Paradox dvojčat jako pedagogický problém

Jiří Podolský[1], Aleš Trojánek[2]

[1] Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Ústav teoretické fyziky, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8; jiri.podolsky@mff.cuni.cz
[2] Gymnázium Velké Meziříčí, Sokolovská 235/27, 594 01 Velké Meziříčí; trojanek@gvm.cz

Při výkladu speciální teorie relativity či základů obecné teorie relativity stojí učitelé na středních i vysokých školách před úkolem vysvětlit takzvaný paradox dvojčat. Ten ikonickým způsobem prezentuje samu podstatu Einsteinovy teorie, to jest, že čas není absolutní, neboť jeho hodnota měřená hodinami závisí na celé jejich konkrétní historii. Stejné hodiny s různou historií proto naměří různé časy – přesněji, odlišné časové intervaly mezi dvěma událostmi. Výklad „paradoxu" dvojčat ovšem není jednoduchý. Ani klasické učebnice zde bohužel neposkytují podrobný návod, jak ho studentům srozumitelně a přitom fyzikálně správně objasnit. Právě to je cílem našeho příspěvku.

Začneme klasickou formulací problému a jeho obvyklým řešením. Tím připomeneme, o co přesně jde, jaké bývají nedostatky v samotném zadání i úskalí běžných argumentací. V následující části článku pak navrhneme pedagogicky přijatelnější způsob výkladu „paradoxu" dvojčat. Jeho výhodou bude také to, že propojí argumenty i vzorce speciální a obecné teorie relativity způsobem, který (pokud je nám známo) nebyl v české didaktické literatuře dosud uplatněn.

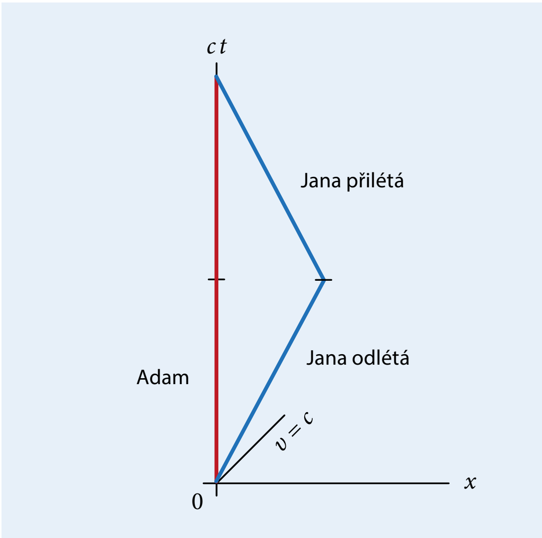
Klasické zadání úlohy

Na povrchu Země (inerciální soustavy) jsou dvojčata. Jedno z nich (Adam) zůstane na Zemi, druhé (Jana) odstartuje ze Země v kosmické lodi spojené s raketou a v krátké době nabude velké rychlosti $v < c$ (např. $v = 0{,}6\,c$). Touto rychlostí se dlouho pohybuje.[1] Potom se brzděním zastaví, pohybuje se stejným způsobem zpět a vrátí se k Adamovi do místa, ze kterého Jana odstartovala (viz obr. 1). Jana má hodiny, které udávají její vlastní čas. Otázkou je, jaký čas budou tyto Janiny hodiny po návratu na Zemi ukazovat vzhledem k Adamovým hodinám, jestliže byly v okamžiku startu oboje nastaveny na výchozí čas 0.

Podle teorie relativity platí, že hodiny Jany (její vlastní hodiny) budou po návratu ukazovat menší hodnotu než hodiny Adama (jeho vlastní hodiny). To znamená, že *celkově v raketě plynul čas pomaleji* nežli na Zemi.

Tato asymetrie výsledku se zdá být v rozporu s principem relativity (v tomto případě však nesprávně aplikovaným), podle něhož jsou všechny inerciální soustavy rovnocenné, takže by naopak hodiny Adama měly ukazovat menší hodnotu než hodiny Jany po návratu.

1 Protože v tomto textu budeme uvažovat pouze jednorozměrné (přímočaré) pohyby, pro jednoduchost vyjadřování budeme místo správného termínu „velikost rychlosti" používat pojem „rychlost".



Obr. 1 Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama na Zemi (v inerciální soustavě) a Jany v raketě. Vodorovně doprava se vynáší vzdálenost x od Země, zatímco svisle nahoru Adamův čas t. Jednotky jsou zvoleny tak, že světlo se v tomto diagramu šíří pod úhlem 45° (neboli na svislé časové ose vynášíme $c\,t$, kde c je rychlost světla).

Nedostatky v zadání této úlohy

Problém vidíme hned na samém začátku. *Povrch Země není inerciální vztažná soustava*, na což může přemýšlivý student oprávněně poukázat. Na zemském povrchu přece všude působí síla gravitační přitažlivosti Země. Aby se Adam se svými hodinami nepropadl do středu planety, musí na něj působit síly zemského povrchu. Země se také otáčí kolem své osy, takže v daném místě působí odstředivá síla (a kdyby se po Zemi pohyboval, pak i další neinerciální síla Coriolisova). Je tu také gravitační slapové působení Měsíce

» Pochopení problému velmi pomáhá, když namísto o dvojčatech raději hovoříme o trojčatech. «

a samozřejmě Slunce, kolem kterého celá Země obíhá. Na Adamovy hodiny tedy neustále působí velmi složitá výslednice (časově proměnných) sil a tudíž zrychlení, díky nimž jeho trajektorie určitě není přímka. To je v přímé kontradikci s definicí inerciální soustavy, ve které se „každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře“.

Tento zjevný nedostatek zadání snadno vyřešíme tím, že přemístíme Adama mimo Zemi do vesmírného prostoru, třeba na kosmickou stanici někde ve Sluneční soustavě.[2] Tam se již nachází v beztíži a jeho setrvačný pohybový stav lze (s velmi dobrou mírou aproximace) skutečně pokládat za inerciální. Reziduální neinerciální efekty v kosmické stanici Adama jsou zcela zanedbatelné vůči těm, které způsobí Janina daleká cesta v raketě.

Doporučujeme proto při „paradoxu“ dvojčat raději hovořit o Adamových hodinách měřících vlastní čas *ve Sluneční soustavě*, nikoli někde na Zemi. A uvést proč, což pomůže pochopit rozdíl mezi inerciální a neinerciální vztažnou soustavou, tedy klíčovými pojmy klasické i relativistické mechaniky.

