HELLYOVA VĚTA

Jaromír Šimša

Velké Meziříčí, 24. srpna 2022

Karel Horák (1954–2020)

Jan Vyšín (1908–1983)

J. Vyšín – Konvexní útvary. Praha: Mladá fronta (1964), edice Škola mladých matematiků, sv. 9, 94 stran

Kapitola 6. Hellyova věta a její důsledky, str. 72-88

Eduard Helly (1884–1943)

J. Veselý, I. Netuka – Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza. Pokroky matematiky, fyziky a anstronomie, 29(1984), str. 301–312.

I. M. Yaglom, V. G. Boltjanskiĭ – Convex figures. New York: Holt Rinehart and Winston (1961), 13+300 stran. (Ruský originál 1951.)

H. Hadwiger, H. Debrunner – Combinatorial Geometry in the Plane. New York: Holt Rinehart and Winston (1963), 113 stran (Překlad z němčiny.)

L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee – Helly's theorem and its relatives, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc. (1963), 78 stran (Ruský překlad 1968.)

Úvod k tématu

Konvexní útvar $\mathcal{U}$ – s každými dvěma body A, B obsahuje rovněž všechny body úsečky AB.

úsečka AB: $X = \alpha A + (1 - \alpha)B$, kde $0 \leq \alpha \leq 1$

trojúhelník ABC: $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$,
kde $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ a $\alpha + \beta + \gamma = 1$

konvexní kombinace n bodů: $X = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$,
kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$

V případě reálných čísel α_i, pro něž $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$,
je $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n$ tzv. afinní kombinace,
jejímž výsledkem je vektor.

Hellyova věta (rovinná varianta)

V rovině je dáno n konvexních útvarů, kde $n \geq 4$.
Mají-li *každé tři z nich* aspoň jeden společný bod,
pak aspoň jeden společný bod mají *všechny* útvary.

Hellyova věta (prostorová varianta)

V prostoru je dáno n konvexních útvarů, kde $n \geq 5$.
Mají-li *každé čtyři z nich* aspoň jeden společný bod,
pak aspoň jeden společný bod mají *všechny* útvary.

Důkaz Hellyovy věty pro rovinu

Mějme $n \geq 4$ konvexních útvarů $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ v rovině, každé tři z nich mají společný aspoň jeden bod.

První indukční krok ($n = 4$):

čtyři útvary $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$

Vybereme bod $B \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$.

$B \in \mathcal{U}_4$?

$B \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$, avšak $B \notin \mathcal{U}_4$

$B_4 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3, \quad B_4 \notin \mathcal{U}_4$

Důkaz Hellyovy věty pro rovinu

První indukční krok ($n = 4$):

čtyři konvexní útvary $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4$ a čtyři vybrané body

$B_4 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3, \quad B_4 \notin \mathcal{U}_4,$

$B_3 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_3 \notin \mathcal{U}_3$

$B_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_2 \notin \mathcal{U}_2,$

$B_1 \in \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_1 \notin \mathcal{U}_1.$

Co je kvůli $B_1 \notin \mathcal{U}_1$ a $B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{U}_1$ vyloučeno:

1. $B_1 \in B_2B_3$ (úsečka v $\mathcal{U}_1$!), $B_1 \in B_2B_4$, $B_1 \in B_3B_4$
2. $B_1 \in \triangle B_2B_3B_4$ (trojúhelník v $\mathcal{U}_1$!)

Vyloučeno i $B_2 \in \triangle B_1B_3B_4$, $B_3 \in \triangle B_1B_2B_4$, $B_4 \in \triangle B_1B_2B_3$.

Důsledek: B_1, B_2, B_3, B_4 jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku.

Důkaz Hellyovy věty pro rovinu

První indukční krok ($n = 4$):

$B_4 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3, \quad B_4 \notin \mathcal{U}_4,$

$B_3 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_4 \notin \mathcal{U}_3$

$B_2 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_4 \notin \mathcal{U}_2,$

$B_1 \in \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4, \quad B_1 \notin \mathcal{U}_1.$

Víme už, že $B_1B_2B_3B_4$ je konvexní čtyřúhelník.

