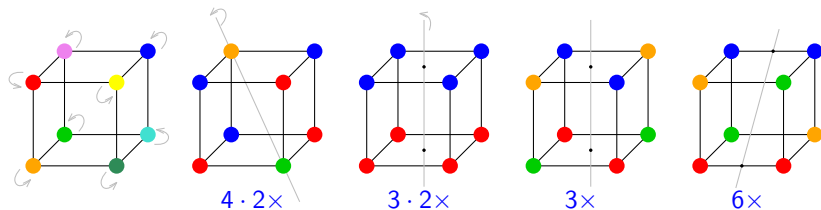
TRANSFORMACE KRYCHLE

Krychle má 24 transformací:

- 1 identitu s 8 cykly
- 4 · 2 rotací okolo tělesových úhlopříček o $\pm 120^\circ$ se 4 cykly
- 3 · 2 rotací okolo os protilehlých stěn o $\pm 90^\circ$ se 2 cykly
- 3 osové souměrnosti okolo os protilehlých stěn se 4 cykly
- 6 osových souměrností okolo os protilehlých hran se 4 cykly



POČTY OBARVENÍ KRYCHLE



Transformace: $1 \times$ s 8 cykly, $17 \times$ se 4 cykly a $6 \times$ s 2 cykly.

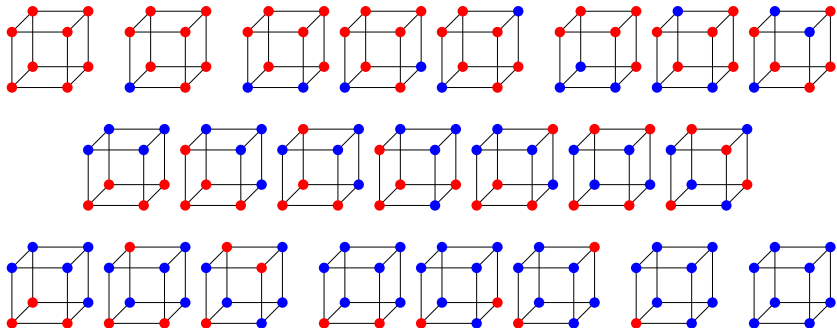
$$\begin{aligned} \#S_a &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |B|^{c(\pi)} = \\ &= \frac{1}{24} (|B|^8 + 17|B|^4 + 6|B|^2) \end{aligned}$$

Z 6561 obarvení krychle nejvýše třemi barvami je 333 různých.

$ B $	$ S = B ^8$	$\#S_a$
2	256	23
3	6561	333
4	65536	2916
5	390625	16725
6	1679616	70911
7	5764801	241913
8	16777216	701968

ZKOUŠKA PRO $n = 2$

$$\frac{1}{24} (2^8 + 17 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = \frac{256 + 272 + 24}{24} = 23$$

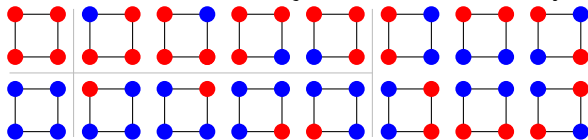


JAK NA PŘEDEPSANÉ POČTY BAREV?

Všech 2^4 obarvení čtverce roztřídíme do skupin podle počtu barev, dosadíme-li za 2 (počet možností) výraz $c + m$ (konkrétní barvy):

$$(c + m)^4 = 1c^4 + 4c^3m^1 + 6c^2m^2 + 4c^1m^3 + 1m^4$$

Koeficient u $c^i m^{4-i}$ udává, kolik je obarvení s i červenými vrcholy.



Identita zachová všech 16, t.j. $(c + m)^4$ obarvení.

U ostatních transformací je třeba zohlednit i délky cyklů, např.:



$$(c + m)(c^2 + m^2)(c + m) = 1c^4 + 2c^3m^1 + 2c^2m^2 + 2c^1m^3 + 1m^4$$

VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE PRO OBARVENÍ ČTVERCE

Transformace čtverce:

id — 4 cykly délky 1 $(c + m)^4$

 — 1 cyklus délky 4 $2(c^4 + m^4)$

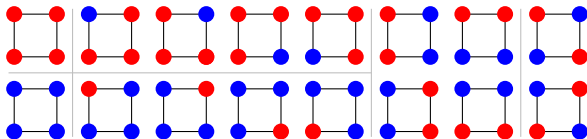
 — 2 cykly délky 2 $(c^2 + m^2)^2$

 — 2 cykly délky 2 $2(c^2 + m^2)^2$

 — 2 cykly délky 1 a 1 délky 2 $2(c + m)^2(c^2 + m^2)$

$$(c + m)^4 + 2(c^4 + m^4) + 3(c^2 + m^2)^2 + 2(c + m)^2(c^2 + m^2)$$

$$= 8(c^4 + c^3m^1 + 2c^2m^2 + c^1m^3 + m^4)$$



REDFIELDOVA–PÓLYOVA VĚTA (1927/1937)

Výraz $(c + m)^4 + 2(c^4 + m^4) + 3(c^2 + m^2)^2 + 2(c + m)^2(c^2 + m^2)$ je vybudován z dvojčlenů $c^d + m^d$. Označme $x_d = c^d + m^d$.

Pak $(c + m)^4 + 2(c^4 + m^4) + 3(c^2 + m^2)^2 + 2(c + m)^2(c^2 + m^2) = x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2$. Tento polynom závisí jen na délce cyklů permutací z G a lze jej použít i pro obarvení více barvami:

VĚTA: Necht' G je permutační grupa působící na množině V .