Druhým, mnohem závažnějším koncepčním problémem je předpoklad, že kosmická loď s Janou „v krátké době nabude velké rychlosti“ v (řádově srovnatelné s rychlostí světla c).[3] To však znamená, že raketa musí *hodně zrychlit*. Po delší době letu ustálenou rychlostí v pak musí naopak rychle *zpomalit*, aby zastavila, učinit obrátku a vydat se zpátky k Zemi. Tedy ještě jednou během krátké doby zrychlit a na konci zase rychle zpomalit.[4] Celkem čtyřikrát je tedy raketa *velmi silně neinerciální*. Co se během toho stane s Janinými hodinami? O tom speciální teorie relativity nedokáže (striktně vzato) nic říci, vždyť její vzorce se omezují jenom na *inerciální* vztažné soustavy. Snažíme se tu tedy objasnit podstatu a klíčové jevy speciální teorie relativity pomocí argumentů, které jdou za rámec její platnosti!

V tento okamžik musí každý uvažující student propadnout panice (v horším případě zmatku, znechucení nebo letargii) a začít bombardovat svého pedagoga oprávněnými protesty. Jak na ně má dotyčný pedagog správně reagovat?

2 Řečeno přesněji, kosmickou stanici s Adamem musíme umístit na takzvanou *geodetickou* trajektorii co nejdále od Slunce, planet, měsíců a planetek. Geodetika je v obecné teorii relativity trajektorie volného objektu zanedbatelné hmotnosti, která je „lokálně přímá“ neboli „lokálně inerciální“, tedy odpovídající „volnému pádu“. Aby se v této *lokální inerciální soustavě* kosmické stanice neprojevovaly ani slapové jevy dané nehomogenitami gravitačního pole, musíme ji poslat daleko od zdrojů gravitace, tedy dál od Slunce, Země a dalších značně hmotných těles.

3 Onou rychlostí v se zde pochopitelně myslí – aniž to bylo zdůrazněno – rychlost pohybu kosmické lodi Jany (její změna vzdálenosti s časem) vůči inerciální soustavě Sluneční soustavy. Rychlost kosmické lodi vůči její vlastní neinerciální a pak inerciální soustavě je samozřejmě stále nulová.

4 Jak dále uvidíme, při zrychlení $a = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, což je běžné pozemské tíhové zrychlení g, by raketa pro dosažení rychlosti 0,6 c musela zrychlovat asi tři čtvrtě roku. Lze to pokládat za „velmi krátkou dobu“, letíme-li například k nejbližším hvězdám, jež jsou od nás vzdáleny jen pár světelných let? Dobu zrychlování (tedy neinerciality) kosmické lodi lze zkrátit, ale jen za cenu většího zrychlení, jaké by Jana se svými vlastními hodinami po tu dobu pociťovala. Těžko si lze představit, že by dokázala přežít třeba jen desetinásobek g (což by neinerciální fázi letu zkrátilo asi na měsíc). Každopádně by to nebyla příjemná výprava do hlubin vesmíru.

Nuže: jediným správným řešením je přiznat pravdu! Ano, *v tomto bodě opravdu opouštíme doménu speciální teorie relativity* a ocitáme se na (z hlediska středoškolské fyziky složité a neprobádané) půdě Einsteinovy *obecné* teorie relativity. Úžasné teorie, která právě zobecněním vzájemné relativity fyzikálních dějů i na neinerciální (obecně urychlené) vztažné soustavy pochopila gravitaci jako deformaci prostoročasu. Tedy na neporovnatelně hlubší úrovni než pomocí názorné, avšak ne zcela přesné Newtonovy představy gravitačních sil. Konzistentní a úplný výklad „paradoxu“ dvojčat lze tedy podat jen aplikací vzorců a argumentů v kontextu obecné relativity. Právě to je hlavním smyslem našeho příspěvku. Ještě předtím ale zrekapitulujeme, jakým pedagogickým způsobem se „paradox“ dvojčat běžně vykládá a objasňuje.

Problémy v řešení této úlohy

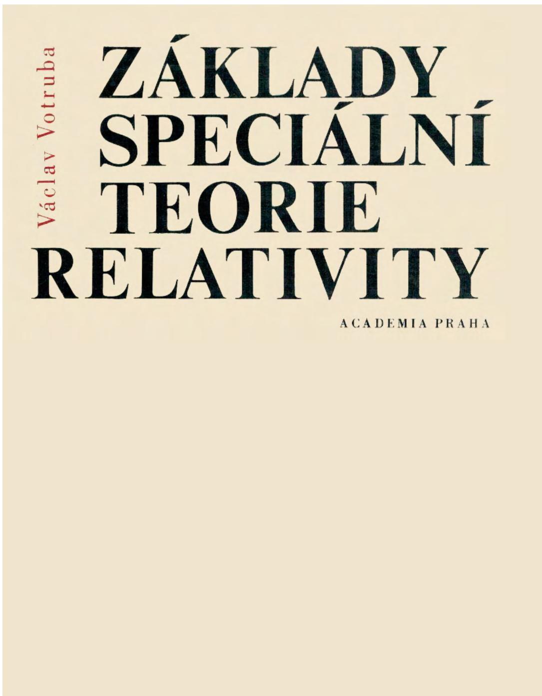
Pomiňme již zmíněné nedostatky v obvyklém zadání úlohy a obraťme se k jejímu řešení, jak bývá prezentováno v dostupných českých učebnicích a knihách.

Většinou se odpověď na problém „paradoxu“ dvojčat hledá výhradně v rámci speciální relativity a použije se *standardní vztah pro dilataci času*

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t_0, \qquad (1)$$

kde Δt_0 označuje vlastní čas, který naměří Jana v raketě, zatímco Δt je doba naměřená Adamovými vlastními hodinami doma ve Sluneční soustavě. Přitom se zdůrazní, že vztah (1) (uvedený např. v [1]) je správný, neboť je experimentálně prokázaným faktem.[5]

5 Například delší dobou života nestabilních částic produkovaných ve sprškách kosmického záření (např. mionů), pohybem částic a jejich srážkami v urychlovačích, jemnými korekcemi navigačních systémů GPS či Galileo atd.



Obr. 2 Klasická vysokoškolská učebnice speciální teorie relativity od profesora Václava Votruby (vydaná v nakladatelství Academia v roce 1969 a v nezměněné podobě v roce 1977), jež obsahuje podrobné výpočty „paradoxu hodin“.

Námitka proti této argumentaci i výsledku je zřejmá: Co když stejnou úvahu provedeme naopak *z hlediska Jany v raketě*? Vždyť přece oba systémy jsou podle teorie relativity rovnocenné! Z pohledu Jany se naopak stejnou rychlostí v (jen s opačným znaménkem, které však ve vzorci (1) nehraje roli) pohybuje Sluneční soustava. V takovém případě dostaneme *přesně opačný výsledek*: hodiny Jany musejí podle vztahu (1) ukazovat *větší* hodnotu než hodiny Adama. Neboli *v raketě plyne čas rychleji* než ve Sluneční soustavě. **Tím vzniká matematický paradox:** nemůže přece být $\Delta t > \Delta t_0$ a současně $\Delta t < \Delta t_0$.