Označme P průsečík úhlopříček B_1B_3 a B_2B_4.

B_1B_3 je úsečka v $\mathcal{U}_2$ i $\mathcal{U}_4$, proto z $P \in B_1B_3$ plyne $P \in \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4$.

B_2B_4 je úsečka v $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_3$, proto z $P \in B_2B_4$ plyne $P \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_3$.

Dohromady $P \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 \cap \mathcal{U}_4$.

První indukční krok ($n = 4$) je hotov.

Důkaz Hellyovy věty pro rovinu

n konvexních útvarů $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$, každé tři z nich mají aspoň jeden společný bod

Druhý indukční krok ($k \geq 4$, $n = k \rightarrow n = k + 1$):

$k + 1$ útvarů $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k, \mathcal{U}_{k+1}$

zredukujeme na k útvarů

$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{k-1}, \mathcal{U}_k \cap \mathcal{U}_{k+1}$

a užijeme indukční předpoklad. $\blacksquare$

Hellyova věta (v prostoru dimenze $d \geq 1$)

V prostoru $\mathbb{R}^d$ je dáno n konvexních útvarů, kde $n \geq d+2$.
Má-li *každých* $d+1$ *z nich* aspoň jeden společný bod,
pak aspoň jeden společný bod mají *všechny* útvary.

Je těžké dokázat tuto větu pro obecné d?
Konkrétněji: provést první indukční krok pro $n = d+2$?

Ne, pokud umíme zapsat lineární závislost $d+1$ vektorů z $\mathbb{R}^d$.
Postup je o to zajímavější, že jsme v případě roviny ($d = 2$)
uplatnili intuici při rozhodování o poloze bodů B_1, B_2, B_3, B_4
(na základě vizuálních představ: $3+1$, $2+2$).

Poznámka. Hellyova věta platí i pro *nekonečné* množiny
konvexních útvarů v $\mathbb{R}^d$, pokud každý ze zastoupených útvarů je
navíc *ohraničený* a *uzavřený* (jedním slovem *kompaktní*).

Aplikace 1

V rovině je dána libovolná (třeba i nekonečná) množina bodů $\mathcal{B}$, z nichž každé tři je možné pokrýt jednotkovým kruhem.
Pak celou množinu $\mathcal{B}$ lze pokrýt jedním jednotkovým kruhem.

Důkaz

Libovolné body B_1, B_2, B_3 z $\mathcal{B}$ leží v nějakém kruhu $\mathcal{K}(S, 1)$:

$|SB_1| \leq 1$, $|SB_2| \leq 1$, $|SB_3| \leq 1$

Aplikace 1

V rovině je dána libovolná (třeba i nekonečná) množina bodů $\mathcal{B}$, z nichž každé tři je možné pokrýt jednotkovým kruhem.
Pak celou množinu $\mathcal{B}$ lze pokrýt jedním jednotkovým kruhem.

Důkaz

Libovolné body B_1, B_2, B_3 z $\mathcal{B}$ leží v nějakém kruhu $\mathcal{K}(S, 1)$:

$|B_1S| \leq 1$, $|SB_2| \leq 1$, $|SB_3| \leq 1$

Aplikace 1

V rovině je dána libovolná (třeba i nekonečná) množina bodů $\mathcal{B}$, z nichž každé tři je možné pokrýt jednotkovým kruhem.
Pak celou množinu $\mathcal{B}$ lze pokrýt jedním jednotkovým kruhem.

Důkaz

Libovolné body B_1, B_2, B_3 z $\mathcal{B}$ leží v nějakém kruhu $\mathcal{K}(S, 1)$:

$|B_1S| \leq 1$, $|B_2S| \leq 1$, $|B_3S| \leq 1$

Bod S tak leží ve třech kruzích $\mathcal{K}(B_1, 1)$, $\mathcal{K}(B_2, 1)$, $\mathcal{K}(B_3, 1)$.

Každé tři z kruhů $\mathcal{K}(B, 1)$, kde B probíhá $\mathcal{B}$, mají společný bod.

$\xrightarrow{\text{H.v.}}$ Všechny kruhy $\mathcal{K}(B, 1)$ mají společný bod $S^\star$.

