

K čemu je dobrý logaritmus

Jiří Bouchala



VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

KATEDRA
APLIKOVANÉ
MATEMATIKY

18. srpna 2026

XXII. seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky
Gymnázium Velké Meziříčí



Logaritmus v průběhu ročních období



Logaritmus v průběhu ročních období

Youngova
nerovnost

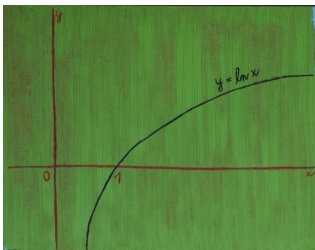
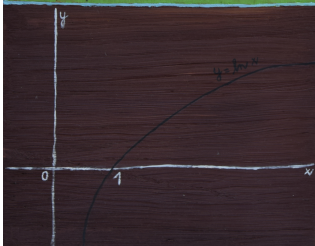
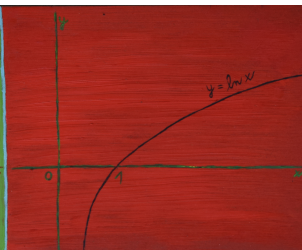
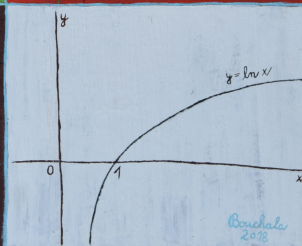
Logaritmus v průběhu ročních období

Youngova
nerovnostAG
nerovnost

Logaritmus v průběhu ročních období

Youngova
nerovnostAG
nerovnostSoučet převrácených
hodnot prvočísel

Logaritmus v průběhu ročních období

Youngova
nerovnostAG
nerovnostSoučet převrácených
hodnot prvočíselSoučet převrácených
hodnot prvočíselných dvojčat

Věta. (Youngova nerovnost)

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a necht' $a, b \in (0, +\infty)$.

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a nechť $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a nechť $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a nechť $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab)$$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a necht' $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a necht' $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q)$$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a nechť $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

Věta. (Youngova nerovnost)

Nechť $p, q \in (1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a necht' $a, b \in (0, +\infty)$.

Pak platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \leq \ln \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

a proto

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Věta. (AG nerovnost)

Věta. (AG nerovnost)

Pro každou n -tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

Věta. (AG nerovnost)

Pro každou n -tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, je-li

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Důkaz AG nerovnosti.

Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$

tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Důkaz AG nerovnosti.

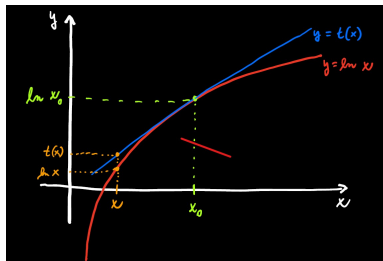
Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$

tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.



Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

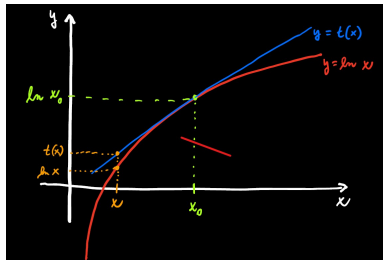
a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$

tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x)$$



Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

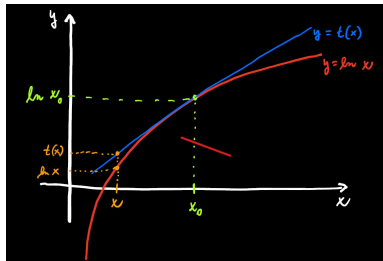
a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$

tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x) \text{ (a rovnost nastane právě tehdy, je-li } x = x_0),$$



Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$

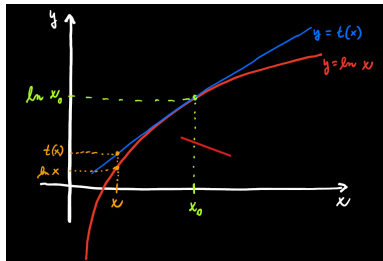
tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x) \text{ (a rovnost nastane právě tehdy, je-li } x = x_0),$$

a proto

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \ln x_i \leq t(x_i),$$



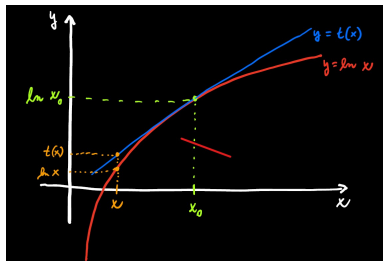
Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$



tečna sestavená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x) \text{ (a rovnost nastane právě tehdy, je-li } x = x_0),$$

a proto

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \ln x_i \leq t(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n t(x_i)$$