V některých učebnicích pro středoškolskou výuku a v popularizačních knížkách, například [2, 3 a 4], se vysvětluje, že **z fyzikálního hlediska jsme nesprávně považovali soustavu spojenou s kosmickou lodí Jany za inerciální.** Protože během svého letu kosmická loď zrychlovala a zpomalovala, *není rovnocenná* s inerciálním systémem Sluneční soustavy. Konzistentní výsledek je jenom jeden: Hodiny Jany budou po návratu opravdu ukazovat menší hodnotu než Adamovy hodiny. V tomto smyslu plynul čas v kosmické lodi celkově pomaleji nežli ve Sluneční soustavě.

I když toto je zcela správné fyzikální řešení „paradoxu“ dvojčat, výpočetně se již dále nerozebírá.

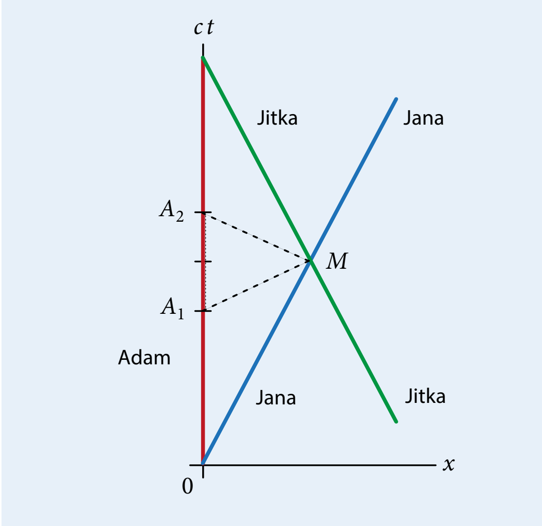
Hledá-li pedagog radu a podrobné početní vysvětlení situace v „kanonické“ Votrubově vysokoškolské učebnici speciální teorie relativity [5] (obr. 2), věc se, bohužel, poněkud zkomplikuje. Problému „paradoxu hodin“ a jeho řešení je věnována část IV.4.4 na str. 145–148 (včetně důležitého obrázku 13). Argumentace využívá výhradně aparát speciální teorie relativity a takzvanou „hypotézu hodin“. Ukazuje zejména klíčovou věc, totiž, že pro správné a jednoznačné určení rozdílu časových intervalů z hlediska Adama či Jany se *nesmí zanedbat relativnost současnosti.*

Vcelku náročný a početně zdlouhavý výpočet ve Votrubově knize, který koncepčně vychází z článku Edwarda Lowryho z roku 1963 [6], je stručněji zopakován v interním textu [7]. V přehledné podobě je uveden také na str. 276–278 vysokoškolské učebnice Horského, Novotného a Štefaníka [8].

Pochopení celého problému podle našeho názoru velmi pomáhá, když namísto o *dvou hodinách* (o dvojčatech) raději hovoříme o *třech hodinách* (o trojčatech), protože je nutné vzít do úvahy *vzájemné vztahy mezi třemi různými inerciálními soustavami*, nikoli jenom dvěma, viz obr. 3 a rámeček 1. Ostatně tato skutečnost se zdůrazňuje i v [7, 8 a 9].

Problémem je, že při řešení „paradoxu dvojčat pomocí jenom dvojčat“ se běžně aplikuje „hypotéza hodin“. Ve Votrubově učebnici [5] se na str. 145 uvádí takto: *„Budeme předpokládat, že hodiny [v raketě] jsou sestrojeny tak, že jsou prakticky ‚necitlivé‘ na zrychlení vůči [inerciální soustavě] S, vyvolané vnější mechanickou (negravitační) silou, která na ně působí při uvádění kosmické lodi do pohybu a při jejím zastavování.“* A o kousek dále: *„Jinými slovy můžeme předpokládat, že kosmická loď na cestě tam i zpět je prakticky stále v pohybu vůči S konstantní rychlostí v.“*

Je tu tedy další komplikace a zdroj možného zmatení: Jestliže jsou hodiny v raketě „necitlivé“ na zrychlení vyvolané „vnější mechanickou (negravitační) silou“, tak čím je způsoben rozdíl v časech naměřených oběma hodinami, když je nakonec porovnáme? Co je ona „vnější mechanická síla“? Vždyť přece kosmická



Obr. 3 Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama (v jeho inerciální vztažné soustavě), odlétající Jany v raketě a přilétající Jitky v jiné raketě. Když se Jana právě míjí s Jitkou (událost označená *M*), předá jí svůj časový údaj. Ten nakonec Jitka porovná s Adamovým časem. Řešení „paradoxu“ dvojčat „pomocí trojčat“ spočívá v relativitě současnosti: v inerciální soustavě Jany je s událostí *M* současná Adamova událost A_1, zatímco v jiné inerciální soustavě Jitky je se stejnou událostí *M* současná *jiná* událost A_2, která v Adamově životě nastala *mnohem později* nežli událost A_1. Právě existence dlouhého časového intervalu mezi A_1 a A_2 je příčinou, proč hodiny Adama budou i z pohledu rakety nakonec ukazovat celkový větší čas než hodiny, které zpátky do Sluneční soustavy dopraví Jitka (a jež byly v *M* synchronizovány s časem Jany). Adam je jednoznačně starší než Jana, paradox se nekoná.

loď zrychluje „sama od sebe“ pomocí vlastního raketového pohonu. A proč je zde v závorce uvedeno slovo „negravitační“? To naznačuje, že „gravitační zrychlení“ chod hodin v raketě možná nějak ovlivňuje. Ale jak přesně? A lze tento efekt opravdu zanedbat?[6]

Jak v dalším uvidíme, právě vliv tohoto „gravitačního zrychlení“ na chod hodin *je klíčový* pro vysvětlení zdánlivého paradoxu dvojčat. Právě on je zodpovědný za neekvivalenci vztažných soustav Adama a Jany, a tudíž za odlišný vzájemný chod jejich vlastních hodin. Neboť (konstantní) zrychlení kosmické lodi *je totéž* co přítomnost (homogenního) gravitačního pole, viz obr. 4. Vyjádřeno stručně: $a \equiv g$, a to nejen číselně, ale v tom nejhlubším fyzikálním slova smyslu. Toto tvrzení je podstatou slavného *principu ekvivalence*, hlavního východiska *obecné teorie relativity.*[7]

6 Zmíněnou formulací v [5] profesor Votruba vyjadřuje „hypotézu ideálních hodin“. V moderní terminologii se jedná o onu část Einsteinova principu ekvivalence, která se nazývá *lokální Lorentzova invariance* (LLI). Jde o to, že *lokálně* platí speciální relativita („ve volně padající, lokální inerciální soustavě nejsou fyzikální zákony závislé na jejím pohybu“ – tedy ani na okamžitém zrychlení této soustavy). Více podrobností o LLI lze najít v práci [10] o experimentálních testech obecné relativity, která je veřejně dostupná na webu. Při zrychlování rakety ale Jana *není* v lokální inerciální soustavě – není ve stavu „beztíže“, kdy by jenom „volně padala“. Proto v její neinerciální soustavě (jež se vůči Adamovi nutně pohybuje měnící se rychlostí) nelze argument „hypotézy hodin“ přímo, tedy bez hlubšího rozboru, *globálně* aplikovat.