$B \in \mathcal{B} \Rightarrow S^\star \in \mathcal{K}(B, 1) \Rightarrow B \in \mathcal{K}(S^\star, 1)$, tj. $K(S^\star, 1)$ pokrývá $\mathcal{B}$.

■

Aplikace 1 v modelové situaci

Na desce stolu je vyznačeno několik bodů. Můžeme-li každé tři z nich zakrýt 50korunovou mincí, stačí nám jedna tato mince k zakrytí všech vyznačených bodů.

Otázka:

Dopadne to stejně, když namísto 50korunovou mincí budeme body vyznačené na stole zakrývat 100korunovou bankovkou?

Aplikace 1 a Jungova věta

Heinrich Jung (1876–1953) v roce 1901 dokázal výsledek o tom, jaký nejmenší možný poloměr má kruh, kterým lze pokrýt každou rovinnou množinu bodů s daným „průměrem“. (Vyřešil současně tento problém nejen pro rovinu, nýbrž pro eukleidovské prostory všech konečných dimenzí.)

Průměrem ohraničené a uzavřené množiny nazýváme největší ze všech vzdáleností jakýchkoli dvou jejích bodů.

Průměr D má například rovnostranný trojúhelník o straně D. Jemu opsaná kružnice má poloměr $R = D/\sqrt{3}$. Je to zřejmě poloměr nejmenšího kruhu, kterým lze tento trojúhelník pokrýt.

Jungova věta v rovině

Každou rovinnou množinu bodů, která je ohraničená, uzavřená a má průměr D, lze pokrýt kruhem o poloměru $R = D/\sqrt{3}$.

Jungova věta v rovině

Každou rovinnou množinu bodů, která je ohraničená, uzavřená a má průměr D, lze pokrýt kruhem o poloměru $R = D/\sqrt{3}$.

Jungova věta v prostoru dimenze $d \geq 1$

Každou množinu bodů v $\mathbb{R}^d$, která je ohraničená, uzavřená a má průměr D, lze pokrýt d-rozměrnou koulí o poloměru

$$R = D \cdot \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}.$$

Hellyova věta, vtělená do Aplikace 1, se *později* stala přirozeným vstupním prostředkem důkazu Jungovy věty. Zredukovala ho na důkaz pro jakoukoli množinu $d+1$ bodů v $\mathbb{R}^d$, která má daný průměr D.

Jungova věta v rovině

Každou rovinnou množinu bodů, která má daný průměr D, lze pokrýt kruhem o poloměru $R = D/\sqrt{3}$.

Důkaz

Aplikace 1: Stačí ukázat, že kruhem o uvedeném poloměru R lze pokrýt každé tři body B_1, B_2, B_3 z dané rovinné množiny. Pro ně ovšem (podle definice průměru D) platí:
$|B_1B_2| \leq D$, $|B_1B_3| \leq D$, $|B_2B_3| \leq D$.

To *ukázat* je pak věřte snadné. ■

Jungova věta v rovině

Každou rovinnou množinu bodů, která má daný průměr D, lze pokrýt kruhem o poloměru $R = D/\sqrt{3}$.

Silnější výsledek

Každou rovinnou množinu bodů, která má daný průměr D, lze pokrýt *pravidelným šestiúhelníkem* vepsaným do kruhu o poloměru $R = D/\sqrt{3}$.

Poznámka. Není známo, jak vypadá útvar *nejmenšího obsahu*, kterým lze pokrýt každou rovinnou množinu bodů o daném průměru D.

Úvod k Aplikaci 2

Lineární nerovnice s dvěma neznámými x, y:

$$\begin{aligned} ax + by + c &\geq 0, \\ ax + by + c &\leq 0, \\ ax + by + c &> 0, \\ ax + by + c &< 0 \end{aligned}$$

Množina řešení (bodů $[x, y]$ v Oxy) každé takové nerovnice je:

- ▷ uzavřená polorovina (včetně hraniční přímky),
- ▷ otevřená polorovina (bez hraniční přímky),
- ▷ (celá) rovina,
- ▷ prázdná množina.

