

XX. seminář o filosofických otázkách matematiky a fyziky
Velké Meziříčí 23. 8. 2022

Paradox dvojčat jako pedagogický problém

Jiří Podolský
Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova

stručný průvodce po našem nedávném článku

č. 1 ● Čs. čas. fyz. 72 (2022) 27

Paradox dvojčat jako pedagogický problém

Jiří Podolský¹, Aleš Trojánek²

¹ Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8; jiri.podolsky@mff.cuni.cz

² Gymnázium Velké Meziříčí, Sokolovská 235/27, 594 01 Velké Meziříčí; trojane@gvn.cz

vyšel v Čs. čas. fyz. (2022) č. 1, str. 27– 36

obsah a smysl našeho článku:

- „paradox dvojčat“ je ikona Einsteinovy teorie relativity
často se používá k výkladu relativity času
- jak ho vhodným způsobem vykládat na středních školách?
v českých učebnicích nebývá podrobně řešen
- v univerzitních učebnicích je řešen hodně technicky
obtížné a těžko přenositelné na střední školy
- vždy jen omezení na speciální teorii relativity
jak souvisí s časovou dilatací v obecné teorii relativity?

hlavní poselství: čas není absolutní

hodiny měřící vlastní čas různých
pozorovatelů ukazují různé údaje

a to v závislosti na tom

jak rychle se pohybují a kde se nacházejí

struktura našeho článku:

- klasické zadání úlohy
- nedostatky v zadání této úlohy
- problémy v řešení této úlohy

nabízíme řešení v kontextu obecné teorie relativity:

- řešení pohybu rakety, která zrychluje
- řešení „paradoxu“ dvojčat v neinerciální raketě
- souvislost s dilatací času v gravitačním poli
- fotonová raketa a zakřivený prostoročas

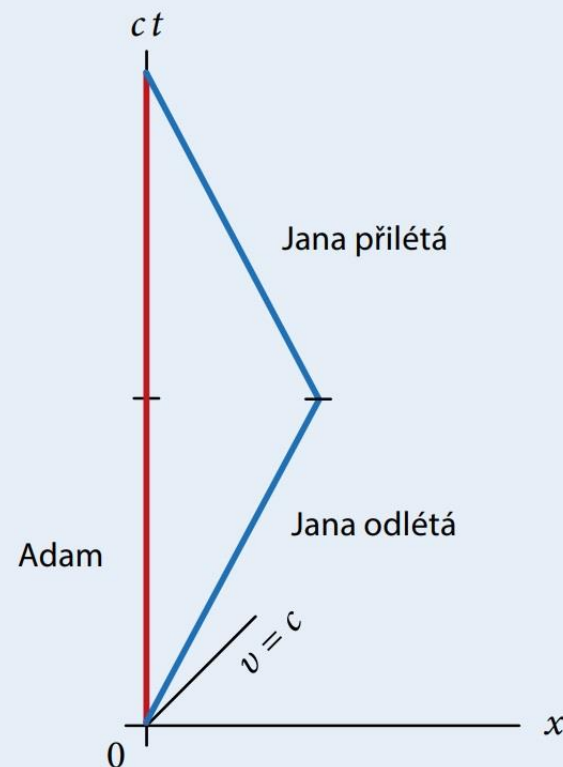
závěrečné shrnutí pro pedagogy

úloha s dvojčaty: Adam na Zemi, Jana v raketě

Klasické zadání úlohy

Na povrchu Země (inerciální soustavy) jsou dvojčata. Jedno z nich (Adam) zůstane na Zemi, druhé (Jana) odstartuje ze Země v kosmické lodi spojené s raketou a v krátké době nabude velké rychlosti $v < c$ (např. $v = 0,6c$). Touto rychlostí se dlouho pohybuje.¹ Potom se brzděním zastaví, pohybuje se stejným způsobem zpět a vrátí se k Adamovi do místa, ze kterého Jana odstartovala (viz obr. 1). Jana má hodiny, které udávají její vlastní čas. Otázkou je, jaký čas budou tyto Janiny hodiny po návratu na Zemi ukazovat vzhledem k Adamovým hodinám, jestliže byly v okamžiku startu oboje nastaveny na výchozí čas 0.

Podle teorie relativity platí, že hodiny Jany (její vlastní hodiny) budou po návratu ukazovat menší hodnotu než hodiny Adama (jeho vlastní hodiny). To znamená, že *celkově v raketě plynul čas pomaleji* nežli na Zemi.



Obr. 1 Prostorový časový diagram znázorňující historii Adama na Zemi (v inerciální soustavě) a Jany v raketě. Vodorovně doprava se vynáší vzdálenost x od Země, zatímco svisle nahoru Adamův čas t . Jednotky jsou zvoleny tak, že světlo se v tomto diagramu šíří pod úhlem 45° (neboli na svislé časové ose vynášíme ct , kde c je rychlost světla).

nedostatky v tomto zadání úlohy:

Klasické zadání úlohy

Na povrchu Země (inerciální soustavy) jsou dvojčata. Jedno z nich (Adam) zůstane na Zemi, druhé (Jana) odstartuje ze Země v kosmické lodi spojené s raketou a v krátké době nabude velké rychlosti $v < c$ (např. $v = 0,6 c$). Touto rychlostí se dlouho pohybuje.¹ Potom se brzděním zastaví, pohybuje se stejným způsobem zpět a vrátí se k Adamovi do místa, ze kterého Jana odstartovala (viz obr. 1). Jana má hodiny, které udávají její vlastní čas. Otázkou je, jaký čas budou tyto Janiny hodiny po návratu na Zemi ukazovat vzhledem k Adamovým hodinám, jestliže byly v okamžiku startu oboje nastaveny na výchozí čas 0.

Podle teorie relativity platí, že hodiny Jany (její vlastní hodiny) budou po návratu ukazovat menší hodnotu než hodiny Adama (jeho vlastní hodiny). To znamená, že celkově v raketě plynul čas pomaleji nežli na Zemi.

- povrch Země není inerciální (gravitace, otáčení, oběh, ...) mluvme raději o Sluneční soustavě
- co je ona „krátká doba“? (velké zrychlení, pak zpomalení,...) to ale není inerciální pohyb ocitáme se mimo speciální relativitu v doméně obecné relativity
- „všechno je přece relativní“: Jana se pohybuje vůči Adamovi ale také Adam se pohybuje vůči Janě vzniká tedy matematický paradox: $t_{\text{Jana}} < t_{\text{Adam}}$ a současně $t_{\text{Adam}} < t_{\text{Jana}}$

obvyklé řešení této úlohy a její úskalí

použije se vzorec speciální teorie relativity pro dilataci času

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t_0$$

čas Adama

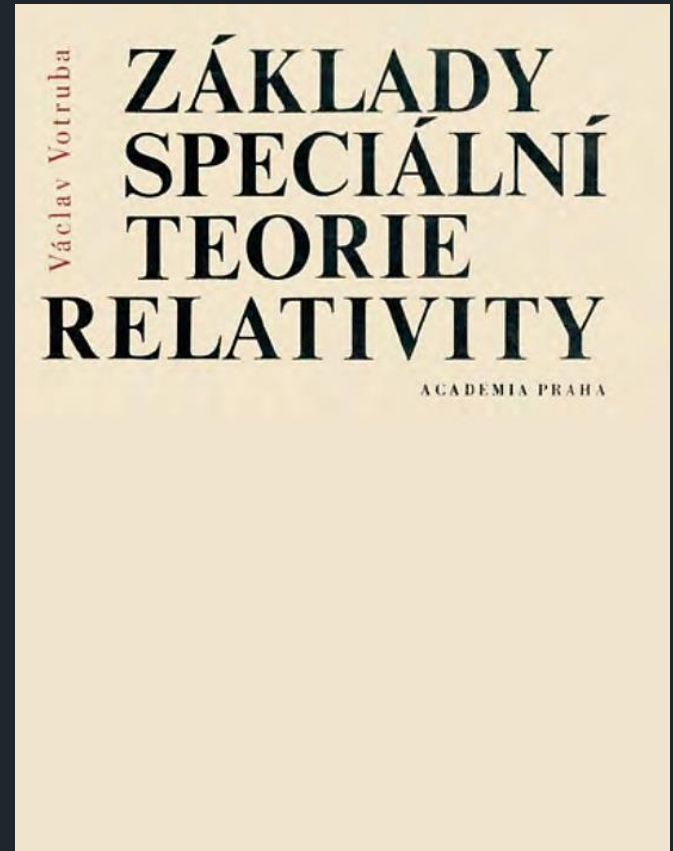
čas Jany

z Einsteinovy STR tedy plyne

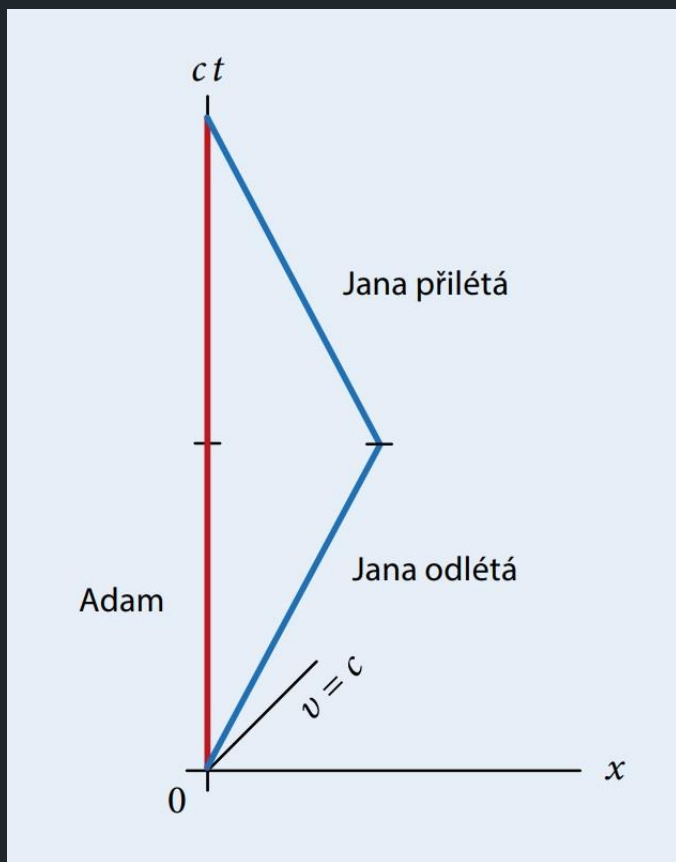
$$t_{\text{Jana}} < t_{\text{Adam}}$$

obvyklé řešení této úlohy a její úskalí

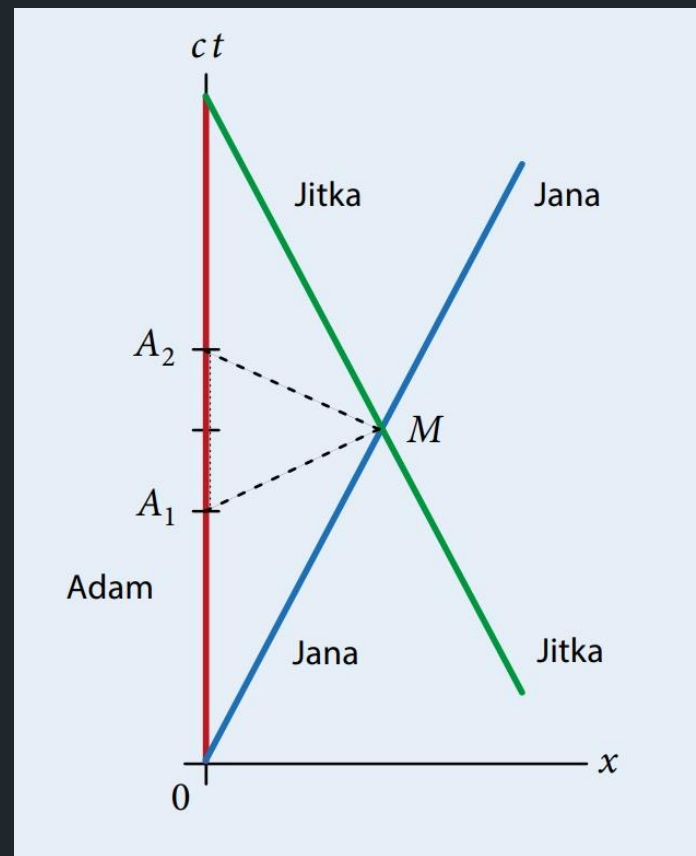
- neekvivalentnost Jany a Adama:
Adam je stále v inerciální soustavě
ale Jana ne: musí zrychlit a zpomalit
- to správně uvádějí SŠ učebnice
Bartuška (2001), Dvořák (2015), ...
ale početně úlohu neřeší
- podrobně rozebírají VŠ učebnice
Votruba (1969 a 1977), Horský, Novotný, Štefaník (2011), ...
ale výpočet je hodně zdlouhavý a využívá „hypotézu hodin“...



doporučujeme paradox dvojčat řešit pomocí trojčat



čas Adama čas Jany

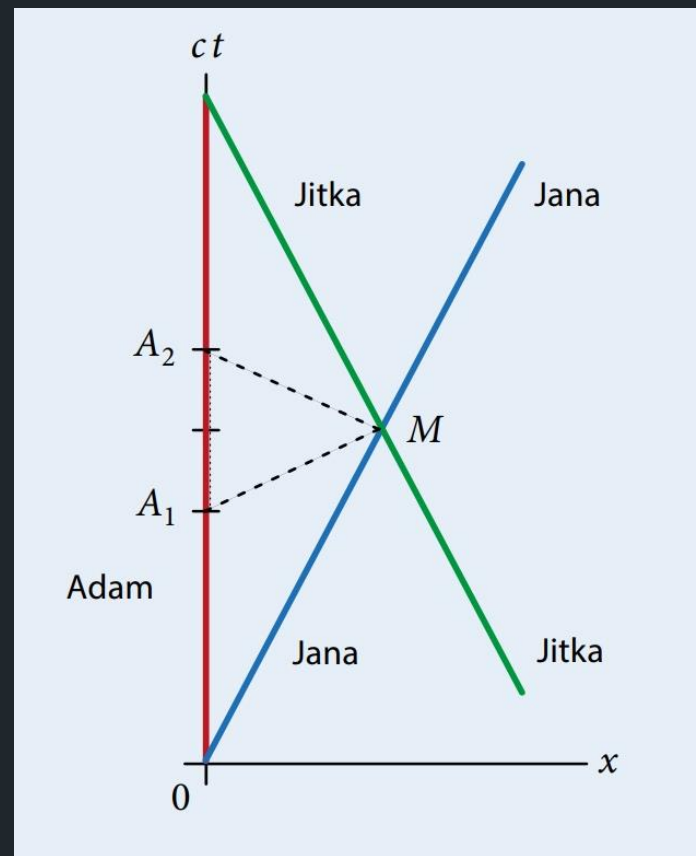


čas Adama čas Jany čas Jitky

žádné zrychlení a brzdění, jen předávání časových údajů
mezi třemi inerciálními soustavami

doporučujeme paradox dvojčat řešit pomocí trojčat

Obr. 3 Prostorčasový diagram znázorňující historii Adama (v jeho inerciální vztažné soustavě), odlétající Jany v raketě a přilétající Jitky v jiné raketě. Když se Jana právě míjí s Jitkou (událost označená M), předá jí svůj časový údaj. Ten nakonec Jitka porovná s Adamovým časem. Řešení „paradoxu“ dvojčat „pomocí trojčat“ spočívá v relativitě současnosti: v inerciální soustavě Jany je s událostí M současná Adamova událost A_1 , zatímco v jiné inerciální soustavě Jitky je se stejnou událostí M současná *jiná* událost A_2 , která v Adamově životě nastala *mnohem později* nežli událost A_1 . Právě existence dlouhého časového intervalu mezi A_1 a A_2 je příčinou, proč hodiny Adama budou i z pohledu rakety nakonec ukazovat celkový větší čas než hodiny, které zpátky do Sluneční soustavy dopraví Jitka (a jež byly v M synchronizovány s časem Jany). Adam je jednoznačně starší než Jana, paradox se nekoná.