7 Sám Einstein ho dokonce označil za „nejšťastnější nápad svého života“.

Řešení paradoxu dvojčat pomocí trojčat

Na úvod gymnaziálního výkladu základních poznatků speciální teorie relativity klade jeden z autorů (AT) motivační otázky – například: „Mohou být dvojčata různě stará?“[1] Jednou při vyslovení části otázky: „**Mohou být dvojčata**…“ jeden žák pohotově a vtipně doplnil: „… **tři ?**“ Je pozoruhodné, že – aniž si to uvědomil – měl plnou pravdu! Při řešení paradoxu dvojčat ***jenom v rámci speciální teorie relativity*** totiž ***opravdu musíme uvažovat trojčata***, která si navzájem pečlivě porovnávají své vlastní hodiny. Kromě Adama a Jany ještě (třeba) Jitku.

Zatímco Adam zůstává ve Sluneční soustavě, Jana se v raketě vydala pryč rychlostí *v*. Podle vzorce (1) pro dilataci času stárne Jana vůči Adamovi pomaleji, ale naopak stárne pomaleji také Adam vůči Janě.[2] To však žádný paradox nezpůsobuje, protože jejich hodiny (ukazující jejich vlastní časy) nelze navzájem *přímo* porovnat. Přímé porovnání totiž vyžaduje, *aby se oboje hodiny nacházely na stejném místě*. Protože však Jana letí stále dál a dál do hlubin vesmíru, jejich hodiny se *už nikdy* nepotkají.

1 Jinou pěknou inspirací je, že v matematice platí $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{4}{5}$, avšak ve fyzice dává dobrý smysl $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}c$, neboť právě to říká správný vzorec pro skládání rychlostí ve speciální relativitě.

2 Přesněji bychom situaci měli popsat takto: Hodiny Jany v její inerciální soustavě se zpožďují oproti hodinám *synchronizovaným v inerciální soustavě Adama*, které Jana postupně při svém letu potkává. Totéž tvrzení symetricky platí i naopak, totiž že hodiny Adama se zpožďují oproti hodinám *synchronizovaným v inerciální soustavě Jany*. V odlišných inerciálních soustavách jsou stejné ideální hodiny synchronizovány odlišně! *Pojem „současnost“ je tedy relativní*: Adam (ve své soustavě) považuje za „současné“ jiné události, nežli Jana (ve své soustavě).

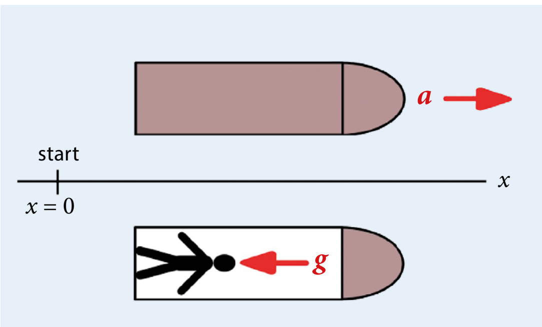
Právě v tomto místě úvah vstupuje na scénu jejich trojče Jitka! Ta se kdysi dávno (dříve než Jana) vydala do vesmíru a teď se ve své raketě už vrací domů na Zemi, viz obr. 3. Letí po stejné trase jako Jana, má i stejnou rychlost *v*, jenom opačně orientovanou (vektor rychlosti Jany míří od Země, zatímco Jitky k Zemi). Ve chvíli, *kdy se obě míjejí* (jsou na stejném místě, ve stejné události *M*), *převezme Jitka údaj, který právě ukazují hodiny Jany*, a tento Janin čas si nastaví na *svých* hodinách. Jitka se tedy nyní vrací k Adamovi a nese zpátky k němu čas Jany (ideální by bylo, kdyby se vše „dopředu naraficilo“ tak, aby v okamžiku míjení byly Jana a Jitka stejně staré…). Raketa Jitky se vůči Adamovi pohybuje zase stejnou rychlostí *v*, takže i během zbytku letu platí vzorec (1) pro dilataci času a má také stejnou hodnotu. Když se Jitka vrátí do Sluneční soustavy a míjí Adama, porovnají si navzájem své hodiny: Adamovy, které byly stále na tomtéž místě, a pohybující se Jitky (obsahující i časový údaj Jany v první polovině cesty směrem pryč od Země). Zjistí, že Adam zestárl více. Žádný paradox se nekoná…

Proč? Jenom Adam byl totiž *po celou dobu v téže inerciální vztažné soustavě*. Jana a Jitka se sice také (každá zvlášť) pohybovaly konstantní rychlostí *v*, ale když Jana předávala svůj časový údaj Jitce při vzájemném míjení v kosmu v události *M*, stalo se cosi zásadního a z hlediska klasické Newtonovy fyziky zvláštního: *během předávání časového údaje od Jany k Jitce Adam náhle „ve vztahu k nim“ zestárl!* Důvodem je, že *inerciální vztažné soustavy Jany a Jitky se hodně liší* (pohybují se vůči sobě obrovskou rychlostí). Proto se liší i to, co *ony považují za současné* s událostí *M*, kdy si předávají časový údaj. A toto „lišení se dvou současností“ je onen časový interval A_1A_2, o který „Adam prudce zestárne (obr. 3). Když se vše pečlivě spočítá pomocí vzorců speciální teorie relativity, vyjde jednoznačný výsledek: žádný paradox se nekoná.

Tím jsme se dostali k jádru našeho článku, jehož základní otázka zní: Lze „paradox“ dvojčat dobře vysvětlit *výhradně jen* v rámci speciální teorie relativity platné pro inerciální vztažné soustavy, anebo je vhodnější (či dokonce nutné) použít širší kontext obecné teorie relativity? A jak spolu oba přístupy vlastně souvisejí? Cílem následujících částí článku je ukázat, že řešení pomocí obecné relativity je fyzikálně přirozenější a pedagogicky vhodnější.