Aplikace 2

Soustava konečného počtu lineárních nerovnic s dvěma neznámými má aspoň jedno řešení, pokud má aspoň jedno řešení každá „podsoustava“ tří jejích nerovnic.

Poznámka. Podmínka konečného počtu nerovnic je podstatná.

Příklad nekonečné soustavy:

$$x + y > 0,\ x + y > 1,\ x + y > 2,\ x + y > 3,\ \ldots$$

Zobecněná aplikace 2

Soustava konečného počtu lineárních nerovnic s d neznámými má aspoň jedno řešení, pokud má aspoň jedno řešení každá podsoustava $d + 1$ jejích nerovnic.
(Pokud celá soustava nerovnic žádné řešení nemá, nemá je ani některá podsoustava $d + 1$ jejích nerovnic.)

Aplikace 3

V rovině, ve které je dán ohraničený obrazec $\mathcal{O}$ o obsahu S, se najde takový bod P, že *každá* přímka procházející bodem P rozdělí $\mathcal{O}$ na dvě části, z nichž obě mají obsah alespoň $\frac{1}{3}S$. (Obrazec $\mathcal{O}$ nemusí být ani souvislý, natož konvexní.)

Důkaz

Celý obrazec $\mathcal{O}$ leží v některém kruhu $\mathcal{K}$.

Uvažme všechny ty úseče $\mathcal{U}$ kruhu $\mathcal{K}$, ve kterých leží část obrazce $\mathcal{O}$ o obsahu $> \frac{2}{3}S$.

Každé tři z tohoto kontinua úsečí mají průnik kladného obsahu: V každé ze tří úsečí je „uloženo“ po $> 2/3$ obsahu $\mathcal{O}$, proto v průniku dvou úsečí je ho $> 1/3$, ve třetí úseči $> 2/3$, proto v průniku všech tří úsečí je kladná část obsahu $\mathcal{O}$.

Aplikace 3

V rovině, ve které je dán ohraničený obrazec $\mathcal{O}$ o obsahu S, se najde takový bod P, že *každá* přímka procházející bodem P rozdělí $\mathcal{O}$ na dvě části, z nichž obě mají obsah alespoň $\frac{1}{3}S$. (Obrazec $\mathcal{O}$ nemusí být ani souvislý, natož konvexní.)

Důkaz

Celý obrazec $\mathcal{O}$ leží v některém kruhu $\mathcal{K}$.

Uvažme všechny ty úseče $\mathcal{U}$ kruhu $\mathcal{K}$, ve kterých leží část obrazce $\mathcal{O}$ o obsahu $> \frac{2}{3}S$.

Každé tři z tohoto kontinua úsečí mají průnik kladného obsahu.

$\xrightarrow{\text{H.v.}}$ Všechny uvažované úseče mají společný bod P.

To ještě není konec důkazu.

Aplikace 3

V rovině, ve které je dán ohraničený obrazec $\mathcal{O}$ o obsahu S, se najde takový bod P, že *každá* přímka procházející bodem P rozdělí $\mathcal{O}$ na dvě části, z nichž obě mají obsah alespoň $\frac{1}{3}S$. (Obrazec $\mathcal{O}$ nemusí být ani souvislý, natož konvexní.)

Důkaz

Celý obrazec $\mathcal{O}$ leží v některém kruhu $\mathcal{K}$.

Uvažme všechny ty úseče $\mathcal{U}$ kruhu $\mathcal{K}$, ve kterých leží část obrazce $\mathcal{O}$ o obsahu $> \frac{2}{3}S$.

Všechny uvažované úseče mají společný bod P.

Připusťme, že nalezený bod P nemá požadovanou vlastnost: Existuje přímka p, která bodem P prochází a přitom na jednu stranu od ní leží část obrazce $\mathcal{O}$ o obsahu $< \frac{1}{3}S$.
Načrtněme obrázek a odvoďme spor. ■

Aplikace 3

V rovině, ve které je dán ohraničený obrazec $\mathcal{O}$ o obsahu S, se najde takový bod P, že *každá* přímka procházející bodem P rozdělí $\mathcal{O}$ na dvě části, z nichž obě mají obsah alespoň $\frac{1}{3}S$. (Obrazec $\mathcal{O}$ nemusí být ani souvislý, natož konvexní.)