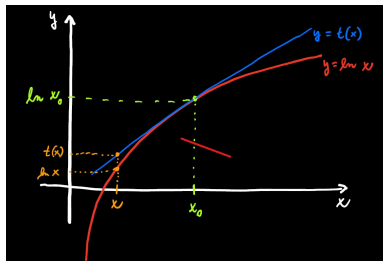
Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$



tečna sestrojená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x) \text{ (a rovnost nastane právě tehdy, je-li } x = x_0),$$

a proto

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \ln x_i \leq t(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n t(x_i) = \sum_{i=1}^n [\ln(x_0) + k(x_i - x_0)]$$

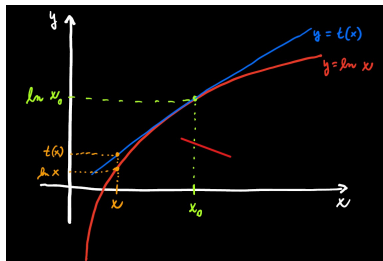
Důkaz AG nerovnosti.

Označme

$$x_0 := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

a buď

$$y = t(x) = \ln(x_0) + k(x - x_0)$$



tečna sestavená ke grafu funkce $y = \ln(x)$ v bodě $(x_0, \ln(x_0))$.

Pak - protože funkce $y = \ln x$ je ryze konkávní - platí

$$\forall x > 0 : \ln x \leq t(x) \text{ (a rovnost nastane právě tehdy, je-li } x = x_0),$$

a proto

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : \ln x_i \leq t(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq \sum_{i=1}^n t(x_i) = \sum_{i=1}^n [\ln(x_0) + k(x_i - x_0)] = n \ln(x_0) + k \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i - nx_0 \right)}_{=0}.$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Odtud již snadno plyne, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Odtud již snadno plyne, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Odtud již snadno plyne, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \ln(x_0)$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Odtud již snadno plyne, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \ln(x_0) = \ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

Zjistili jsme, že

$$\sum_{i=1}^n \ln x_i \leq n \ln(x_0).$$

Odtud již snadno plyne, že

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \ln(x_0) = \ln \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

a proto (funkce $y = \ln x$ je rostoucí)

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$



Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p}$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' $p_1, p_2, \dots, p_k$ právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$
$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots \\
&\quad \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots \\
&\quad \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots \\
&\quad \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right) = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)
\end{aligned}$$

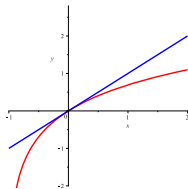
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

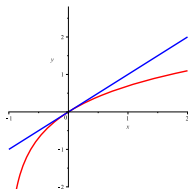
Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



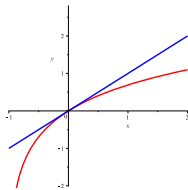
a proto

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



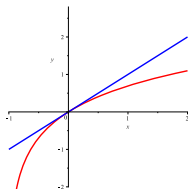
a proto

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}.$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}.$$

Odtud již snadno plyne

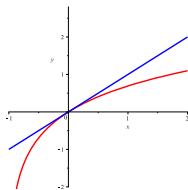
$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p} \geq \lim \left[\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \right]$$

p je prvočíslo

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}.$$

Odtud již snadno plyne

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p} \geq \lim \left[\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \right] = \infty.$$

p je prvočíslo

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p}$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Věta. (Prvočíselná věta)

(*Jacques Hadamard, Charles Jean de la Vallée-Poussin, 1896*).

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Věta. (Prvočíselná věta)

(Jacques Hadamard, Charles Jean de la Vallée-Poussin, 1896).

Nechť

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ je prvočíslo}\}.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočísel)

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots = \infty.$$

Důkaz.

Věta. (Prvočíselná věta)

(Jacques Hadamard, Charles Jean de la Vallée-Poussin, 1896).

Nechť

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \text{ je prvočíslo}\}.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p je prvočíslo

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + 1 \left(-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right) + 2 \left(-\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_3} \right) + 4 \left(-\frac{1}{p_5} + \frac{1}{p_4} \right) + \dots + k \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{p_k} \right)$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + 1 \left(-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right) + 2 \left(-\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_3} \right) + 4 \left(-\frac{1}{p_5} + \frac{1}{p_4} \right) + \dots + k \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{p_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k}.$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

p je prvočíslo

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

p je prvočíslo

Odtud a z prvočíselné věty plyne, že pro všechna dost velká $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2 \ln x} + \int_{p_1}^x \frac{1}{2 \ln t} \cdot \frac{1}{t} dt$$

p je prvočíslo

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

p je prvočíslo

Odtud a z prvočíselné věty plyne, že pro všechna dost velká $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2 \ln x} + \int_{p_1}^x \frac{1}{2 \ln t} \cdot \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2 \ln x} + \frac{1}{2} \ln(\ln x) - \frac{1}{2} \ln(\ln p_1) \end{aligned}$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

p je prvočíslo

Odtud a z prvočíselné věty plyne, že pro všechna dost velká $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2 \ln x} + \int_{p_1}^x \frac{1}{2 \ln t} \cdot \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{1}{2 \ln x} + \frac{1}{2} \ln(\ln x) - \frac{1}{2} \ln(\ln p_1) \rightarrow \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt.$$