Explicitní řešení pohybu rakety, která zrychluje

Začneme tím, že vybudujeme a spočítáme adekvátnější model pohybu rakety. V knize [5] se předpokládá, že raketa je „prakticky stále“ v setrvačném pohybu



Obr. 4 Tatáž raketa s Janou *ve stejné situaci*, interpretované „zvenčí“ jako zrychlení (horní část obrázku) a „zevnitř“ jako gravitace (dolní část obrázku). Podle Einsteinova principu ekvivalence nemůže Jana zevnitř kosmické lodi (lokálně) rozlišit, jestli raketa *ve volném prostoru zrychluje* směrem doprava (horní interpretace) anebo *v klidu spočívá v gravitačním poli* působícím doleva (dolní interpretace).

konstantní rychlosti *v* a (formálně nekonečné!) zrychlení působí jenom při startu, otočce a příletu, což budí řadu otázek. Mnohem lepší a realističtější je naopak předpokládat, že *na raketu po celou dobu jejího neinerciálního letu působí konstantní zrychlení* $a \equiv g$. V první čtvrtině letu směrem od Země raketa zrychlí na nejvyšší rychlost, pak začne brzdit, přičemž decelerace má opět stejnou velikost $a \equiv g$. Když v nejvzdálenějším bodě své dráhy raketa zastaví, začne zase zrychlovat, tentokrát však směrem k Zemi, načež v poslední čtvrtině své kosmické plavby zpomalí na nulovou rychlost ve Sluneční soustavě, viz obr. 5. Až v tento okamžik *lze přímo porovnat vedle sebe stojící hodiny* Adama a Jany.

Celý let se tedy skládá ze čtyř podobných úseků. Stačí spočítat jenom jeden z nich, kdy raketa konstantně zrychluje z nulové na maximální rychlost, další tři dají shodný výsledek. Konkrétně musíme určit, *jak daleko raketa doletí*, jaké dosáhne *maximální rychlosti* a hlavně: *o kolik se hodiny Jany zpomalí vůči Adamovým*.

Všechny tyto veličiny získáme *řešením relativistické pohybové rovnice*, která zobecňuje druhý Newtonův zákon: Časová změna hybnosti rakety je rovna síle, která je v naší úloze číselně rovna tíze pociťované Janou v kosmické lodi,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F = m_0 g. \qquad (2)$$

I když tato rovnice vypadá na první pohled stejně jako Newtonova rovnice klasické mechaniky, je zde *několik zásadních rozdílů*, které je nutno zdůraznit:

- Oproti klasické mechanice není *hybnost p* určena součinem okamžité rychlosti *v* s neměnnou hmotností m_0 objektu (hmotného bodu), ale s jeho „setrvačnou“ hmotností m, která s rychlostí roste podle známého vzorce speciální relativity, tedy

$$p = m\,v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

- V relativistické teorii hovoříme o konstantě m_0 jako o *klidové hmotnosti*, protože se vztahuje pouze na vlastní vztažnou soustavu, vůči níž je objekt v klidu.
- Je nutné přesně specifikovat, o jaký konkrétní čas v rovnici (2) se jedná. V tomto případě t označuje Adamův *inerciální čas měřený ve Sluneční soustavě*.

Rovnici (2) snadno vyřešíme pouhou úvahou i se středoškolskými znalostmi. Jestliže je její pravá strana (příznivou shodou okolností!) konstantní, musí být hybnost p lineární funkcí času t. Na vysoké škole prostě provedeme integraci diferenciální rovnice prvního řádu $\dot{p} = m_0 g$ s konstantní pravou stranou. Tak nebo tak, obecné řešení pohybové rovnice rakety s konstantním zrychlením $a = g$ je $p = m_0 gt + p_0$. Na počátku je rychlost, a tedy i hybnost nulová, takže $p_0 = 0$. Dostali jsme tedy první integrál pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = g\,t. \tag{4}$$

Odtud triviální úpravou vyjádříme *rychlosti rakety jako funkci času* (měřeného Adamem ve Sluneční soustavě)[8]

$$v(t) = \frac{g\,t}{\sqrt{1+\left(\frac{g}{c}t\right)^2}}. \tag{5}$$

Všimněme si, že pro velmi *malé* časy dostáváme přibližně $v(t) \approx gt$, což je vzorec klasické mechaniky, zatímco naopak pro velmi *velké* časy je asymptoticky $v(t) \approx c$. Přestože raketa stále zrychluje, nemůže překonat rychlost světla.

Protože rychlost je časová změna (derivace) polohy, můžeme odtud další integrací (substitucí za výraz pod odmocninou) spočítat vzdálenost $x(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$ rakety ve vztahu k Adamovi[9]

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{g}{c}t\right)^2} - 1\right). \tag{6}$$

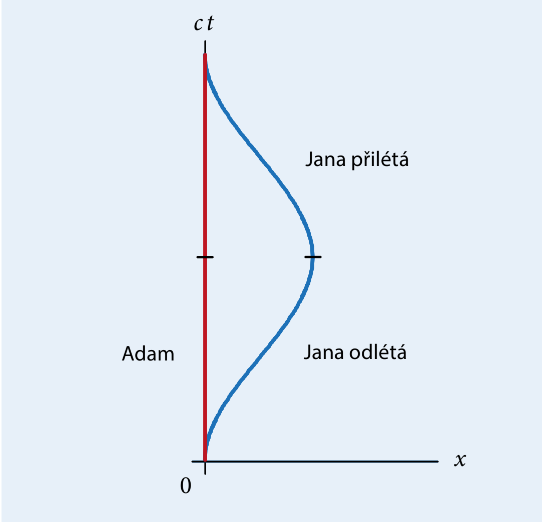
Je zajímavé, že *v prostoročasovém diagramu* (obr. 5), kde vodorovně vynášíme vzdálenost x a svisle čas t (přesněji příslušnou světelnou vzdálenost $c\,t$), to je právě *rovnoosá hyperbola*

$$\left(\frac{x+c^2/g}{c^2/g}\right)^2 - \left(\frac{c\,t}{c^2/g}\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Proto říkáme, že konstantně zrychlující objekt se v relativistické mechanice pohybuje v prostoročase po *hyperbolické trajektorii*.

Pro naše úvahy ohledně „paradoxu“ dvojčat je však důležitější určit přesnou souvislost mezi *Adamovým*

8 Tímto vzorcem snadno ověříme naše předchozí tvrzení, že raketa dosáhne rychlosti 0,6 c asi za tři čtvrtě roku.
9 Kdo ještě neumí integrovat, může alespoň ověřit, že derivováním funkce (6) podle t dostaneme právě (5).



Obr. 5 Prostoročasový diagram znázorňující historii Adama ve Sluneční soustavě a Jany v raketě, která zrychluje a brzdí při odletu i příletu stále stejným zrychlením. Porovnání vlastního času Adama v jeho inerciální soustavě a vlastního času Jany v její neinerciální soustavě rakety nesporně dokazuje, že Adam zestárne více než Jana.