Poznámka. Obecně zlomek $\frac{1}{3}$ obsahu S nelze nahradit větším. Pro konvexní obrazce $\mathcal{O}$ však ano!

Winternitzova věta (1917)

Těžiště T ohraničeného konvexního útvaru $\mathcal{U}$ v rovině má následující vlastnost: *Každá* přímka procházející bodem T rozdělí $\mathcal{U}$ na dvě části, z nichž obě mají obsah alespoň $\frac{4}{9}S$.

(Pro případ obecného trojúhelníku existuje důkaz „beze slov“.)

Aplikace 4 – „Vlci a ovce“

V $\mathbb{R}^d$ budeme body $[x_1, x_2, \ldots, x_d]$ ze dvou daných skupin oddělovat *nadrovinami*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d + b = 0,$$

tj. hledat takovou nadrovinu, aby každá skupina bodů ležela celá v jiném ze dvou (otevřených) poloprostorů

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d + b > 0,$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_dx_d + b < 0.$$

Kirchbergerova věta (1903)

V $\mathbb{R}^d$ je dáno $M + N$ bodů $V_1, V_2, \ldots, V_M, O_1, O_2, \ldots, O_N$. Lze-li body V_i oddělit nadrovinou od bodů O_j v každé jejich „smíšené“ skupině o celkem $d + 2$ bodech, lze to udělat v celé skupině $M + N$ bodů. (Předpokládáme, že $M + N \geq d + 3$.)

Nástin důkazu Kirchbergerovy věty

$$V_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{id}] \quad (1 \le i \le M),$$
$$O_j = [y_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jd}] \quad (1 \le j \le N).$$

Hledáme $d+1$ koeficientů $a_1, a_2, \ldots, a_d, b$ tak, aby

$$a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \cdots + a_d x_{id} + b > 0 \quad (1 \le i \le M),$$
$$a_1 y_{j1} + a_2 y_{j2} + \cdots + a_d y_{jd} + b < 0 \quad (1 \le j \le N).$$

Sestava hledaných čísel $[a_1, a_2, \ldots, a_d, b]$ je **bod** z $\mathbb{R}^{d+1}$.

V tomto prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$ uvážíme $M+N$ množin

$$\mathcal{V}_i = \{[a_1, \ldots, a_d, b]\colon a_1 x_{i1} + \cdots + a_d x_{id} + b > 0\} \quad (1 \le i \le M),$$
$$\mathcal{O}_j = \{[a_1, \ldots, a_d, b]\colon a_1 y_{j1} + \cdots + a_d y_{jd} + b < 0\} \quad (1 \le j \le N).$$

Máme dokázat: Všech $M+N$ množin $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{O}_j$ má společný bod.

Nástin důkazu Kirchbergerovy věty

$$V_i = [x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{id}] \quad (1 \le i \le M),$$
$$O_j = [y_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jd}] \quad (1 \le j \le N).$$

$$\mathcal{V}_i = \{[a_1, \ldots, a_d, b] \colon a_1 x_{i1} + \cdots + a_d x_{id} + b > 0\} \quad (1 \le i \le M),$$
$$\mathcal{O}_j = \{[a_1, \ldots, a_d, b] \colon a_1 y_{j1} + \cdots + a_d y_{jd} + b < 0\} \quad (1 \le j \le N).$$

Máme dokázat: Všech $M + N$ množin $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{O}_j$ má společný bod.

Zaručí to Hellyova věta v prostoru $\mathbb{R}^{d+1}$, pokud:

1. Každá z množin $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{O}_j$ je konvexní.
2. Libovolných $d + 2$ množin z $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{O}_j$ má společný bod:
   Pro „smíšené“ skupiny je to předpoklad dokazované věty,
   pro ostatní to „jistí“ body $[0, \ldots, 0, 1]$ a $[0, \ldots, 0, -1]$. $\blacksquare$

Úvod k Aplikaci 5

Konvexnost útvaru $\mathcal{U}$ je vlastnost
$\forall X \in \mathcal{U}\ \forall Y \in \mathcal{U}\colon\ XY \subseteq \mathcal{U}$.