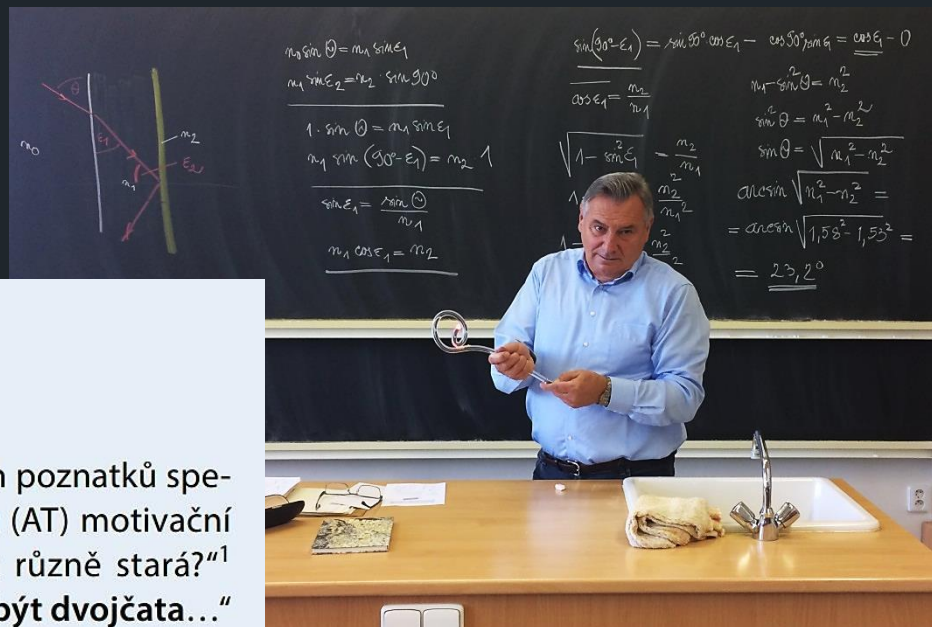
čas Adama čas Jany čas Jitky

žádné zrychlení a brždění, jen předávání časových údajů
mezi třemi inerciálními soustavami

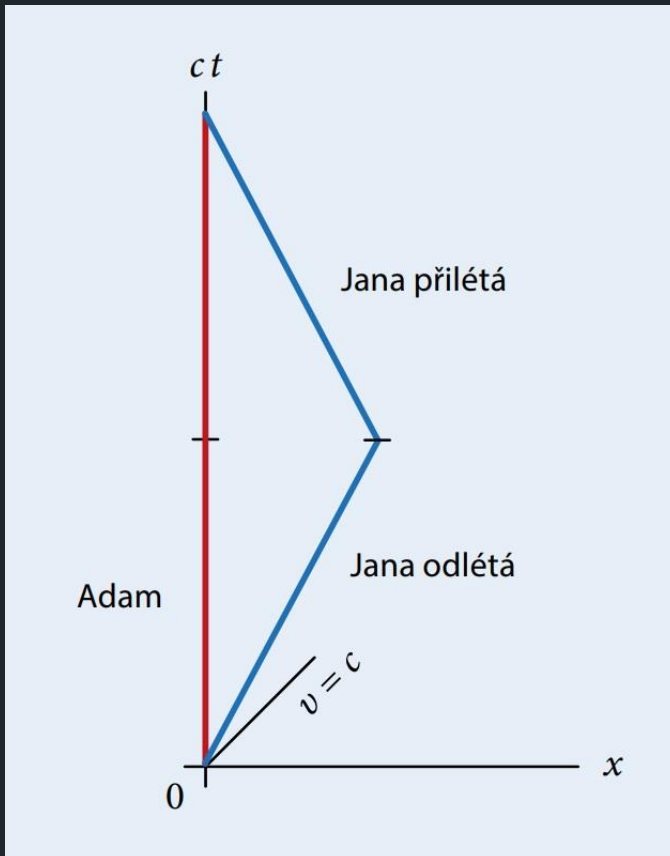
pedagogická kuriozita

Řešení paradoxu dvojčat pomocí trojčat

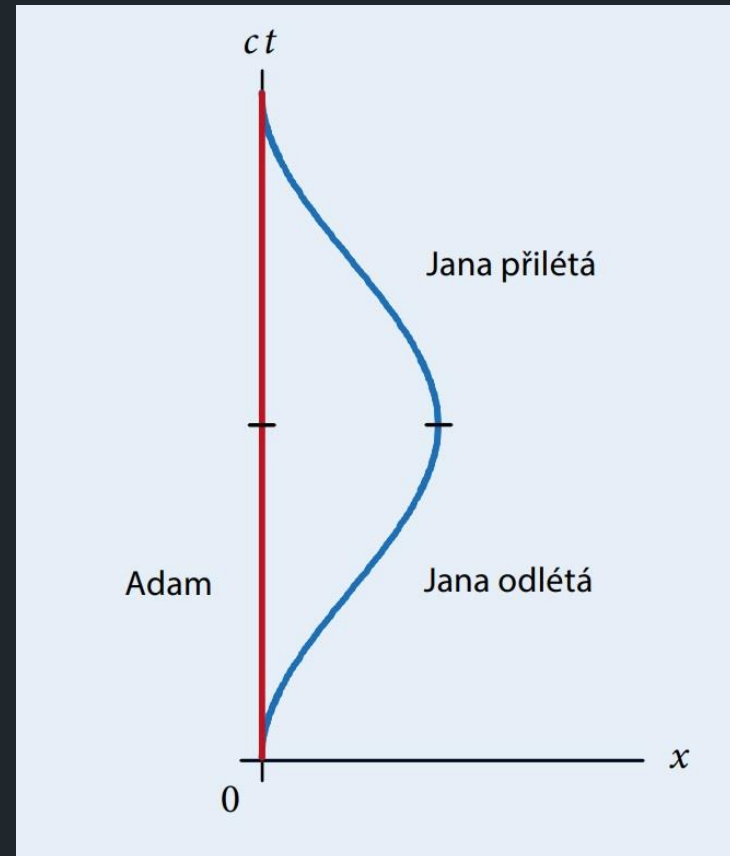
Na úvod gymnaziálního výkladu základních poznatků speciální teorie relativity klade jeden z autorů (AT) motivační otázky – například: „Mohou být dvojčata různě stará?“¹ Jednou při vyslovení části otázky: „**Mohou být dvojčata...**“ jeden žák pohotově a vtipně doplnil: „... **tři ?**“ Je pozoruhodné, že – aniž si to uvědomil – měl plnou pravdu! Při řešení paradoxu dvojčat *jenom v rámci speciální teorie relativity* totiž *opravdu musíme uvažovat trojčata*, která si navzájem pečlivě porovnávají své vlastní hodiny. Kromě Adama a Jany ještě (třeba) Jitku.



navrhujeme paradox dvojčat řešit se zrychlením
uvažovat pohyb rakety s Janou s konstantním zrychlením



místo



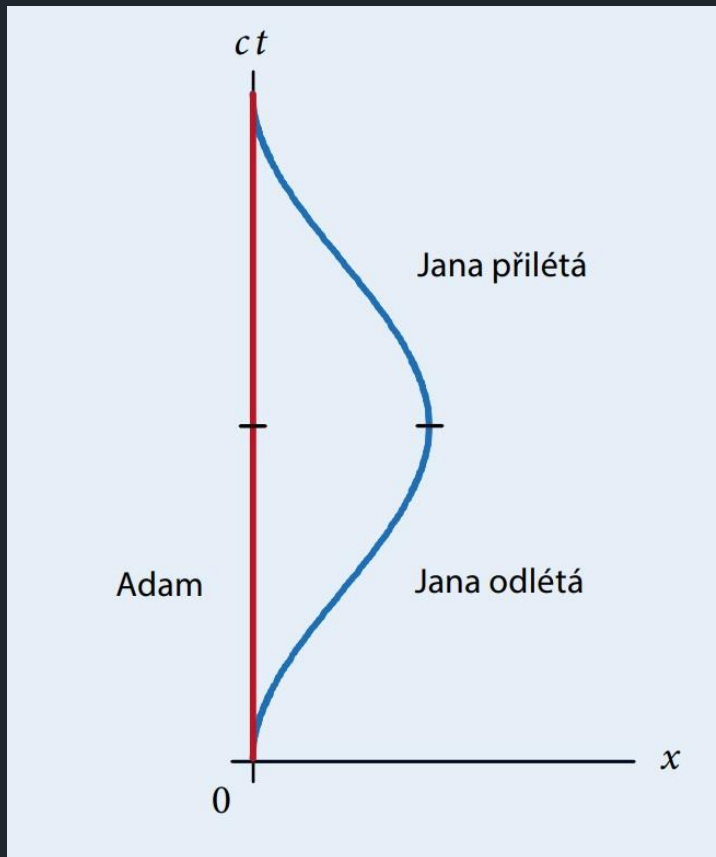
řešit

pohyb rakety s konstantním zrychlením lze spočítat

relativistická pohybová rovnice:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F = m_0 g.$$

$$p = m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$



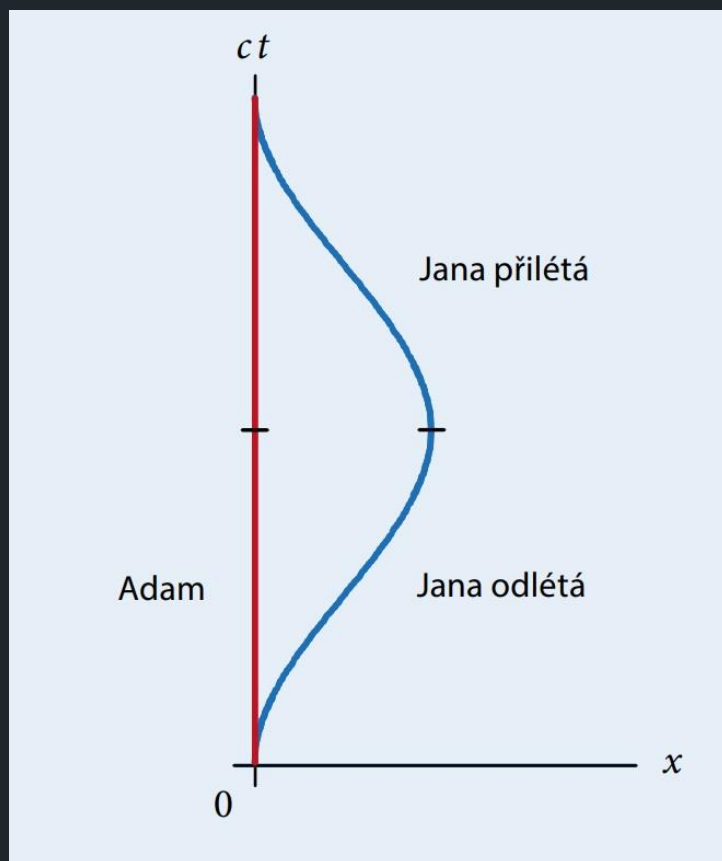
rychlost:

$$v(t) = \frac{g t}{\sqrt{1 + \left(\frac{g}{c} t\right)^2}}.$$

vzdálenost:

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{g}{c} t\right)^2} - 1 \right).$$

a také vztah mezi časy Adama t a Jany τ



Během *krátkého časového intervalu* je dán obvyklým vzorcem pro dilataci času, tedy

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t.$$

integrací:

$$\tau = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{g}{c}t\right)^2}}.$$

Po jednoduché substituci $z = \frac{g}{c}t$ dostaneme standardní integrál (viz str. 428 [11] nebo [12]) vedoucí na funkci „argument hyperbolického sinu“,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \operatorname{argsinh} z.$$

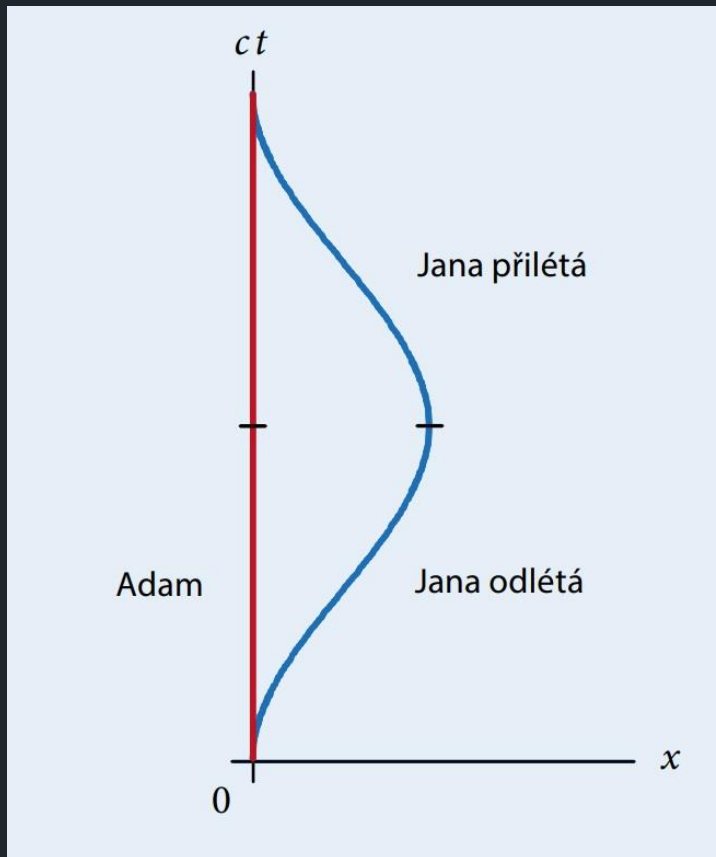
Po inverzi lze tedy výsledek vyjádřit

výsledek:

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right).$$

hlavní vztahy vyjádřené časem τ Jany v raketě

fyzikální užitečnost „divných“ hyperbolických funkcí: vhodné do seminářů



čas Adama:

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c} \tau\right).$$

vzdálenost:

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh\left(\frac{g}{c} \tau\right) - 1 \right)$$

rychlost:

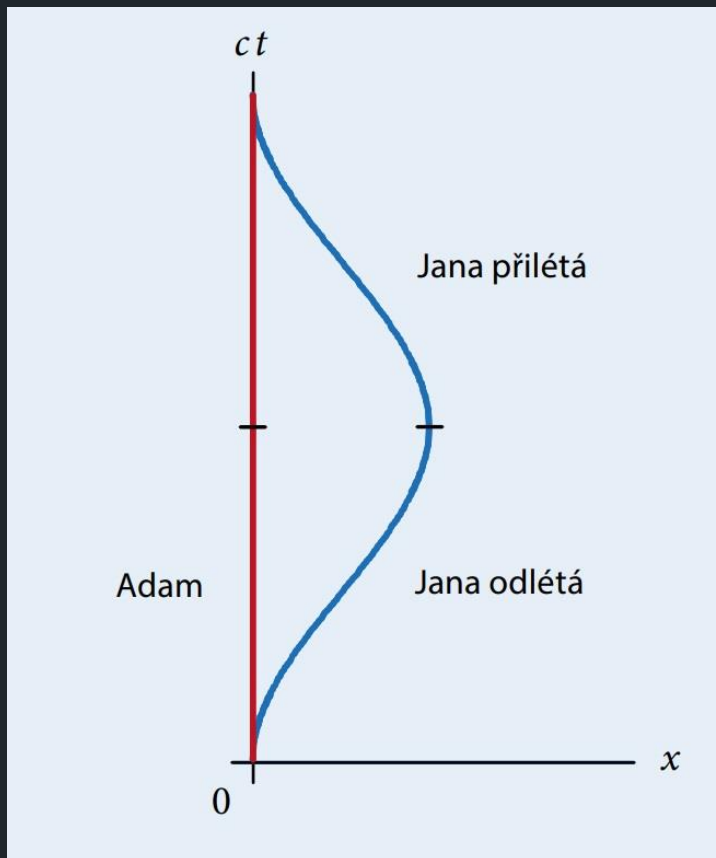
$$v(\tau) = c \tanh\left(\frac{g}{c} \tau\right).$$

asymptoticky exponenciální růst t a x , zatímco $v \rightarrow c$

aplikace vzorců

za 5 let $x = 84$ sv. let
za 10 let $x = 14\,779$ sv. let
velký dolet zrychlující rakety s Janou: za 15 let $x = 2\,582\,155$ sv. let

...



řešení paradoxu dvojčat je nyní zjevné:

Adam je stále v inerciální soustavě

Jana je stále v neinerciální soustavě

jejich situace tedy není fyzikálně stejná

hodiny Adama jdou mnohem rychleji
podle odvozeného exaktního vzorce

$$t = \frac{c}{g} \sinh\left(\frac{g}{c} \tau\right).$$

uvádíme i číselný rozbor na konkrétním příkladu

Pro ilustraci spočítejme výše odvozené vzorce pro konkrétní hodnoty. V zadání úlohy jsme již zmínili (stejně jako profesor Votruba ve své knize [5]) rychlost inerciálního pohybu rakety $v = 0,6 c$. V takovém případě má faktor ve vzorci (1) pro dilataci času hodnotu $5/4$, takže

$$\Delta t = 1,25 \Delta t_0. \quad (14)$$

Adam je proto po návratu Jany o 25 % starší než ona. Chceme-li stejný výsledek získat naším modelem konstantně zrychlující a zpomalující rakety, nesmíme zapomenout, že vzorec (11) platí jen pro každou čtvrtinu celé cesty – neboli $\Delta t = 4t$, $\Delta t_0 = 4\tau$, což po dosazení do (11) dává podmínku

$$1,25 \left(\frac{g}{4c} \Delta t_0 \right) = \sinh \left(\frac{g}{4c} \Delta t_0 \right). \quad (15)$$

Označíme-li výraz v závorkách pomocnou proměnnou

$$y = \frac{g}{4c} \Delta t_0, \quad (16)$$

dostaneme rovnici $\sinh y = 1,25 y$. Její numerické řešení je přibližně $y = 1,1827$, takže *Jana během celého letu zestárla o*

$$\Delta t_0 = 1,4457 \cdot 10^8 \text{ s} = 1673,3 \text{ dní}, \quad (17)$$

což je zhruba 4,6 roku, zatímco *Adam* zestárá o

$$\Delta t = 1,8071 \cdot 10^8 \text{ s} = 2091,6 \text{ dní}, \quad (18)$$

tedy o $5/4$ více.

Pro tyto hodnoty můžeme spočítat *maximální dosaženou rychlost rakety* (vždy uprostřed mezi Zemí a nejvzdálenějším místem), a to buď dosazením čtvrtiny hodnoty (17) do vzorce (13), anebo čtvrtiny hodnoty (18) do vzorce (5). V obojím případě dostaneme stejnou hodnotu

$$v_{\max} = 0,8283 c. \quad (19)$$

Této rychlosti raketa podle vzorce (12) dosáhla ve vzdálenosti

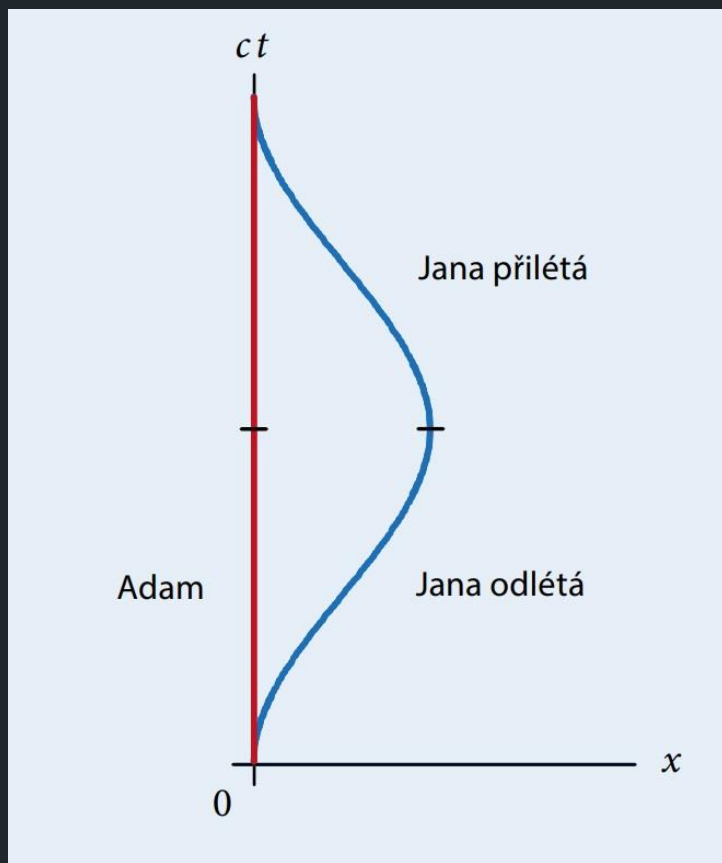
$$x_{\max} = 7,19 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0,76 \text{ světelného roku} \quad (20)$$

od Adama ve Sluneční soustavě, takže *největší vzdálenost*, kam raketa s Janou doletěla, byla 1,52 světelného roku.

Průměrná rychlost rakety během celé cesty byla proto podle Adamových hodin $0,53 c$.

souvislost s dilatací času v gravitačním poli

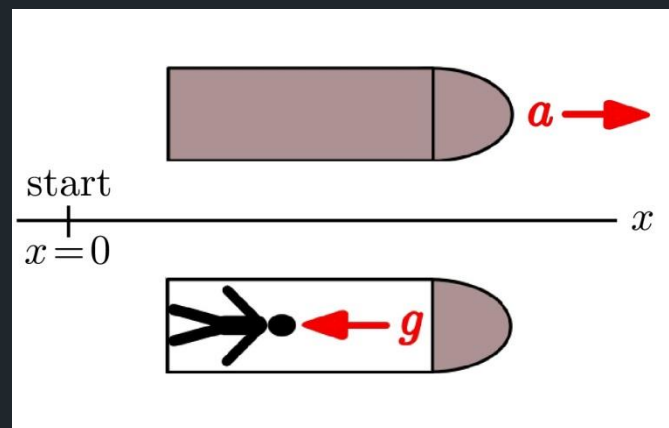
nyní lze ukázat konzistenci mezi vzorci speciální a obecné teorie relativity



klíčovou roli hraje Einsteinův princip ekvivalence

*Homogenní gravitační pole je totéž
co konstantní zrychlení vztažené soustavy.*

Jinými slovy: gravitační pole s konstantním tíhovým zrychlením g je *ekvivalentní* neinerciální soustavě s konstantním zrychlením $a = g$. Všechny fyzikální experimenty v nich dopadnou stejně, viz obr. 4.



vizualizace Einsteinova principu ekvivalence



ze seriálu *Génius* (2017), 5. epizoda, 16. minuta

Einstein z principu ekvivalence odvodil vzorce pro dilataci času v gravitačním poli – červený posuv světla

Gleichung (30) ist nach § 17 auch auf ein Koordinatensystem anzuwenden, in dem ein homogenes Schwerfeld wirkt. In diesem Falle haben wir $\Phi = \gamma \xi$ zu setzen, wobei Φ das Potential der Schwerkraft bedeutet, so daß wir erhalten

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) \quad (30a)$$

Wir haben zweierlei Zeiten für Σ definiert. Welcher von beiden Definitionen haben wir uns für die verschiedenen Fälle zu bedienen? Nehmen wir an, es existiere an zwei Orten verschiedenen Gravitations-

das *homogene* Gravitationsfeld abgeleitete Beziehung auch für anders gestaltete Felder gelte; es ist dann

$$(2a) \quad v_1 = v_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right) .$$

Dies (nach unserer Ableitung in erster Näherung gültige) Resultat gestattet zunächst folgende Anwendung. Es sei v_0 die

nahoře článek z Bernu (1907), dole z Prahy (1911)

Einsteinovo elegantní odvození

Einsteinovo odvození vzorce pro dilataci času v gravitačním poli

Uvažujme pevný disk otáčející se konstantní úhlovou rychlostí ω . Ve vzdálenosti R od středu se bod P pohybuje rychlostí $v = \omega R$. Podle vzorce (1) speciální relativity je tedy rozdíl v chodu lokálních hodin v P oproti hodinám ve vnější inerciální soustavě dán vztahem

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}}, \quad (R1)$$

kde τ je čas v bodě P disku, zatímco t je vnější čas. Nyní použijeme obvyklý vztah pro dostředivou sílu $F = m\omega^2 R$, která závisí na vzdálenosti R od středu. Pro toto silové působení lze zavést potenciál Φ , a to jako (záporně vzatou) energii, která je nezbytná k přemístění objektu (jednotkové hmotnosti m) z bodu P do středu disku. Triviální integrací $F/m = \omega^2 R$ přes R tak dostaneme vztah $\Phi = -\frac{1}{2}\omega^2 R^2$. Vzorec (R1) lze tedy přepsat do tvaru

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}}. \quad (R2)$$

Podle principu ekvivalence musí stejný vzorec platit i v gravitačním poli s potenciálem Φ . Pro slabá pole $|\Phi| \ll c^2$ (což ve vesmíru je skoro všude vyjma okolí černých děr a neutronových hvězd) lze převrácenou odmocninu v (R2) aproximovat Taylorovým rozvojem

$$t = \tau \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \tau \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad (R3)$$

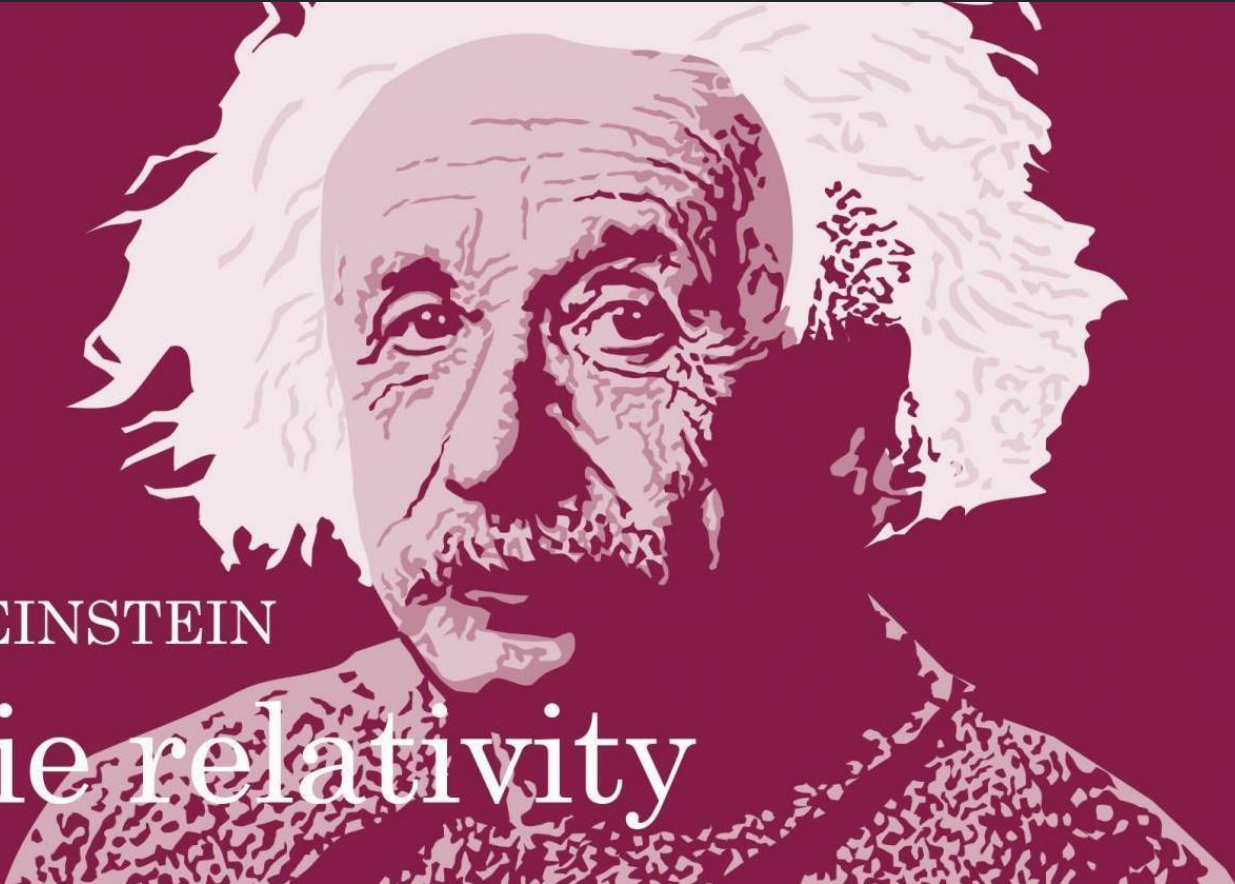
což je hledaný vzorec (23) pro dilataci času v gravitačním poli. V každém místě, kde je $\Phi < 0$, čas plyne pomaleji oproti času ve vzdáleném referenčním místě, kde je $\Phi = 0$, protože $\tau < t$. Ve stejném poměru bude menší i frekvence periodických dějů (například vyzařovaného světla)

$$f = f_0 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx f_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (R4)$$

Frekvence f v silnějším gravitačním poli poblíž hmotného tělesa je tedy nižší nežli referenční frekvence f_0 daleko od tělesa, $f < f_0$. Světlo se proto bude jevit červenější.