časem t měřeným ve Sluneční soustavě a *vlastním časem Jany v raketě*, který budeme označovat symbolem τ. Během *krátkého časového intervalu* je dán obvyklým vzorcem (1) pro dilataci času, tedy

$$\Delta\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t. \tag{8}$$

Zde je použita *lokální* Lorentzova invariance obecné relativity neboli je *lokálně* aplikována „hypotéza hodin“ – tedy že *lokálně* lze s každou (i neinerciální) soustavou asociovat *okamžitou* inerciální soustavu, ve které platí vzorec (8) nezávisle na hodnotě zrychlení rakety. Rychlost v však v průběhu letu už *není konstanta*, ale konkrétní funkce (5). Musíme ji proto dosadit do (8) a provést integraci takto vzniklé funkce času („všechny krátké časové intervaly vysčítat“),

$$\tau = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\left(\frac{g}{c}t\right)^2}}. \tag{9}$$

Po jednoduché substituci $z = \frac{g}{c}t$ dostaneme standardní integrál (viz str. 428 [11] nebo [12]) vedoucí na funkci „argument hyperbolického sinu“,

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{argsinh} z. \tag{10}$$

Po inverzi lze tedy výsledek vyjádřit ve velmi pěkném a kompaktním tvaru

$$t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right). \tag{11}$$

Připomeňme, že *hyperbolická funkce* sinh je definována vztahem $\sinh y \equiv (e^y - e^{-y})/2$, zatímco další hyperbolické funkce jsou $\cosh y \equiv (e^y + e^{-y})/2$ a $\tanh y \equiv \sinh y / \cosh y$. Je pozoruhodné, že i tyto speciální funkce se objeví v důležitých vzorcích pro *vzdálenost* rakety a její *rychlost* (vůči Adamovi), když vzorce (6) a (5) vyjádříme užitím klíčového vztahu (11) a identity $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ pomocí *vlastního času τ Jany v raketě*:

» *Jana* v raketě je *po celou dobu v neinerciální* (zrychlené) soustavě. «

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g}\left(\cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right) - 1\right) \qquad (12)$$

$$v(\tau) = c\ \tanh\left(\frac{g}{c}\tau\right). \qquad (13)$$

Přímočarým způsobem jsme tedy spočítali všechny hlavní vzorce popisující relativistický pohyb rakety s konstantním zrychlením $a = g$, a to jak z *hlediska času t Adama*, jenž měří svými hodinami v *inerciální* Sluneční soustavě, tak *vlastním časem τ Jany v raketě*, což je naopak *neinerciální* vztažná soustava (raketa po *celou* dobu letu zrychluje či zpomaluje o hodnotu *g*).[10]

Vztah mezi vlastním časem τ Jany a časem t Adama je dán velmi jednoduchým vzorcem (11), a to právě *hyperbolickou funkcí* sinh. Ještě lépe to uvidíme, když vzorec přepíšeme do „bezrozměrné" podoby

$$\left(\frac{g}{c}t\right) = \sinh\left(\frac{g}{c}\tau\right).$$

Pro *velké* hodnoty argumentu je $\sinh y \approx \tfrac{1}{2}e^y$, což dává t úměrné $e^{g\tau/c}$. Z hlediska Jany v raketě proto čas ve Sluneční soustavě běží *nesmírně rychle*. Janino dvojče Adam vůči ní stárne v podstatě exponenciálně!

A nejen to, *také vzdálenost* rakety měřená Adamem v klidové soustavě (12) *roste prakticky exponenciálně*, pokud ji měříme *vlastním časem τ Jany*. A protože exponenciála roste hodně, opravdu HODNĚ rychle, může Jana doletět ve vesmíru hodně, opravdu HODNĚ daleko! Dosazením konkrétních číselných hodnot do vzorce (12) snadno zjistíme, že za 5 roků Jana doletí do vzdálenosti 84 světelných let, za 10 roků do vzdálenosti 14 779 světelných let, ale za 15 let už do neuvěřitelné vzdálenosti 2 582 155 světelných let! To by bohatě stačilo na průzkum nejen celé naší vlastní Galaxie (s průměrem disku řádově 100 tisíc sv. l.), ale i sesterské galaxie v Andromedě (která je od nás 2,4 milionu sv. l.).

A pokud jde o rychlost rakety, pro velké hodnoty argumentu se funkce $\tanh y$ asymptoticky blíží jedničce, takže díky vzorci (13) platí $v \to c$. Z hlediska Adama raketa s Janou *nikdy nepřekoná rychlost světla*. Relativistická mechanika je nádherná, plně konzistentní teorie.

Řešení „paradoxu" dvojčat z pohledu obecné teorie relativity

Vraťme se nyní zpátky k hlavnímu tématu našeho článku, jímž je řešení „paradoxu" dvojčat. Z předchozího výkladu je evidentní, že vztažná soustava Jany a jejího dvojčete Adama *nejsou fyzikálně ekvivalentní*. Žádný paradox se tedy nekoná!

Konkrétně je to tak, že *Adam* ve Sluneční soustavě se nachází *stále v inerciální* (klidové) soustavě, na kterou nepůsobí žádné síly. Naproti tomu *Jana* v raketě je *po celou dobu v neinerciální* (zrychlené) soustavě (s konstantním zrychlením $a = g$). *Tato asymetrie fyzikálních podmínek způsobí, že hodiny Adama a hodiny Jany budou ukazovat jiný čas* poté, co je po návratu Jany do Sluneční soustavy porovnáme *ve stejné* klidové vztažné soustavě. Rozdíl v chodu hodin je dán jejich *odlišnou historií*. Tím, že se během celého děje nacházely *v různých fyzikálních podmínkách*. Na tom přece není nic paradoxního. Nikoho nepřekvapí, že dáme-li nějakou věc do žhavé pece, zatímco druhou stejnou necháme venku, budou nakonec taky vypadat jinak! Nezvyklé se může zdát snad jen to, že odlišnost v chodu (stejných a ideálních) hodin je dána odlišnou *kinematikou*, tedy jen různou historií jejich pohybu.

Pro ilustraci spočítejme výše odvozené vzorce pro konkrétní hodnoty. V zadání úlohy jsme již zmínili (stejně jako profesor Votruba ve své knize [5]) rychlost inerciálního pohybu rakety $v = 0{,}6\ c$. V takovém případě má faktor ve vzorci (1) pro dilataci času hodnotu 5/4, takže

$$\Delta t = 1{,}25\ \Delta t_0. \qquad (14)$$

Adam je proto po návratu Jany o 25 % starší než ona. Chceme-li stejný výsledek získat naším modelem konstantně zrychlující a zpomalující rakety, nesmíme zapomenout, že vzorec (11) platí jen pro každou *čtvrtinu* celé cesty – neboli $\Delta t = 4t$, $\Delta t_0 = 4\tau$, což po dosazení do (11) dává podmínku

$$1{,}25\left(\frac{g}{4c}\Delta t_0\right) = \sinh\left(\frac{g}{4c}\Delta t_0\right). \qquad (15)$$

Označíme-li výraz v závorkách pomocnou proměnnou

$$y = \frac{g}{4c}\Delta t_0, \qquad (16)$$

dostaneme rovnici $\sinh y = 1{,}25\ y$. Její numerické řešení je přibližně $y = 1{,}1827$, takže *Jana během celého letu* zestárla o

$$\Delta t_0 = 1{,}4457 . 10^8\ \mathrm{s} = 1673{,}3\ \text{dní}, \qquad (17)$$

což je zhruba 4,6 roku, zatímco *Adam* zestárl o

$$\Delta t = 1{,}8071 . 10^8\ \mathrm{s} = 2091{,}6\ \text{dní}, \qquad (18)$$

tedy o 5/4 více.