Odtud a z prvočíselné věty plyne, že pro všechna dost velká $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \frac{\pi(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi(t)}{t^2} dt \geq \frac{1}{2 \ln x} + \int_{p_1}^x \frac{1}{2 \ln t} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2 \ln x} + \frac{1}{2} \ln(\ln x) - \frac{1}{2} \ln(\ln p_1) \rightarrow \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty,$$

a proto

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{p_1, p_2 \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)$$

p_1, p_2 jsou „prvočíselná dvojčata“

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{p_1, p_2 \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$

p_1, p_2 jsou „prvočíselná dvojčata“

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right) + \dots$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right) + \dots < \infty.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$
$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right) + \dots < \infty.$$

Důkaz (Viggo Brun, 1919).

Věta. (**Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat**)

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right) + \dots < \infty.$$

Důkaz (Viggo Brun, 1919).

Označme

$$\pi_2(x) = \#\{p \leq x : p \text{ a } p+2 \text{ jsou prvočísla}\}.$$

Věta. (Součet převrácených hodnot prvočíselných dvojčat)

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in \mathbb{N} \\ p_1, p_2 \text{ jsou „prvočíselná dvojčata“}}} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{19} \right) + \dots < \infty.$$

Důkaz (Viggo Brun, 1919).

Označme

$$\pi_2(x) = \#\{p \leq x : p \text{ a } p+2 \text{ jsou prvočísla}\}.$$

V. Brun ukázal, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\pi_2(x) \leq C \frac{x(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2}.$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt.$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p+2$ jsou prvočísla

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p+2$ jsou prvočísla

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + 1 \left(-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right) + 2 \left(-\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_3} \right) + 4 \left(-\frac{1}{p_5} + \frac{1}{p_4} \right) + \dots + k \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{p_k} \right)$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k} =$$

p a $p+2$ jsou prvočísla

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt.$$

$$\frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{t^2} dt + \int_{p_2}^{p_3} \frac{2}{t^2} dt + \int_{p_3}^{p_4} \frac{3}{t^2} dt + \int_{p_4}^{p_5} \frac{4}{t^2} dt + \dots + \int_{p_k}^x \frac{k}{t^2} dt =$$

$$= \frac{k}{x} + 1 \left(-\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_1} \right) + 2 \left(-\frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_3} \right) + 4 \left(-\frac{1}{p_5} + \frac{1}{p_4} \right) + \dots + k \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{p_k} \right) =$$

$$= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} + \dots + \frac{1}{p_k}.$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt \leq C \left(\frac{(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2} + \int_{p_1}^x \frac{(\ln(\ln t))^2}{t(\ln t)^2} dt \right);$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt \leq C \left(\frac{(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2} + \int_{p_1}^x \frac{(\ln(\ln t))^2}{t(\ln t)^2} dt \right);$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2} = 0,$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_{p_1}^x \frac{\pi_2(t)}{t^2} dt \leq C \left(\frac{(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2} + \int_{p_1}^x \frac{(\ln(\ln t))^2}{t(\ln t)^2} dt \right);$$

p a $p + 2$ jsou prvočísla

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2}{(\ln x)^2} = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_{p_1}^x \frac{(\ln(\ln t))^2}{t(\ln t)^2} dt \right) < +\infty.$



Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed' me svoji pozornost na jejich první cifry:

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed'me svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed' me svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2,
která začíná cifrou 7?

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed' me svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2,
která začíná cifrou 7?

Odpověď: Ano

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed' me svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2,
která začíná cifrou 7?

Odpověď: Ano, například

$$2^{46} = 70368744177664.$$

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřed' me svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Otázka:

Existuje mocnina čísla 2,
která začíná cifrou 7?

Odpověď: Ano, například

$$2^{46} = 70368744177664.$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Bud' $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Bud' $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Bud' $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;

Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Bud' $x \in \mathbb{R}$. Definujme posloupnost (a_n) předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li $x \in \mathbb{Z}$, je $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, je $a_{n+q} = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- je-li $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, je posloupnost (a_n) prostá a navíc platí, že pro každé $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$, $\alpha < \beta$, leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n) v intervalu (α, β) (tzn. $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1 \rangle$).