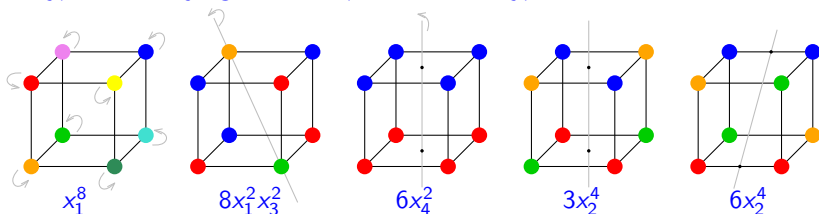
Pro $\pi \in G$ s cykly délek $d_1, \dots, d_t$, položme $x(\pi) = x_{d_1} \cdots x_{d_t}$.

Vytvořující funkci pro obarvení množiny V barvami $B = \{1, \dots, k\}$ dostaneme dosazením $x_d = (b_1^d + \cdots + b_k^d)$ do mnohočlenu

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x(\pi)$$

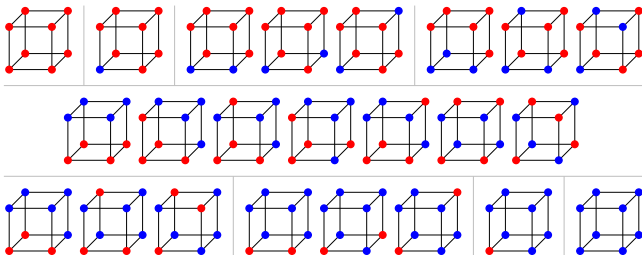
Koeficient u $b_1^{i_1} \cdots b_k^{i_k}$ udává počet obarvení takových, že jsou různá vzhledem ke G a přitom pro každou barvu $j \in B$ platí, že je použita právě i_j -krát.

OBARVENÍ KRYCHLE DVĚMA BARVAMI



$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x(\pi) = \frac{1}{24} (x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 6x_4^2 + 9x_2^4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} ((c+m)^8 + 8(c+m)^2(c^3+m^3)^2 + 6(c^4+m^4)^2 + 9(c^2+m^2)^4) = \\ = c^8 + c^7m + 3c^6m^2 + 3c^5m^3 + 7c^4m^4 + 3c^3m^5 + 3c^2m^6 + cm^7 + m^8 \end{aligned}$$



OBARVENÍ KRYCHLE TŘEMI BARVAMI

$$\begin{aligned} & \frac{1}{24} \left((c + m + z)^8 + 8(c + m + z)^2(c^3 + m^3 + z^3)^2 + \right. \\ & \quad \left. + 6(c^4 + m^4 + z^4)^2 + 9(c^2 + m^2 + z^2)^4 \right) = \\ & = c^8 + c^7m + 3c^6m^2 + 3c^5m^3 + 7c^4m^4 + 3c^3m^5 + 3c^2m^6 + \\ & \quad + cm^7 + m^8 + c^7z + 3c^6mz + 7c^5m^2z + 13c^4m^3z + 13c^3m^4z + \\ & \quad + 7c^2m^5z + 3cm^6z + m^7z + 3c^6z^2 + 7c^5mz^2 + 22c^4m^2z^2 + \\ & \quad + 24c^3m^3z^2 + 22c^2m^4z^2 + 7cm^5z^2 + 3m^6z^2 + 3c^5z^3 + 13c^4mz^3 + \\ & \quad + 24c^3m^2z^3 + 24c^2m^3z^3 + 13cm^4z^3 + 3m^5z^3 + 7c^4z^4 + \\ & \quad + 13c^3mz^4 + 22c^2m^2z^4 + 13cm^3z^4 + 7m^4z^4 + 3c^3z^5 + 7c^2mz^5 + \\ & \quad + 7cm^2z^5 + 3m^3z^5 + 3c^2z^6 + 3cmz^6 + 3m^2z^6 + cz^7 + mz^7 + z^8 \end{aligned}$$

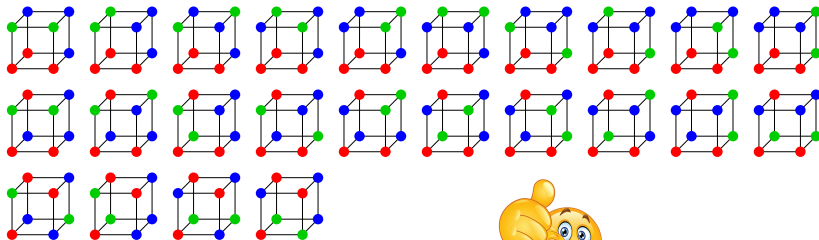
Koeficient u $c^3m^3z^2$ odpovídá různým obarvením krychle se třemi vrcholy červenými, třemi modrými a dvěma zelenými.

NE AŽ TAK TĚŽKÁ ÚLOHA TÉHOŽ TYPU

Kolika způsoby lze obarvit vrcholy krychle nejvýše třemi barvami?

Kolik obarvení má tři vrcholy červené, tři modré a dva zelené?

ODPOVĚď: Jen 24 z 333 možných obarvení krychle nejvýše třemi barvami má tři vrcholy červené, tři modré a dva zelené.



LITERATURA:

Alan Tucker: *Polya's enumeration formula by example*,
Mathematics Magazine **47** (5), 1974, str. 248–256.

„Indeed, when Professor Polya taught part of the combinatorial mathematics course at Stanford (for which this author was a teaching assistant), he omitted a proof of his formula and gave only examples.“