Pro tyto hodnoty můžeme spočítat *maximální dosaženou rychlost rakety* (vždy uprostřed mezi Zemí a nejvzdálenějším místem), a to buď dosazením čtvrtiny hodnoty (17) do vzorce (13), anebo čtvrtiny hodnoty (18) do vzorce (5). V obojím případě dostaneme stejnou hodnotu

$$v_{max} = 0{,}8283\ c. \qquad (19)$$

Této rychlosti raketa podle vzorce (12) dosáhla ve vzdálenosti

$$x_{max} = 7{,}19 . 10^{15}\ \mathrm{m} = 0{,}76\ \text{světelného roku} \qquad (20)$$

od Adama ve Sluneční soustavě, takže *největší vzdálenost*, kam raketa s Janou doletěla, byla 1,52 světelného roku.

Průměrná rychlost rakety během celé cesty byla proto podle Adamových hodin 0,53 *c*.

Kdybychom volili o něco delší dobu letu Jany Δt_0, *enormně* by narostlo zestárnutí Adama Δt (i dolet rakety), protože jejich podíl je dán faktorem $(\sinh y)/y$. Pro čtyřnásobnou hodnotu Δt_0 je Δt už zhruba 12krát větší a tak dále. Sami si to vyzkoušejte!

Pro zajímavost uveďme, že analogický příklad rozebírá ve své vynikající učebnici obecné teorie relativity Bernard Schutz [13]. Namísto Adama a Jany ale hovoří o dvojčatech Artemis a Dianě[11] a uvažuje větší rychlost

10 Zde uvedené vzorce a výpočty mohou na střední škole posloužit nejen na fyzikálním semináři, ale i na semináři z matematiky, kde se učí derivování a integrování. Navíc ukazují, k čemu mohou být ve fyzice dobré ony „divné hyperbolické funkce", které najdeme skoro na každé kalkulačce.

11 Jde samozřejmě o odkaz na antickou mytologii. V ní jsou však příbuzenské vztahy jiné: řecká bohyně Měsíce a lovu Artemis opravdu měla dvojče, kterým byl však bůh Slunce a světla Apollón. Diana je římskou obdobou řecké bohyně Artemis.

$v = 0{,}96\,c$, takže koeficient ve vzorci (1) pro dilataci času má větší hodnotu 25/7. Zestárne-li Diana v kosmické lodi o 14 let, Artemis mezitím zestárne o 50 let. Při opětovném setkání na Zemi tedy bude o 36 let starší než Diana.

Také doporučujeme pro ilustraci paradoxu dvojčat (zejména číselných vztahů mezi vlastními časy) použít demonstrační program a interaktivní animaci kolegy Krtouše [14].

Souvislost s dilatací času v gravitačním poli podle obecné teorie relativity

Nyní se na celou situaci podíváme z hlediska Einsteinovy teorie gravitace neboli obecné relativity. Uvidíme, že odvozené vzorce pro dilataci času způsobené neinerciálním pohybem rakety lze *ekvivalentně* interpretovat jako *vliv gravitačního pole na chod hodin v raketě. Výsledný efekt je číselně zcela shodný.*

Začneme tím, že zavedeme (jak je v literatuře obvyklé) bezrozměrný faktor γ. Ten udává míru dilatace času

$$t = \gamma\,\tau \tag{21}$$

při pohybu rychlostí v, viz (1), ale také nárůst setrvačné hmotnosti vzorcem $m = \gamma m_0$. Pro pohyb zrychlené rakety má tento faktor tvar

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{1+\left(\frac{g}{c}t\right)^2} = \cosh\left(\frac{g}{c}\tau\right), \tag{22}$$

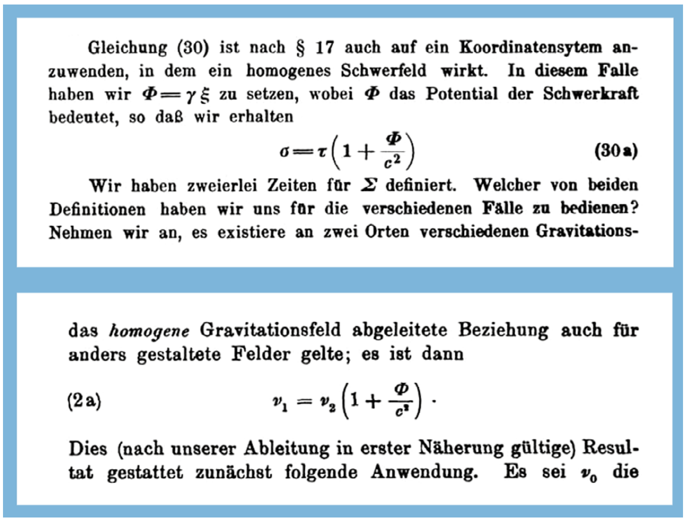
kde jsme pro vyjádření rychlosti v závislosti na čase t Adama a τ Jany použili vzorce (5) a (11).

Dále připomeneme důležitý vzorec obecné teorie relativity pro *dilataci času v gravitačním poli* neboli *červený posuv světla*:

$$\frac{t}{\tau} = 1 - \frac{\Phi}{c^2}. \tag{23}$$

Zde Φ je *rozdíl gravitačních potenciálů* (newtonovských) *mezi místy, kde se nacházejí dvoje identické hodiny*, z nichž jedny měří čas t, zatímco druhé měří čas τ. Vidíme, že hodně daleko od Země a Slunce (v inerciální soustavě), kde je gravitační potenciál Φ všude stejný (nulový), bude platit $t = \tau$. Čas v místech obou hodin tam poplyne stejně. Jestliže však jedny hodiny spustíme například na povrch Země, kde je gravitační potenciál nenulový, zaznamenáme *rozdíl v plynutí času* daný vzorcem (23). Čím hlouběji do „jámy gravitačního potenciálu“ sestupujeme, tím pomaleji tam bude plynout čas.[12]

Jak názorně uvádí v úvodu 1. kapitoly své knihy Carlo Rovelli [15]: *„Začněme prostým faktem: na horách plyne čas rychleji než dole u moře.“* A pokračuje: *„Rozdíl je to nepatrný, ale dá se změřit pomocí přesných hodin, které můžete koupit na internetu za pár tisíc eur. S trochou úsilí tedy může každý na vlastní oči vidět, že čas se opravdu zpomaluje.“* A o kousek dál: *„Ale nezpomalují se jenom hodiny. Dole probíhají pomaleji všechny procesy. Dva přátelé se rozejdou a jeden žije v nížinách, zatímco druhý na horách. Ten z nich, který žil níž, toho prožil méně, méně zestárnul, mechanismus jeho kukaček odbil méněkrát. Měl míň času, aby něco vykonal, jeho květiny vyrostly méně, jeho myšlenky měly míň času, aby se rozvinuly… Dole je zkrátka méně času nežli nahoře.“*