Vzorce (R3) a (R4) platí obecně pro každé statické gravitační pole. Speciálně i pro potenciál *sférického objektu* hmotnosti M , který je ve vzdálenosti r od centra dán newtonovským vzorcem $\Phi = -GM/r$, kde G je gravitační konstanta.

dle III. dodatku Einsteinovy knihy *Teorie relativity*, str. 238–239

A black and white portrait of Albert Einstein, showing his characteristic wild hair and mustache, looking slightly to the right. The portrait is set against a dark background.

ALBERT EINSTEIN

Teorie relativity

ukazujeme, že vzorce pro dilataci času speciální a obecné relativity dávají stejný výsledek

Začneme tím, že zavedeme (jak je v literatuře obvyklé) bezrozměrný faktor γ . Ten udává míru dilatace času

$$t = \gamma \tau \quad (21)$$

při pohybu rychlostí v , viz (1), ale také nárůst setrvačné hmotnosti vzorcem $m = \gamma m_0$. Pro pohyb zrychlené rakety má tento faktor tvar

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1 + \left(\frac{g}{c} t\right)^2} = \cosh\left(\frac{g}{c} \tau\right), \quad (22)$$

kde jsme pro vyjádření rychlosti v závislosti na čase t Adama a τ Jany použili vzorce (5) a (11).

Dále připomeneme důležitý vzorec obecné teorie relativity pro *dilataci času v gravitačním poli* neboli *červený posuv světla*:

$$\frac{t}{\tau} = 1 - \frac{\Phi}{c^2}. \quad (23)$$

Zde Φ je rozdíl gravitačních potenciálů (newtonovských) mezi místy, kde se nacházejí dvojice identické hodiny, z nichž jedny měří čas t , zatímco druhé měří čas τ .

Podle principu ekvivalence můžeme *všechny efekty* pozorované ve zrychlené raketě Janou připsat homogennímu gravitačnímu poli. Lze tedy použít vzorec (23) pro odpovídající dilataci času. Musíme jenom spočítat příslušný gravitační potenciál Φ . Protože gravitační pole je homogenní, platí obvyklý vzorec pro potenciální energii $V = -mgx$, takže

$$\Phi \equiv \frac{V}{m} = -gx. \quad (24)$$

Na počátku jsou hodiny Adama a Jany na *stejném* místě $x = 0$, takže $\Phi = 0$, a tudíž podle (23) $t = \tau$. Oboje hodiny tikají stejně a jsou synchronizované.

Pak však začne raketa zrychlovat. Díky principu ekvivalence vnímá Jana uvnitř rakety toto konstantní zrychlování jako homogenní gravitační pole (navíc stále s příjemným „pozemským tíhovým zrychlením“ $g = a = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), pro které platí vztah (24), kde x je vzdálenost rakety ve vztahu k Adamovi. Dosadíme-li do (24) ze vzorce (6) a vyjádříme pomocí nich (23), dostaneme vztah

$$\frac{t}{\tau} = \sqrt{1 + \left(\frac{g}{c} t\right)^2}. \quad (25)$$

vzorec (25) dle OTR je úplně stejný jako vzorec (21) s (22) dle STR

Q. E. D.

speciální a obecná
teorie relativity

jsou navzájem konzistentní

závěrečné shrnutí pro pedagogy

Možný postup výkladu je následující:

1. Užije se standardní vztah pro dilataci času (1), ze kterého vyplýne, že z hlediska pozorovatele ve Sluneční soustavě (Adama) plyne čas v kosmické lodi (Jany) pomaleji.
2. Zdánlivý rozpor, totiž že obě soustavy jsou podle relativity rovnocenné, a tudíž by naopak měl plynout pomaleji také čas Adama vůči Janě, se vysvětlí asymetrií jejich historie. Pro přímé porovnání jejich hodin je totiž potřeba dopravit je *na stejné místo*, ale jenom Jana při tomto ději zažívá zrychlení (a zpomalení) své rakety, zatímco Adam je po celou dobu v inerciální vztažné soustavě.
3. Konkrétní řešení v rámci speciální teorie relativity, které lze najít například ve vysokoškolských učebnicích [5] nebo [8], vyžaduje vzít do úvahy a pečlivě započítat vzájemné vztahy mezi *třemi* inerciálními soustavami, totiž Adama, vzdalující se Jany a přibližující se Jany (respektive Jitky). Koncepční podstatou řešení „paradoxu“ je relativita současnosti, plynoucí z Lorentzovy transformace: kvůli tomu Jana *těsně před* otočkou rakety a Jana *těsně po* otočce rakety (neboli Jitka) bude za „současné“ považovat *dvě různé události v Adamově historii*, mezi nimiž „náhle“ uplyne hodně dlouhý čas. Podrobný rozbor tohoto jevu bohužel není úplně přehledný a přesahuje rámec střední školy (viz obr. 3 a rámeček 1).
4. Domníváme se, že je vhodné vyhnout se úvahám o „náhlém přeskoku“ Jany z jedné inerciální soustavy do druhé v okamžiku otočky její rakety. Při tom totiž dochází „k nekonečnému zrychlení“, jehož vliv na chod Janinych hodin není ze speciální teorie relativity vůbec jasný a odůvodněný. Dostáváme se dokonce mimo její rámec do obecné teorie relativity, která platí ve všech vztažných soustavách, tedy i zrychlených (neinerciálních).
5. Navrhujeme proto jako didakticky přesvědčivější řešení „paradoxu“ dvojčat uvažovat takový pohyb Jany, kdy její raketa *po celou dobu zrychluje* (resp. zpomaluje) *s konstantním zrychlením*, viz obr. 5. Řešením příslušné pohybové rovnice (2) lze získat všechny potřebné vzorce, zejména vztah (11) mezi vlastním časem Jany v raketě a vlastním časem Adama ve Sluneční soustavě. Velmi zajímavé a poměrně jednoduché jsou také vzorce pro vzdálenost a rychlost Janiny rakety (6) a (5), vyjádřené pomocí času t Adama, resp. (12) a (13) pomocí vlastního času τ Jany.
6. Tyto vzorce lze dobře ilustrovat dosazením konkrétních hodnot, viz vzorce (14) až (20). Přitom jsou použity a na zajímavém fyzikálním případě s relativistickou raketou procvičeny hyperbolické funkce, které na střední škole sice nejsou běžné, ale studenti je najdou na svých kalkulačkách.
7. Spočítaná úloha s konstantně zrychlující raketou může potom sloužit jako *přirozený most mezi speciální a obecnou teorií relativity*: jedná se o přechod od fyzikální teorie platné pouze v inerciálních soustavách k teorii platné v libovolných neinerciálních soustavách. Tato zobecněná relativistická teorie podle Einsteina zahrnuje i gravitaci.
8. Klíčovou roli při těchto úvahách hraje *princip ekvivalence*, což je výchozí princip obecné relativity. Princip ekvivalence (dnes experimentálně ověřovaný s obrovskou přesností) říká, že *účinky konstantního zrychlení neinerciální vztažné soustavy a homogenního gravitačního pole od sebe nelze za žádných okolností odlišit*. Lze ho velmi hezky demonstrovat a zdůvodnit Einsteinovým myšlenkovým pokusem s výtahem (obr. 4 a obr. 7).
9. Pomocí principu ekvivalence lze převést výpočty, které se týkaly chodu hodin Jany ve zrychlené raketě, na chod hodin v gravitačním poli. Tím se ukáže konzistence s výpočtem podle slavného Einsteinoва vzorce (23) pro *dilataci času v gravitačním poli* (neboli pro červený posuv světla) z roku 1907, resp. 1911 (obr. 6).
10. Tento vzorec (který lze srozumitelně odůvodnit Einsteinovými úvahami o rotujícím disku, viz rámeček 2) říká, že *v silnějším gravitačním poli jdou hodiny pomaleji*: podíl časových intervalů je určen *rozdílem gravitačních potenciálů Φ v místech obou od sebe vzdálených hodin*.
11. Výpočet celkové dilatace času během zrychleného a zpomaleného letu rakety s Janou vůči Adamovi užitím obecné relativity vede k úplně stejnému finálnímu výsledku, který lze dostat správně použitým vzorcem speciální relativity (1) pro tři inerciální soustavy, jak je detailně provedeno v učebnicích [5] a [8]: vztahy (21) a (26) jsou identické. Když fyzikálně správnými úvahami aplikujeme matematické vzorce speciální relativity i obecné relativity, **žádný rozpor nevzniká. Výsledky jsou jednoznačné.**
12. Závěrem se lze studentům zmínit o tom, že v kontextu Einsteinovy teorie gravitace existují dokonce i přesná řešení popisující zakřivený prostoročas v okolí zrychlujícího a velmi hmotného objektu – takzvaná Kinnersleyho fotonová raketa (27) a její zobecnění.

Toto shrnutí hlavních bodů článku snad opravňuje naše tvrzení, že „paradox“ dvojčat je přirozeněji a konzistentněji řešitelný v rámci Einsteinovy obecné relativity, jež rozšiřuje platnost relativistických zákonů také na neinerciální soustavy a současně je i teorií gravitace.

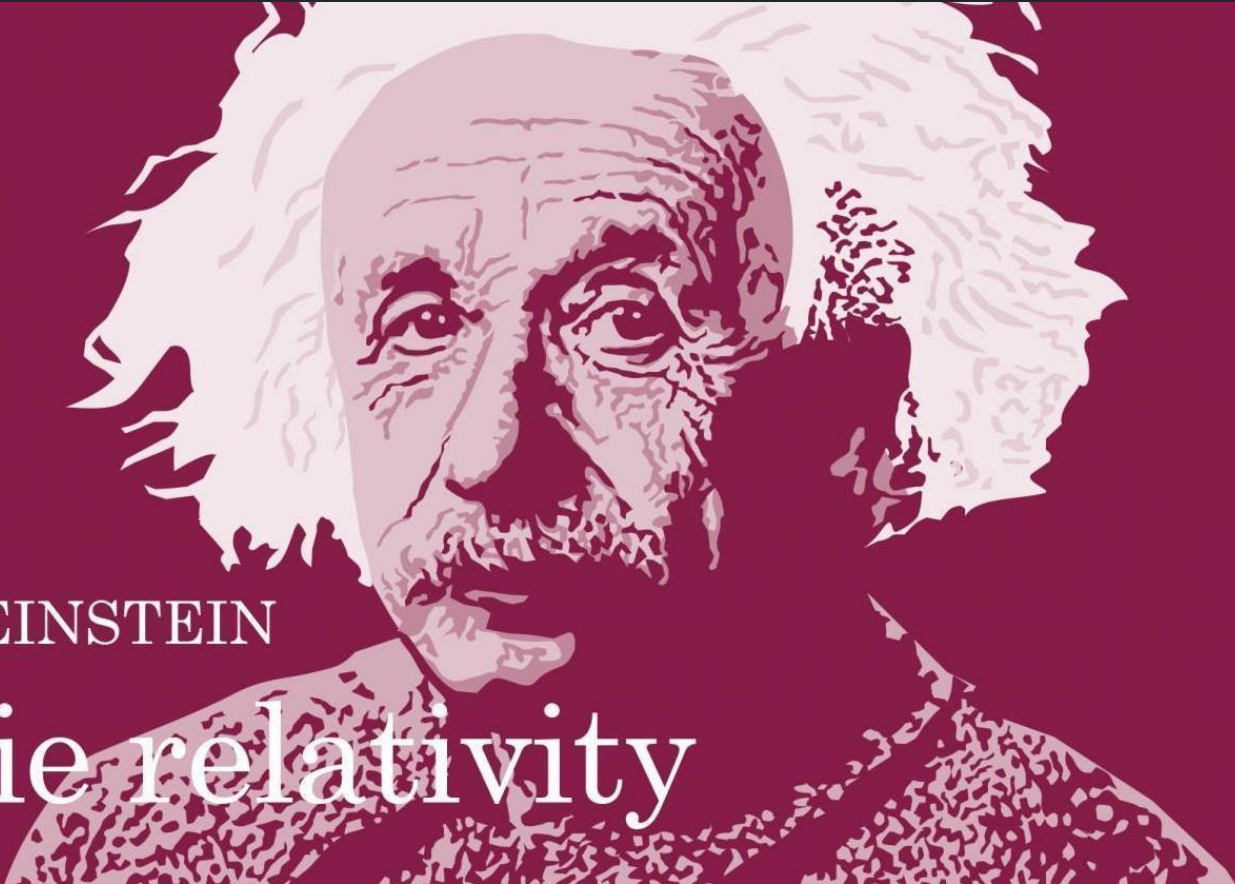
Poděkování

JP děkuje Grantové agentuře ČR za dlouholetou podporu výzkumu přesných prostoročasů, aktuálně projektu číslo 20-05421S. Oba autoři děkují prof. Janu Novotnému za jeho rady a komentáře.