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7



$$\exists k \in \mathbb{N} : 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7



$$\exists k \in \mathbb{N} : 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$



$$\exists k \in \mathbb{N} : k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7



$$\exists k \in \mathbb{N} : 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$



$$\exists k \in \mathbb{N} : k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$



$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7



$$\exists k \in \mathbb{N} : 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$



$$\exists k \in \mathbb{N} : k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$



$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

a že $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

Problém:

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 7?

Řešení: Uvědomíme-li si, že

2^n začíná cifrou 7



$$\exists k \in \mathbb{N} : 7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$$



$$\exists k \in \mathbb{N} : k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$$



$$0 < \log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8 < 1$$

a že $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zjistíme (viz dříve uvedenou větu), že

existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ takových,
že 2^n začíná cifrou 7.

Domácí úkol:

Ukažte, že pro jakoukoliv konečnou posloupnost cifer existuje nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ takových, že dekadický zápis čísla 2^n touto posloupností začíná.

... a něco numerologie:

1931... = 2^{7462} ,	1946... = 2^{10475} ,	1961... = 2^{187} ,	1976... = 2^{1064} ,	1991... = 2^{1941} ,
1932... = 2^{569} ,	1947... = 2^{1446} ,	1962... = 2^{4459} ,	1977... = 2^{5336} ,	1992... = 2^{4077} ,
1933... = 2^{6977} ,	1948... = 2^{9990} ,	1963... = 2^{1838} ,	1978... = 2^{579} ,	1993... = 2^{1456} ,
1934... = 2^{84} ,	1949... = 2^{961} ,	1964... = 2^{3974} ,	1979... = 2^{4851} ,	1994... = 2^{3592} ,
1935... = 2^{6492} ,	1950... = 2^{7369} ,	1965... = 2^{10382} ,	1980... = 2^{94} ,	1995... = 2^{971} ,
1936... = 2^{1735} ,	1951... = 2^{476} ,	1966... = 2^{1353} ,	1981... = 2^{2230} ,	1996... = 2^{3107} ,
1937... = 2^{6007} ,	1952... = 2^{6884} ,	1967... = 2^{9897} ,	1982... = 2^{10774} ,	1997... = 2^{486} ,
1938... = 2^{1250} ,	1953... = 2^{2127} ,	1968... = 2^{868} ,	1983... = 2^{1745} ,	1998... = 2^{2622} ,
1939... = 2^{5522} ,	1954... = 2^{6399} ,	1969... = 2^{7276} ,	1984... = 2^{8153} ,	1999... = 2^{9030} ,
1940... = 2^{765} ,	1955... = 2^{1642} ,	1970... = 2^{383} ,	1985... = 2^{1260} ,	2000... = 2^{2137} ,
1941... = 2^{5037} ,	1956... = 2^{5914} ,	1971... = 2^{6791} ,	1986... = 2^{7668} ,	2001... = 2^{8545} ,
1942... = 2^{280} ,	1957... = 2^{1157} ,	1972... = 2^{2034} ,	1987... = 2^{775} ,	2002... = 2^{1652} ,
1943... = 2^{4552} ,	1958... = 2^{5429} ,	1973... = 2^{6306} ,	1988... = 2^{7183} ,	2003... = 2^{5924} ,
1944... = 2^{10960} ,	1959... = 2^{672} ,	1974... = 2^{1549} ,	1989... = 2^{290} ,	2004... = 2^{1167} ,
1945... = 2^{1931} ,	1960... = 2^{4944} ,	1975... = 2^{5821} ,	1990... = 2^{6698} ,	2005... = 2^{5439} ,

$2006... = 2^{682},$	$2010... = 2^{10877},$	$2014... = 2^{7771},$	$2018... = 2^{4665},$	$2022... = 2^{3695},$
$2007... = 2^{4954},$	$2011... = 2^{1848},$	$2015... = 2^{878},$	$2019... = 2^{2044},$	$2023... = 2^{10103},$
$2008... = 2^{197},$	$2012... = 2^{8256},$	$2016... = 2^{7286},$	$2020... = 2^{4180},$	$2024... = 2^{1074},$
$2009... = 2^{4469},$	$2013... = 2^{1363},$	$2017... = 2^{393},$	$2021... = 2^{1559},$	$2025... = 2^{7482}.$



G. Greaves

Sieves in Number Theory

Springer, 2001



G. Greaves

Sieves in Number Theory

Springer, 2001



Matematikant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)



G. Greaves

Sieves in Number Theory

Springer, 2001

Děkuji vám za pozornost!



MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)



G. Greaves

Sieves in Number Theory

Springer, 2001

Děkuji vám za pozornost!



MatematiKant
(hlava v oblacích a nohy pevně na zemi)