Jeho slabší vlastnost
$\exists X \in \mathcal{U}\ \forall Y \in \mathcal{U}\colon\ XY \subseteq \mathcal{U}$
nazýváme *hvězdovitostí* útvaru $\mathcal{U}$, bod X bodem jeho *jádra*.

Vizuální interpretace $XY \subseteq \mathcal{U}$: „Y je v rámci $\mathcal{U}$ viditelný z X"

Hvězdovitý útvar $\mathcal{U}$ – z některého jeho bodu jsou v rámci $\mathcal{U}$ viditelné všechny ostatní body z $\mathcal{U}$.

Aplikace 5

Mark A. Krasnoselskij (1920–1999) využil Hellyovu větu k důkazu výsledku, který je dnes po něm pojmenován.

Krasnoselského věta (1946)

V prostoru $\mathbb{R}^d$ je dána nekonečná množina bodů $\mathcal{B}$, která je ohraničená a uzavřená. Jestliže pro každých $d + 1$ bodů z $\mathcal{B}$ se najde bod, z něhož je v rámci $\mathcal{B}$ všech těchto $d + 1$ bodů viditelných, pak množina $\mathcal{B}$ je hvězdovitá.

Rovinná varianta – model obrazové galérie

Soustava propojených sálů v jednom podlaží.
Jestliže jakékoli **tři** obrazy jsou viditelné z vhodně k nim vybraného místa, pak jediný pracovník uhlídá celou galerii (tedy z vhodného místa budou všechny obrazy viditelné).

Příloha – Sedm dalších aplikací rovinné Hellyovy věty

1. V rovině je dáno několik přímek. Jestliže každé tři z nich protne některá kružnice o daném poloměru R, pak jedna taková kružnice protne všechny přímky.

2. Je dán konvexní n-úhelník $\mathcal{M}$, kde $n \geq 4$. Pro libovolný jeho *vnitřní* bod X uvažme kolmé průměty X na n přímek určených stranami n-úhelníku $\mathcal{M}$. Pokud pro každé tři z těchto n přímek se najde bod X, jehož průměty na ně leží uvnitř tří příslušných stran, pak aspoň jeden bod X má všech n průmětů uvnitř stran.

3. Jestliže je celá rovina je pokryta několika (aspoň čtyřmi) polorovinami, pak některé tři z nich rovinu také pokrývají.

4. Uvnitř libovolného konvexního sedmiúhelníku $\mathcal{S}$ existuje bod, který neleží v žádném čtyřúhelníku tvořeném čtyřmi sousedními vrcholy $\mathcal{S}$.

5. V žádném konvexním sedmiúhelníku $\mathcal{S}$ neexistuje bod, který byl ležel ve všech pětiúhelnících tvořenými jakkoli vybranými (pěti) vrcholy $\mathcal{S}$.

6*. V rovině je dáno několik navzájem rovnoběžných úseček. Pokud každé tři z nich protne některá přímka, pak jedna přímka protne všechny úsečky. (Návod: Předpokládejte, že dané úsečky jsou v rovině Oxy rovnoběžné s osou y, popište je souřadnicemi jejich krajních bodů a uvažované přímky zapisujte rovnicemi $y = kx + q$. Hellyovu větu pak uplatněte k jiné souřadnicové rovině, ve které každou přímku $y = kx + q$ znázorníte bodem $[k, q]$.)

7*. V rovině je dán ohraničený, uzavřený a konvexní útvar $\mathcal{U}$ s neprázdným vnitřkem. Dokažte, že existuje takový jeho vnitřní bod A, že každá přímka procházející bodem A protne útvar $\mathcal{U}$ v úsečce XY tak, že $|XA|/|AY| \leq 2$. (Návod: Pro každý hraniční bod X útvaru $\mathcal{U}$ uvažte útvar $\mathcal{U}_X$, který je obrazem $\mathcal{U}$ ve stejnolehlosti se středem X a koeficientem $2/3$.)