literatura

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. Vutium a Prometheus, Brno 2000; druhé vydání Vutium, Brno 2013.
- [2] K. Bartuška: *Speciální teorie relativity*. 3. přepracované vydání. Prometheus, Praha 2001.
- [3] L. Dvořák: *Teorie relativity*. Prozatímní učební text k přednášce NUFY027. Katedra didaktiky fyziky MFF UK, Praha 2015. Dostupné online na: <http://kdf.mff.cuni.cz>
- [4] J. S. Al-Khalili: *Paradox*. Leda, Rozmluvy, Voznice, Praha 2014.
- [5] V. Votruba: *Základy speciální teorie relativity*. Academia, Praha 1977.
- [6] E. S. Lowry: The clock paradox. *American Journal of Physics* **31**, 59 (1963).
- [7] O. Semerák: *Speciální teorie relativity. Text k přednášce pro MFF UK*. Ústav teoretické fyziky MFF UK, Praha 2012.
- [8] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.
- [9] J. Horský: *Úvod do teorie relativity*. SNTL, Praha 1975.
- [10] C. M. Will: The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity* **17**, 4 (2014). Dostupné online na: <http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4>
- [11] K. Rektorys a kol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha 1981.
- [12] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperbolické_funkce, resp. https://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperbolometrická_funkce
- [13] B. F. Schutz: *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [14] P. Krtouš: *Výlet ke hvězdám – Paradox dvojčat*. Demonstrační program a interaktivní animace, Praha 2001–2004. Dostupné online na: <http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/StarTrip/StarTrip.html>
- [15] C. Rovelli: *Řád času*. Dokořán, Argo, Praha 2020.
- [16] A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* **4**, 411–462 (1907).
- [17] A. Einstein: Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. *Annalen der Physik* **35**, 898–908 (1911).
- [18] A. Einstein: *Teorie relativity speciální i obecná*. František Borový, Praha 1923. Včetně všech pozdějších dodatků přetištěna v knize *Teorie relativity*, Vutium, Brno 2005.
- [19] K. S. Thorne: *Černé díry a zborcený čas – Podivuhodné dědictví Einsteinova génia*. Mladá fronta, Praha 2004.
- [20] W. Kinnersley: Field of an arbitrarily accelerating point mass. *Physical Review* **186**, 1335–1336 (1969).
- [21] W. B. Bonnor: The photon rocket. *Classical and Quantum Gravity* **11**, 2007–2012 (1994).
- [22] J. Podolský: Photon rockets in (anti-)de Sitter universe. *Physical Review D* **78**, 044029 (2008). Dostupné na: <https://arxiv.org/abs/0806.2966>
- [23] J. B. Griffiths, J. Podolský: *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge 2009.
- [24] J. Podolský: Photon rockets moving arbitrarily in any dimension. *International Journal of Modern Physics D* **20**, 335–360 (2011). Dostupné na: <https://arxiv.org/abs/1006.1583>

děkuji za Vaši pozornost

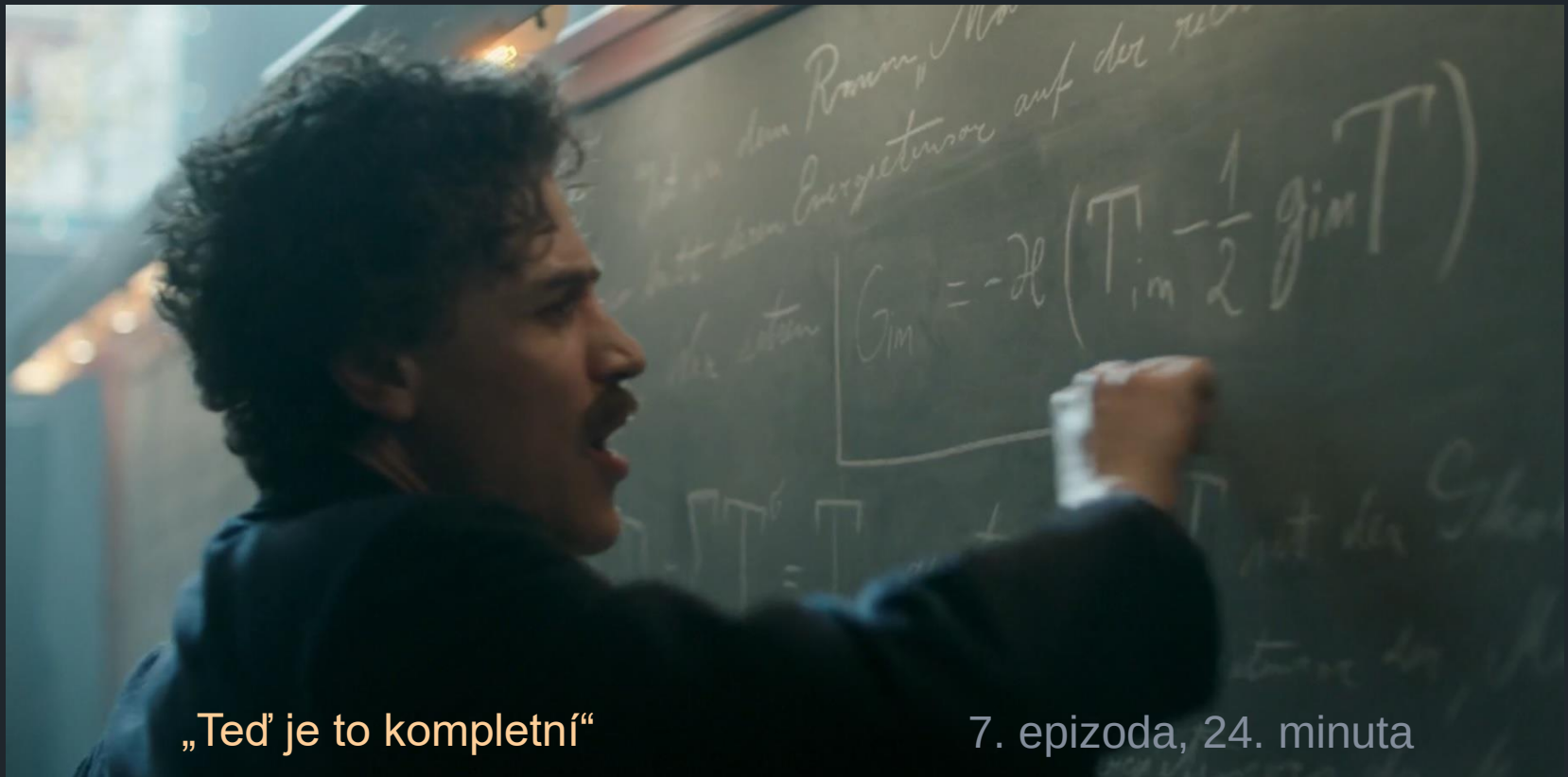
A black and white portrait of Albert Einstein, showing his characteristic wild, white hair and a full white beard. He is looking slightly to the right of the camera with a thoughtful expression. The portrait is set against a dark, solid background.

ALBERT EINSTEIN

Teorie relativity

vlny gravitace
předpověděl Einstein

25. 11. 1915 v Berlíně **Albert Einstein** píše rovnice gravitačního pole



Génius.

Einstein předpovídá gravitační vlny: 22. 6. 1916

688 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 22. Juni 1916

Aproximativní integrace rovnic gravitačního pole

Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. EINSTEIN.

Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich damit begnügen, die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung zu berechnen. Dabei bedient man sich mit Vorteil der imaginären Zeitvariable $x_4 = it$ aus denselben Gründen wie in der speziellen Relativitätstheorie. Unter »erster Näherung« ist dabei verstanden, daß die durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \quad (1)$$

definierten Größen $\gamma_{\mu\nu}$, welche linearen orthogonalen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen 1 als kleine Größen behandelt werden können, deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Dabei ist $\delta_{\mu\nu} = 1$ bzw. $\delta_{\mu\nu} = 0$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$.

Wir werden zeigen, daß diese $\gamma_{\mu\nu}$ in analoger Weise berechnet werden können wie die retardierten Potentiale der Elektrodynamik. Daraus folgt dann zunächst, daß sich die Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Wir werden im Anschluß an diese allgemeine Lösung die Gravitationswellen und deren Entstehungsweise untersuchen. Es hat sich gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Wahl des Bezugssystems gemäß der Bedingung $g = |g_{\mu\nu}| = -1$ für die Berechnung der Felder in erster Näherung nicht vorteilhaft ist. Ich wurde hierauf aufmerksam durch eine briefliche Mitteilung des Astronomen DE SITTER, der fand, daß man durch eine andere Wahl des Bezugssystems zu einem einfacheren Ausdruck des Gravitationsfeldes eines ruhenden Massenpunktes gelangen kann, als ich ihn früher gegeben hatte¹. Ich stütze mich daher im folgenden auf die allgemein invarianten Feldgleichungen.

[1] ¹ Sitzungsber. XLVII, 1915, S. 833.

EINSTEIN: Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation 689

§ 1. Integration der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes.

Die Feldgleichungen lauten in ihrer kovarianten Form [3]

$$R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right)$$

$$R_{\mu\nu} = -\sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} + \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \mu\alpha \\ \nu \end{matrix} \right\} - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \nu\alpha \\ \mu \end{matrix} \right\}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \sum_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\}$$

Dabei bedeuten die geschweiften Klammern Symbole, $T_{\mu\nu}$ den kovarianten Energie zugehörigen Skalar. Die Gleichungen (1) liegen in der Näherung die durch Entwickeln unmittel-

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\nu}} - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\mu}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \left(\sum_{\alpha} \gamma_{\alpha\alpha} \right)$$

Das letzte Glied der linken Seite stammt von mir bevorzugten Koordinatenwahlen (2) lassen sich durch den Ansatz

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} + \psi \delta_{\mu\nu}$$

lösen, wobei die $\gamma'_{\mu\nu}$ der zusätzlichen Bedingung

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\alpha}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

genügen. Durch Einsetzen von (3) in (2) der linken Seite

$$-\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\alpha}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} \left(\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} \right) + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}}$$

Der Beitrag des zweiten, dritten und fünften Gliedes verschwindet, wenn ψ gemäß der Gleichung

$$\sum_{\alpha} \gamma'_{\alpha\alpha} + 2\psi = 0 \quad (5)$$

gewählt wird, was wir festsetzen. Mit Rücksicht hierauf erhält man an Stelle von (2)



vlňová rovnice pro slabé poruchy pole

690 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 22. Juni 1916

$$\sum_a \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} \left(\gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_a \gamma'_{aa} \right) = 2 \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_a T_{aa} \right)$$

oder

vlňová rovnice se zdrojem !

$$\sum_a \frac{\partial^2}{\partial x_a^2} \gamma'_{\mu\nu} = 2 \kappa T_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Es ist hierzu zu bemerken, daß Gleichung (6) mit der Gleichung (4) im Einklang ist. Denn es ist zunächst leicht zu zeigen, daß bei der von uns erstrebten Genauigkeit der Impulsenergiesatz für die Materie

první přímá detekce gravitačních vln až po 100 letech

PRL 116, 061102 (2016)

 Selected for a Viewpoint in *Physics*
PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
12 FEBRUARY 2016



Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

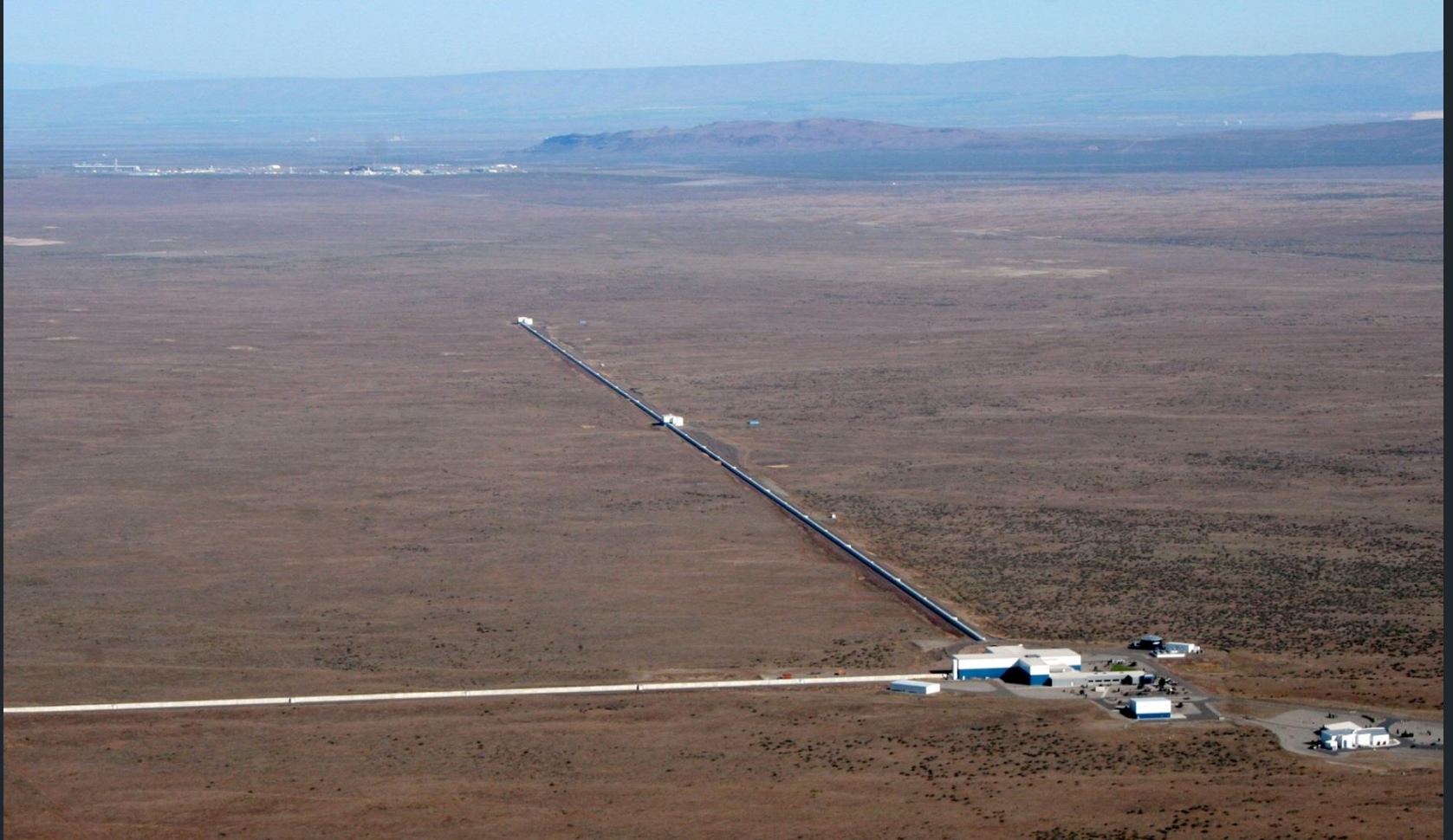
On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of 1.0×10^{-21} . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than 5.1σ . The source lies at a luminosity distance of 410^{+160}_{-180} Mpc corresponding to a redshift $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$. In the source frame, the initial black hole masses are $36^{+5}_{-4}M_{\odot}$ and $29^{+4}_{-4}M_{\odot}$, and the final black hole mass is $62^{+4}_{-4}M_{\odot}$, with $3.0^{+0.5}_{-0.5}M_{\odot}c^2$ radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

1010 autorů, 133 vědeckých institucí

LIGO Hanford

4 km



Credit : Caltech/MIT/LIGO Lab

LIGO Livingston

4 km



Credit : Caltech/MIT/LIGO Lab

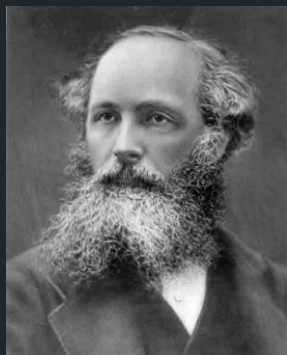
zdrojem byla srážka velkých černých děr



výkon $200 M_{\odot} c^2/s$: 10x více než svítily všechny hvězdy ve vesmíru !!!

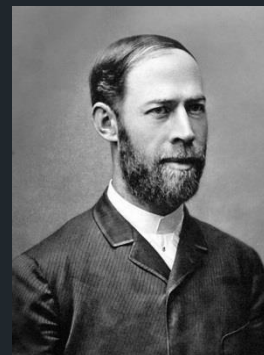
vskutku historická událost

elmag



James Clerk Maxwell (1831–1879)
1864 teorie pole a předpověď elmag vln

24 let



telekomunikační
revoluce

Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894)
1887–8 experimentální ověření

gravitace



Albert Einstein (1879–1955)
1915 teorie pole a předpověď gravitačních vln

100 let



nové možnosti
studia vesmíru:
stojíme na prahu
nových objevů...

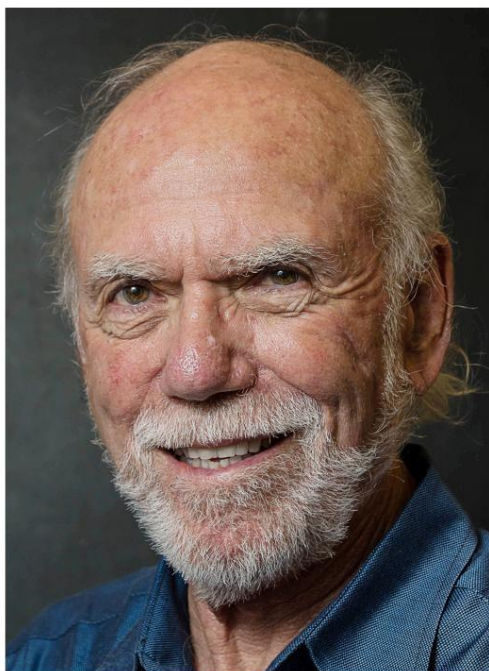
LIGO & Virgo Scientific Collaboration
2016 experimentální ověření

Nobelova cena za fyziku 2017

hlavní představitelé LIGO/VIRGO Collaboration



Rainer Weiss



Barry C. Barish



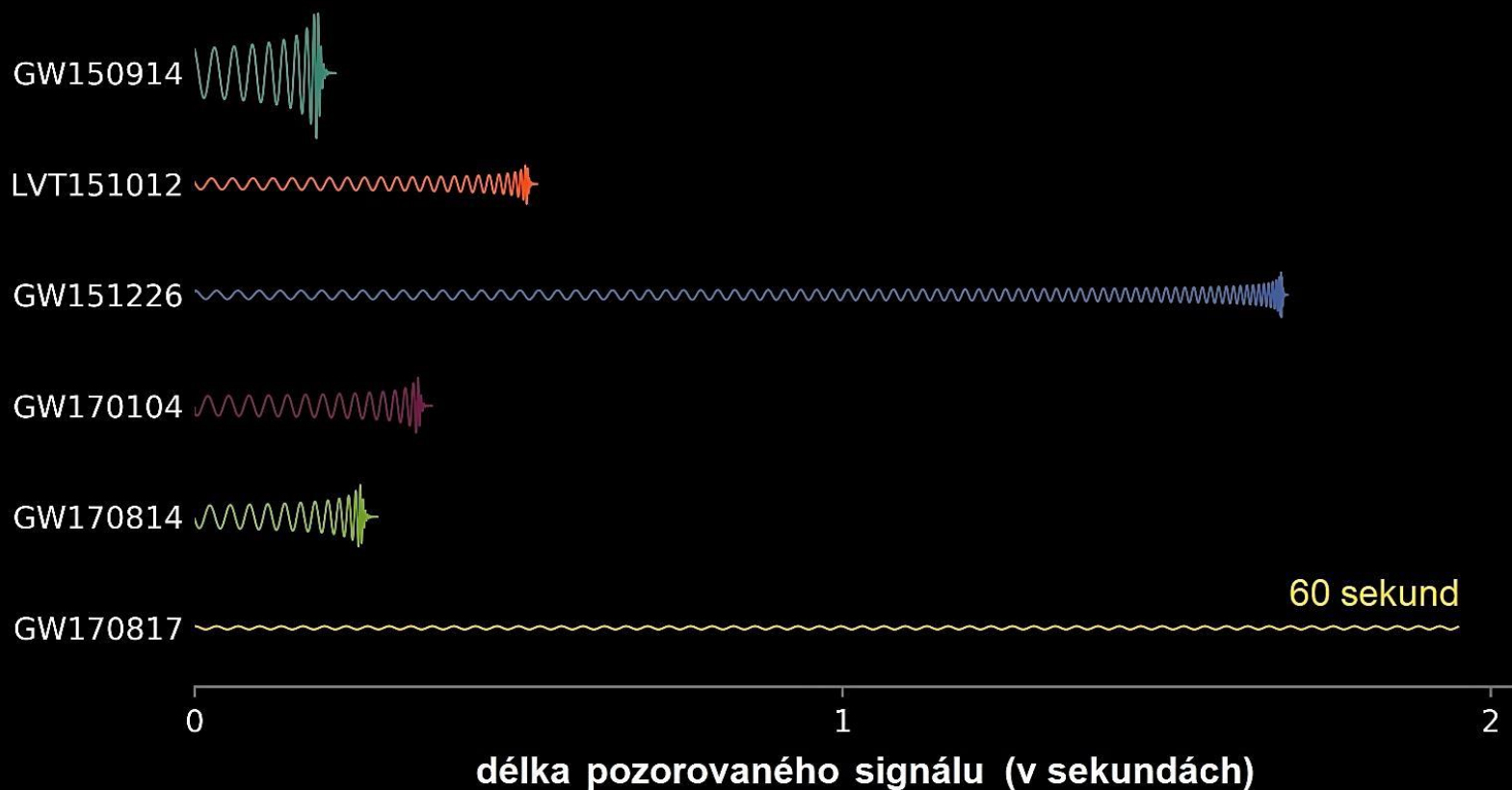
Kip S. Thorne

„za rozhodující příspěvky k detektoru LIGO a pozorování gravitačních vln“

po první detekci gravitační vln
14. září 2015

následovaly další objevy

shrnutí gravitačních vln oznámených do prosince 2018



kompletní výsledky měření O1 a O2

katalog detekcí GWTC-1
Gravitational-Wave Transient Catalog 1

zveřejněný 1.12. 2018
(krátkodobé, dočasné signály)

10 srážek černých děr
1 srážka neutronových hvězd

Event	$m_1/M_\odot$	$m_2/M_\odot$	$M/M_\odot$	χ_{eff}	$M_f/M_\odot$	a_f	$E_{\text{rad}}/(M_\odot c^2)$	$\ell_{\text{peak}}/(\text{erg s}^{-1})$	d_L/Mpc	z	$\Delta\Omega/\text{deg}^2$
GW150914	$35.6^{+4.8}_{-3.0}$	$30.6^{+3.0}_{-4.4}$	$28.6^{+1.6}_{-1.5}$	$-0.01^{+0.12}_{-0.13}$	$63.1^{+3.3}_{-3.0}$	$0.69^{+0.05}_{-0.04}$	$3.1^{+0.4}_{-0.4}$	$3.6^{+0.4}_{-0.4} \times 10^{56}$	430^{+150}_{-170}	$0.09^{+0.03}_{-0.03}$	179
GW151012	$23.3^{+14.0}_{-5.5}$	$13.6^{+4.1}_{-4.8}$	$15.2^{+2.0}_{-1.1}$	$0.04^{+0.28}_{-0.19}$	$35.7^{+9.9}_{-3.8}$	$0.67^{+0.13}_{-0.11}$	$1.5^{+0.5}_{-0.5}$	$3.2^{+0.8}_{-1.7} \times 10^{56}$	1060^{+540}_{-480}	$0.21^{+0.09}_{-0.09}$	1555
GW151226	$13.7^{+8.8}_{-3.2}$	$7.7^{+2.2}_{-2.6}$	$8.9^{+0.3}_{-0.3}$	$0.18^{+0.20}_{-0.12}$	$20.5^{+6.4}_{-1.5}$	$0.74^{+0.07}_{-0.05}$	$1.0^{+0.1}_{-0.2}$	$3.4^{+0.7}_{-1.7} \times 10^{56}$	440^{+180}_{-190}	$0.09^{+0.04}_{-0.04}$	1033
GW170104	$31.0^{+7.2}_{-5.6}$	$20.1^{+4.9}_{-4.5}$	$21.5^{+2.1}_{-1.7}$	$-0.04^{+0.17}_{-0.20}$	$49.1^{+5.2}_{-3.9}$	$0.66^{+0.08}_{-0.10}$	$2.2^{+0.5}_{-0.5}$	$3.3^{+0.6}_{-0.9} \times 10^{56}$	960^{+430}_{-410}	$0.19^{+0.07}_{-0.08}$	924
GW170608	$10.9^{+5.3}_{-1.7}$	$7.6^{+1.3}_{-2.1}$	$7.9^{+0.2}_{-0.2}$	$0.03^{+0.19}_{-0.07}$	$17.8^{+3.2}_{-0.7}$	$0.69^{+0.04}_{-0.04}$	$0.9^{+0.0}_{-0.1}$	$3.5^{+0.4}_{-1.3} \times 10^{56}$	320^{+120}_{-110}	$0.07^{+0.02}_{-0.02}$	396
GW170729	$50.6^{+16.6}_{-10.2}$	$34.3^{+9.1}_{-10.1}$	$35.7^{+6.5}_{-4.7}$	$0.36^{+0.21}_{-0.25}$	$80.3^{+14.6}_{-10.2}$	$0.81^{+0.07}_{-0.13}$	$4.8^{+1.7}_{-1.7}$	$4.2^{+0.9}_{-1.5} \times 10^{56}$	2750^{+1350}_{-1320}	$0.48^{+0.19}_{-0.20}$	1033
GW170809	$35.2^{+8.3}_{-6.0}$	$23.8^{+5.2}_{-5.1}$	$25.0^{+2.1}_{-1.6}$	$0.07^{+0.16}_{-0.16}$	$56.4^{+5.2}_{-3.7}$	$0.70^{+0.08}_{-0.09}$	$2.7^{+0.6}_{-0.6}$	$3.5^{+0.6}_{-0.9} \times 10^{56}$	990^{+320}_{-380}	$0.20^{+0.05}_{-0.07}$	340
GW170814	$30.7^{+5.7}_{-3.0}$	$25.3^{+2.9}_{-4.1}$	$24.2^{+1.4}_{-1.1}$	$0.07^{+0.12}_{-0.11}$	$53.4^{+3.2}_{-2.4}$	$0.72^{+0.07}_{-0.05}$	$2.7^{+0.4}_{-0.3}$	$3.7^{+0.4}_{-0.5} \times 10^{56}$	580^{+160}_{-210}	$0.12^{+0.03}_{-0.04}$	87
GW170817	$1.46^{+0.12}_{-0.10}$	$1.27^{+0.09}_{-0.09}$	$1.186^{+0.001}_{-0.001}$	$0.00^{+0.02}_{-0.01}$	≤ 2.8	≤ 0.89	≥ 0.04	$\geq 0.1 \times 10^{56}$	40^{+10}_{-10}	$0.01^{+0.00}_{-0.00}$	16
GW170818	$35.5^{+7.5}_{-4.7}$	$26.8^{+4.3}_{-5.2}$	$26.7^{+2.1}_{-1.7}$	$-0.09^{+0.18}_{-0.21}$	$59.8^{+4.8}_{-3.8}$	$0.67^{+0.07}_{-0.08}$	$2.7^{+0.5}_{-0.5}$	$3.4^{+0.5}_{-0.7} \times 10^{56}$	1020^{+430}_{-360}	$0.20^{+0.07}_{-0.07}$	39
GW170823	$39.6^{+10.0}_{-6.6}$	$29.4^{+6.3}_{-7.1}$	$29.3^{+4.2}_{-3.2}$	$0.08^{+0.20}_{-0.22}$	$65.6^{+9.4}_{-6.6}$	$0.71^{+0.08}_{-0.10}$	$3.3^{+0.9}_{-0.8}$	$3.6^{+0.6}_{-0.9} \times 10^{56}$	1850^{+840}_{-840}	$0.34^{+0.13}_{-0.14}$	1651

signál

hmotnosti

výsledná hmotnost a spin

energie

vzdálenost

lokalizace

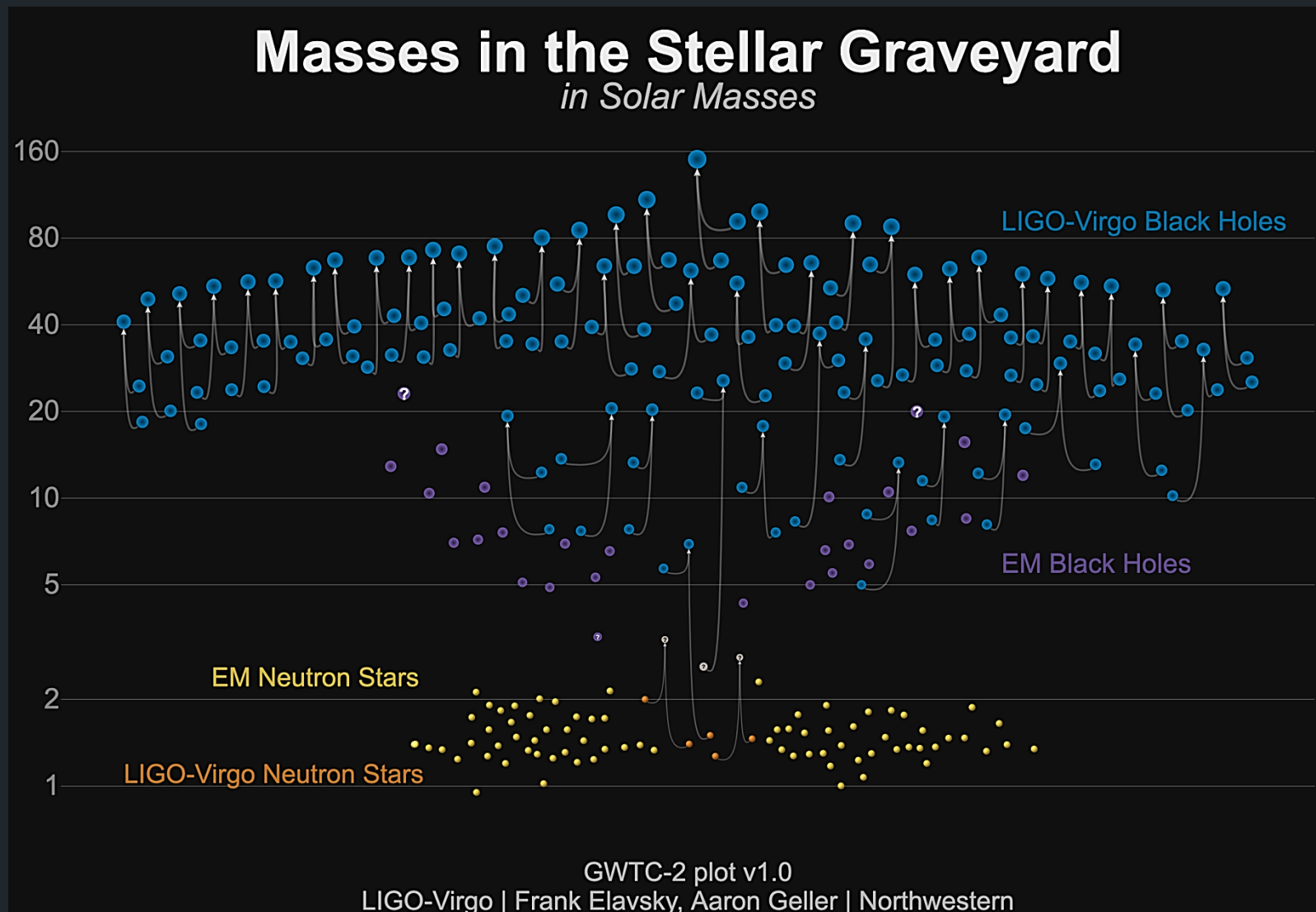
následoval třetí běh O3 měření

začal 1. 4. 2019 a skončil 27. 3. 2020

o měsíc dřív kvůli pandemii COVID-19

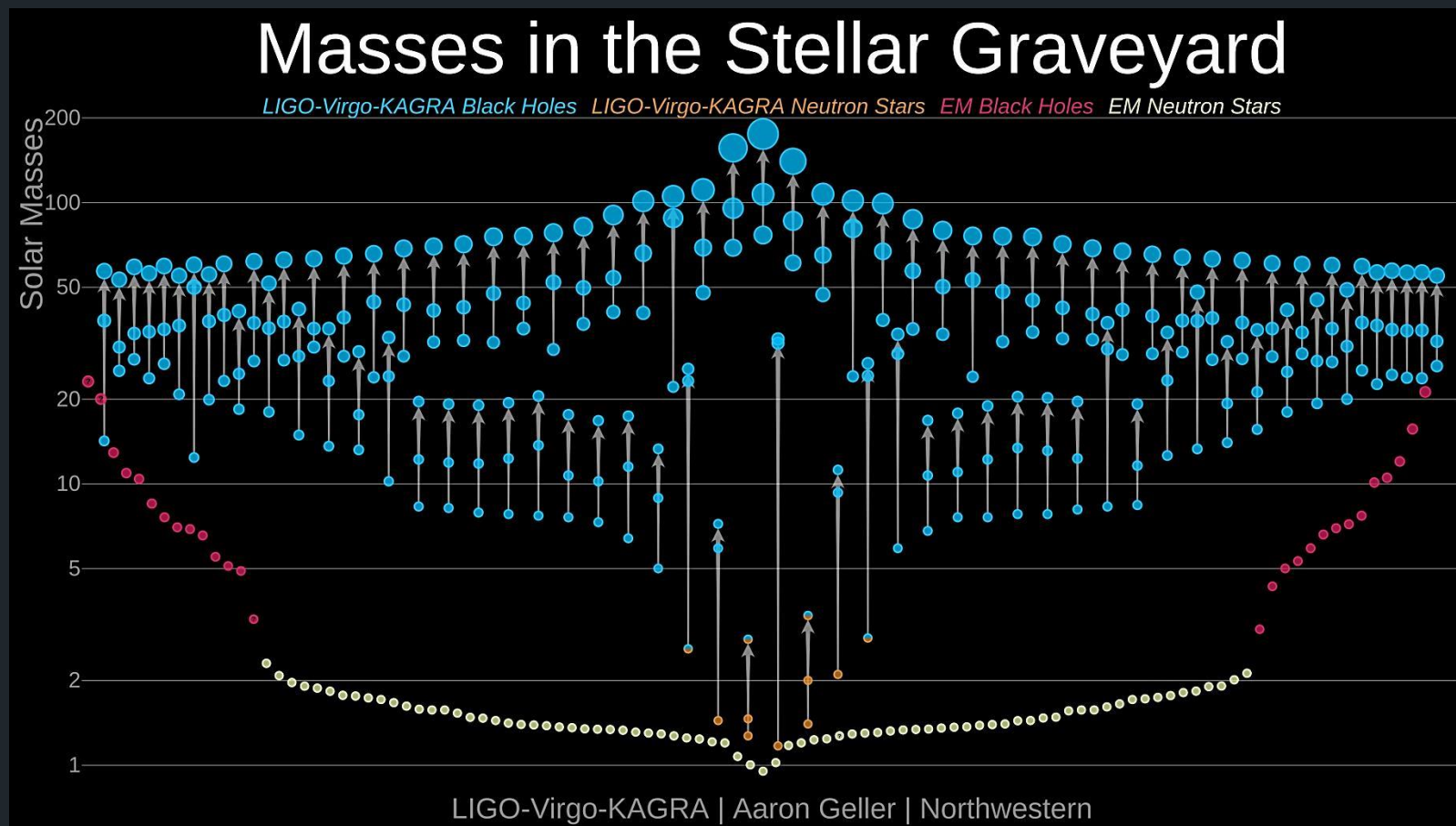
80 kandidátů tedy 8 x víc signálů než O1+O2

katalog detekcí GWTC-2 zveřejněný 28.10.2020

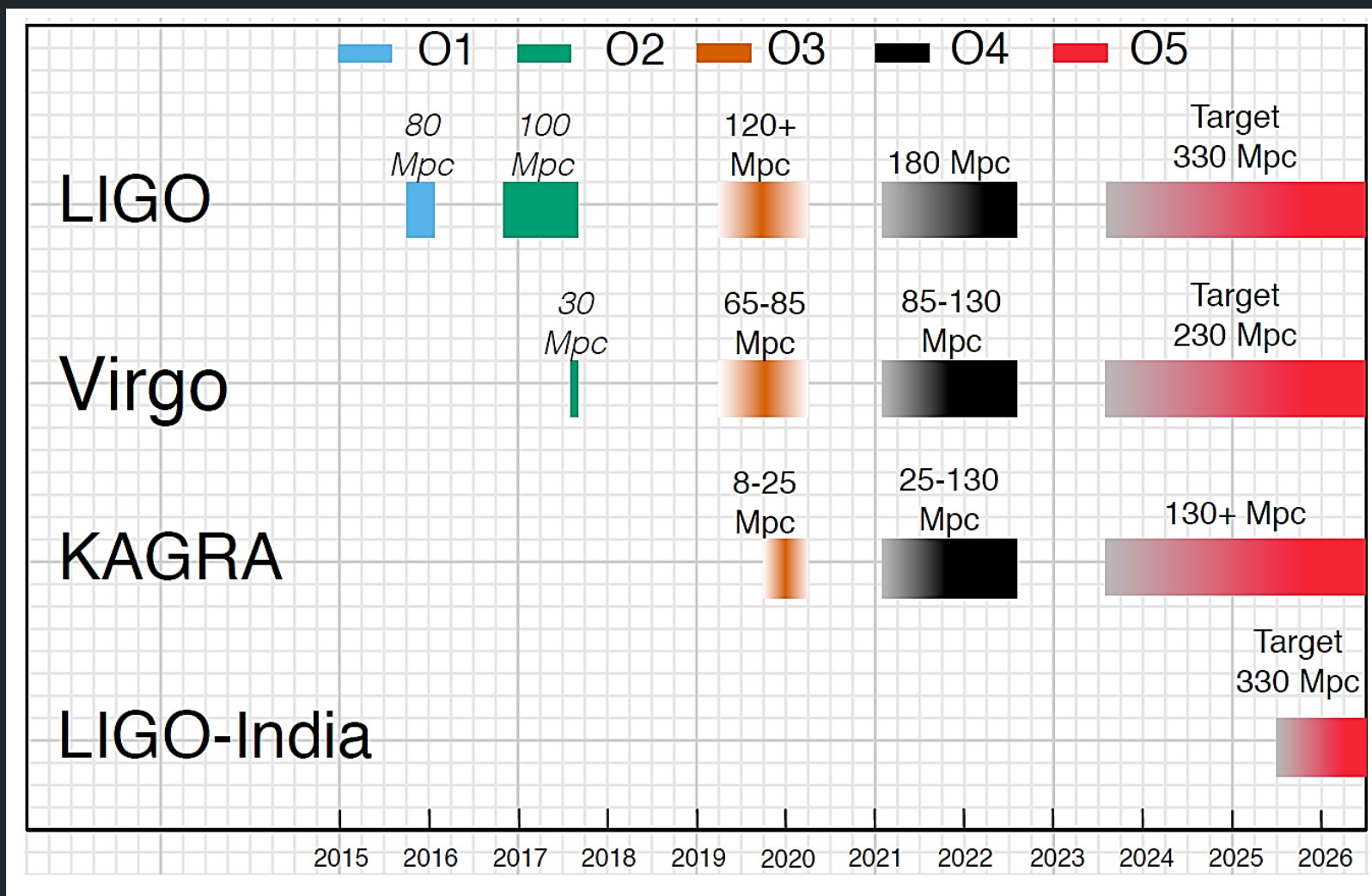


katalog detekcí GWTC-3 zveřejněný 11.11.2021

celkem už 91 detekcí



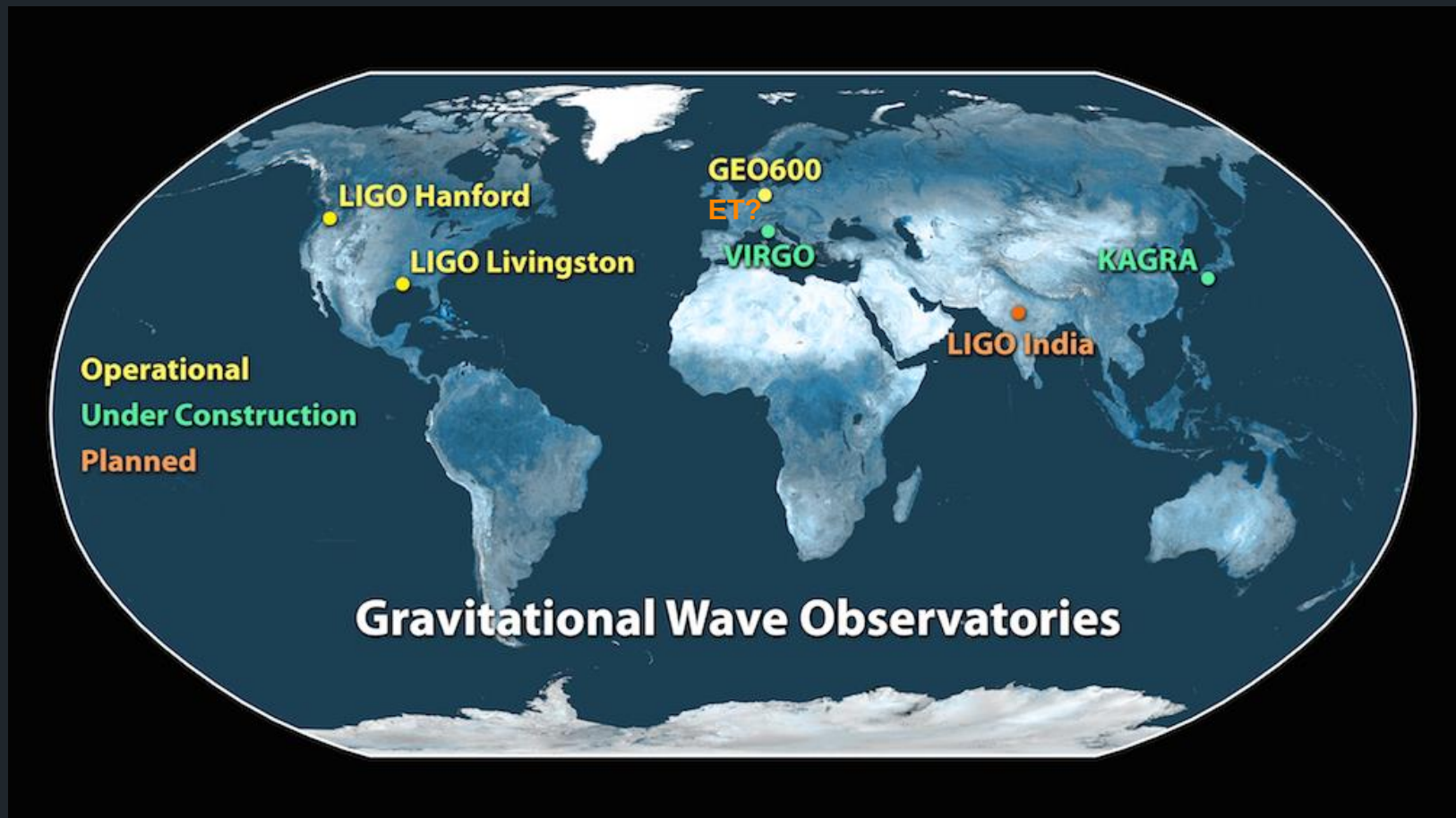
plány pozorování LIGO, Virgo, KAGRA (LVK)



budoucí detektory

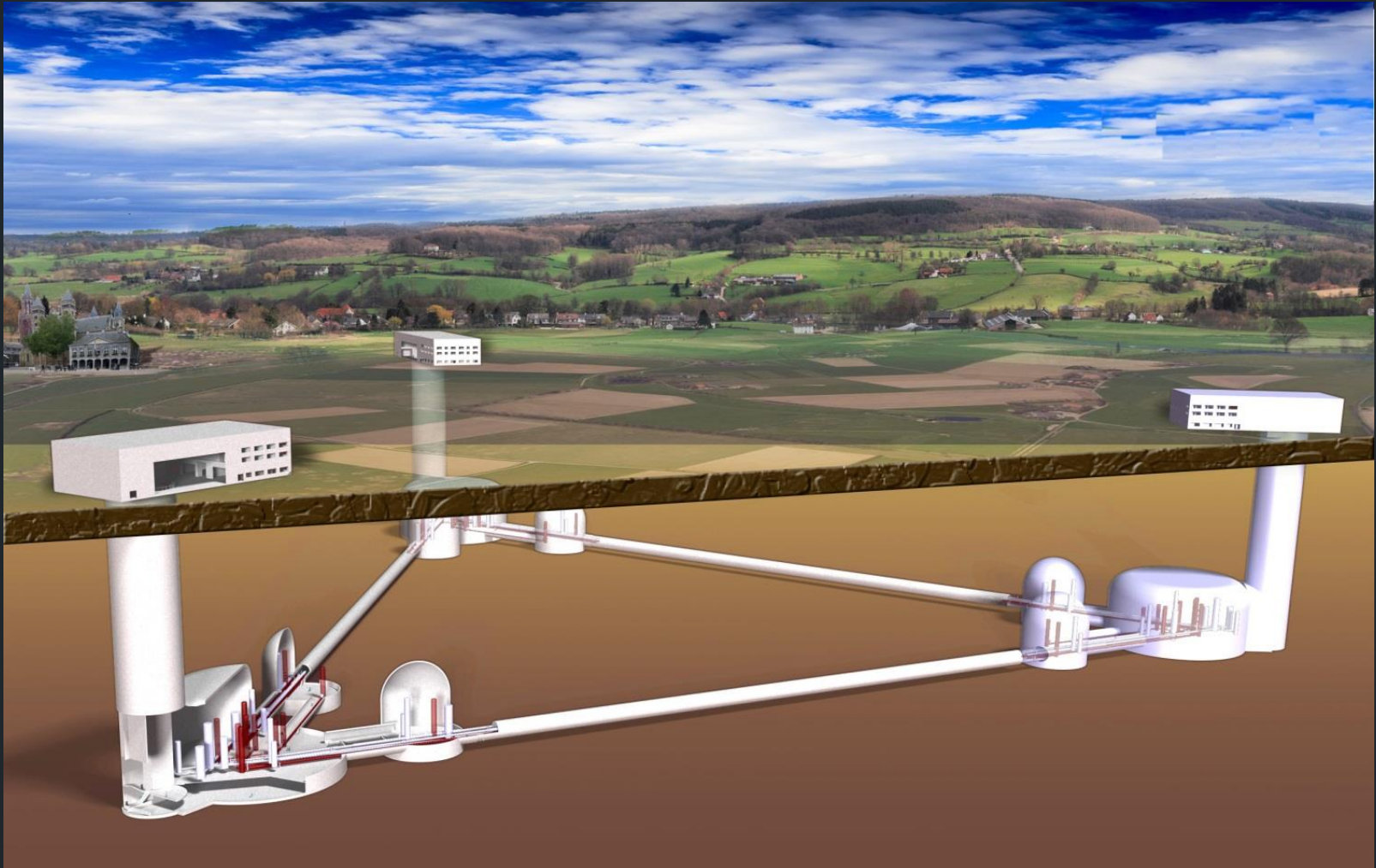
gravitační vln

dnešní, budované a plánované detektory

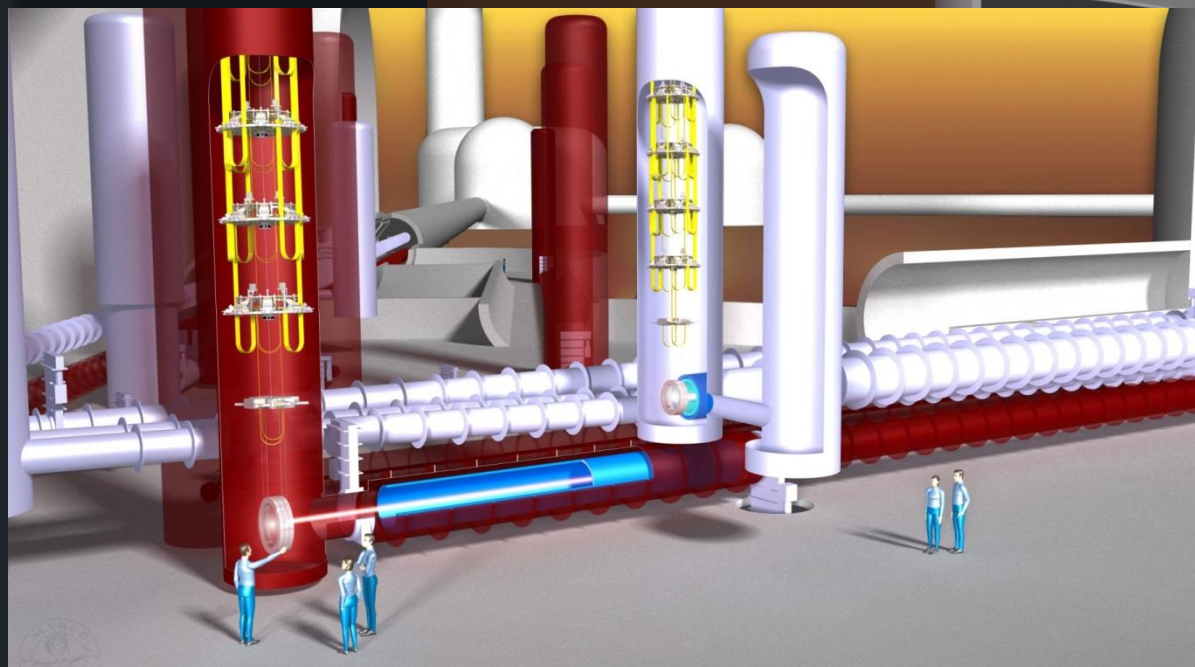
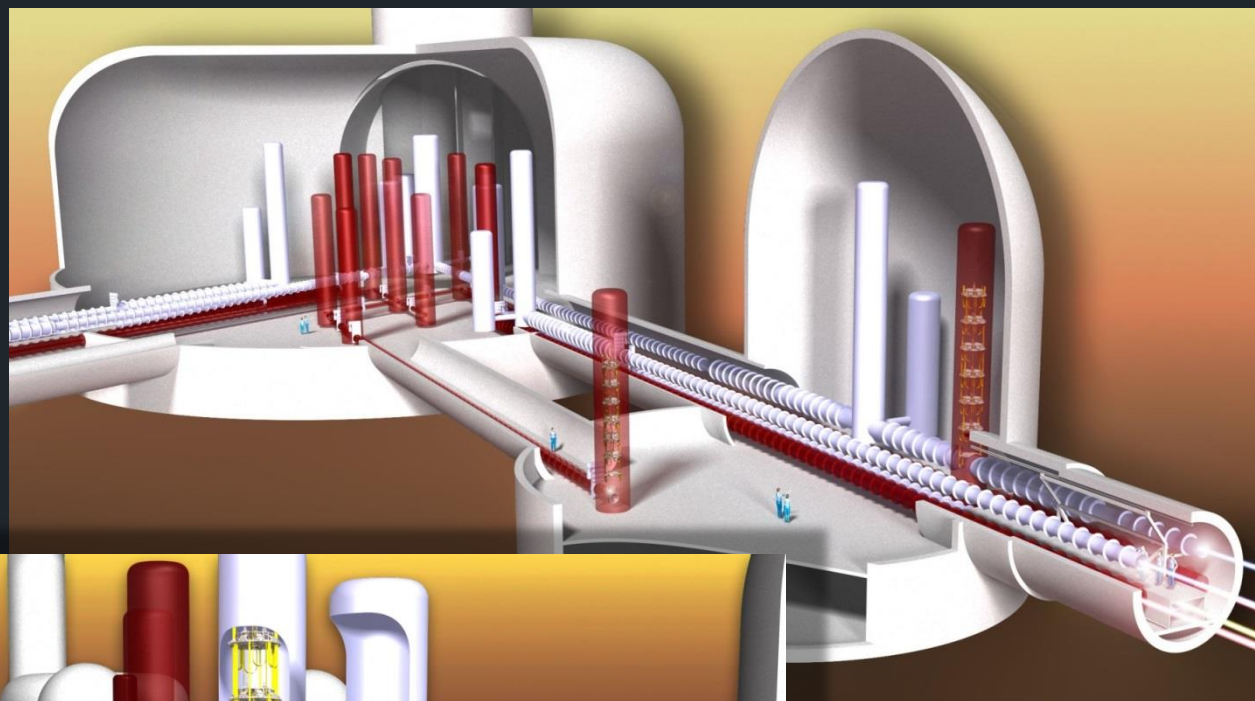


plány 3. generace: velké podzemní kryogenní interferometry

evropský projekt ET (Einstein Telescope)

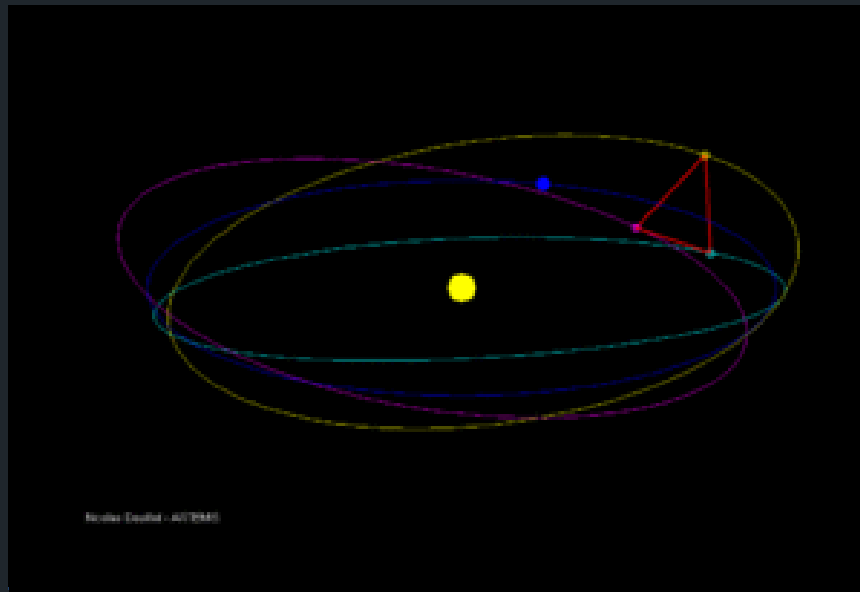
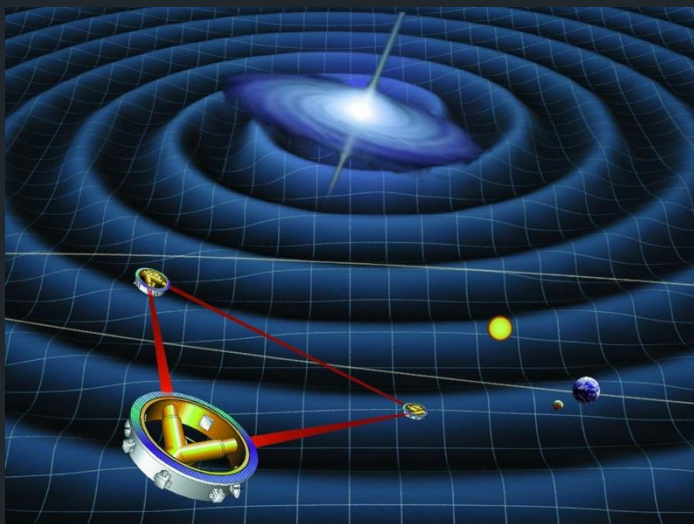


rozměry 10 km, citlivost 10^{-24}

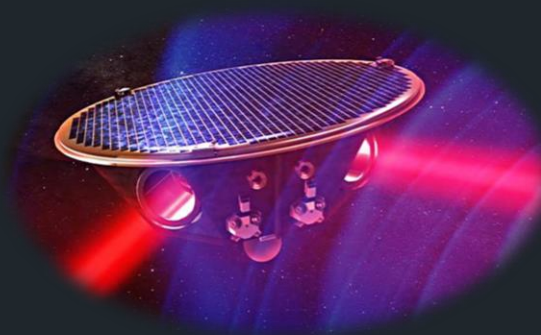


LISA v kosmu: veliký evropský projekt

Laser Interferometer Space Antena



- obří interferometry ESA
- 3 družice
- ve vrcholech trojúhelníka
- strany 2,5 milionů km
- oběh kolem Slunce 1 AU
- za Zemí 22°
- sklon roviny 60°



- bezsilová trajektorie
- testovací krychle 46 mm
2 kg, $\frac{3}{4}$ Au + $\frac{1}{4}$ Pt
- korekční trysky o tahu μN
- lasery 2W
- teleskopy $\varnothing$ 40 cm
- 2 miliardy EUR

extrémně nízké frekvence gravitačních vln 0,1 mHz – 0,1 Hz

konečný cíl je ještě ambicióznější:

otevřít gravitační okno do vesmíru
v celém spektru

snad až přes 20 řádů frekvencí
tedy vlnových délek
gravitačních vln

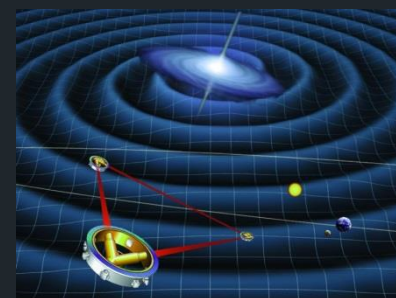
těmito odlišnými okny
spatříme různé zdroje

v radiotechnické analogii tedy postavit přijímače

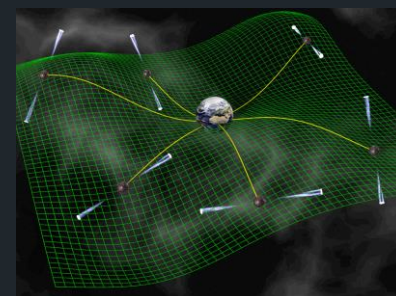
VKV **velmi krátké** gravitační **vlny**
pozemské detektory LIGO, Virgo, KAGRA, ET, CE ...



KV **krátké** gravitační **vlny**
kosmické detektory LISA ...



SV **střední** gravitační **vlny**
sítě radioteleskopů PTA



DV **dlouhé** gravitační **vlny**
studium anizotropií reliktního mikrovlnného záření