Gleichung (30) ist nach § 17 auch auf ein Koordinatensytem anzuwenden, in dem ein homogenes Schwerfeld wirkt. In diesem Falle haben wir $\Phi = \gamma\xi$ zu setzen, wobei Φ das Potential der Schwerkraft bedeutet, so daß wir erhalten

$$\sigma = \tau\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right) \tag{30a}$$

Wir haben zweierlei Zeiten für Σ definiert. Welcher von beiden Definitionen haben wir uns für die verschiedenen Fälle zu bedienen? Nehmen wir an, es existiere an zwei Orten verschiedenen Gravitations-

das *homogene* Gravitationsfeld abgeleitete Beziehung auch für anders gestaltete Felder gelte; es ist dann

$$(2a)\qquad \nu_1 = \nu_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Dies (nach unserer Ableitung in erster Näherung gültige) Resultat gestattet zunächst folgende Anwendung. Es sei ν_0 die

Obr. 6 Původní tvar Einsteinova vzorce (23) pro dilataci času, resp. červený posuv světla v gravitačním poli. Takto je publikoval ve svých článcích napsaných v Bernu roku 1907 (nahoře) a v Praze roku 1911 (dole).

Vypadá to, že se jedná o *podobný jev* jako v námi diskutovaném „paradoxu dvojčat“, z nichž jedno zůstane na místě, zatímco druhé se pohybuje v raketě. Ukážeme nyní, že v daném případě se ve skutečnosti jedná o *identický jev.*

Významný vzorec (23) platný pro statická gravitační pole poprvé odvodil Albert Einstein v roce 1907 v Bernu a potom v roce 1911 elegantnějšími argumenty v Praze. Na obr. 6 jsou autentické podoby vzorce přetištěné z příslušných článků [16] a [17]. Z didaktického hlediska asi nejsrozumitelnější Einsteinovo odvození vzorce (23) se opírá o úvahy o dostředivém zrychlení na disku otáčejícím se konstantní úhlovou rychlostí, které lze najít ve III. dodatku Einsteinovy slavné knihy [18] (na str. 175–176 vydání z roku 2005), viz rámeček 2.

Ve všech zmíněných případech je vzorec (23) Einsteinem odvozen z *klíčového východiska obecné teorie relativity*, jímž je *princip ekvivalence*. Jeho moderní formulace je sofistikovanější,[13] avšak zde vystačíme s názornější pedagogickou formulací:

Homogenní gravitační pole je totéž co konstantní zrychlení vztažné soustavy.

Jinými slovy: gravitační pole s konstantním tíhovým zrychlením g je *ekvivalentní* neinerciální soustavě s konstantním zrychlením $a = g$. Všechny fyzikální experimenty v nich dopadnou stejně, viz obr. 4.

Často se tento princip ilustruje pomocí *myšlenkového pokusu s padajícím a zrychlujícím výtahem*. To je velmi vhodný pedagogický přístup, který navíc odpovídá původním Einsteinovým úvahám. Nedávno byl pěkně vyobrazen v televizním seriálu *Génius* (v 16. minutě 5. epizody), viz obr. 7. Einstein má pocit, že výtah padá a on se v něm volně vznáší. Jako by nic nevážil. Ano, padající člověk nevnímá vlastní váhu, protože on sám,

12 V extrémním případě na horizontu černé díry by byl rozdíl v plynutí času již nekonečně velký. V porovnání se vzdálenými inerciálními hodinami by se čas na identických hodinách u horizontu úplně zastavil. Jinými slovy: gravitační červený posuv světla by tam (přesněji: odtamtud) byl nekonečný.

13 Einsteinův princip ekvivalence zní: V každé *malé* volně padající vztažné soustavě jsou fyzikální zákony zcela stejné jako v inerciální soustavě, tedy *lokálně* mají stejný tvar jako ve speciální relativitě. Všechny negravitační experimenty v ní dopadnou stejně, bez ohledu na rychlost soustavy či její polohu a čas.

Einsteinovo odvození vzorce pro dilataci času v gravitačním poli

Uvažujme pevný disk otáčející se konstantní úhlovou rychlostí ω. Ve vzdálenosti R od středu se bod P pohybuje rychlostí $v = \omega R$. Podle vzorce (1) speciální relativity je tedy rozdíl v chodu lokálních hodin v P oproti hodinám ve vnější inerciální soustavě dán vztahem

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 R^2}{c^2}}}, \tag{R1}$$

kde τ je čas v bodě P disku, zatímco t je vnější čas. Nyní použijeme obvyklý vztah pro dostředivou sílu $F = m\omega^2 R$, která závisí na vzdálenosti R od středu. Pro toto silové působení lze zavést potenciál Φ, a to jako (záporně vzatou) energii, která je nezbytná k přemístění objektu (jednotkové hmotnosti m) z bodu P do středu disku. Triviální integrací $F/m = \omega^2 R$ přes R tak dostaneme vztah $\Phi = -½\omega^2 R^2$. Vzorec (R1) lze tedy přepsat do tvaru

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}}. \tag{R2}$$

Podle principu ekvivalence musí stejný vzorec platit i v gravitačním poli s potenciálem Φ. Pro slabá pole $|\Phi| \ll c^2$ (což ve vesmíru je skoro všude vyjma okolí černých děr a neutronových hvězd) lze převrácenou odmocninu v (R2) aproximovat Taylorovým rozvojem

$$t = \tau\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-½} \approx \tau\left(1-\frac{\Phi}{c^2}\right), \tag{R3}$$

což je hledaný vzorec (23) pro *dilataci času* v gravitačním poli. V každém místě, kde je $\Phi < 0$, čas plyne *pomaleji* oproti času ve vzdáleném referenčním místě, kde je $\Phi = 0$, protože $\tau < t$. Ve stejném poměru bude menší i *frekvence periodických dějů* (například vyzařovaného světla)

$$f = f_0\left(1+\frac{2\Phi}{c^2}\right)^{½} \approx f_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{R4}$$

Frekvence f v silnějším gravitačním poli poblíž hmotného tělesa je tedy nižší nežli referenční frekvence f_0 daleko od tělesa, $f < f_0$. Světlo se proto bude jevit červenější.

Vzorce (R3) a (R4) platí obecně pro každé statické gravitační pole. Speciálně i pro potenciál *sférického objektu* hmotnosti M, který je ve vzdálenosti r od centra dán newtonovským vzorcem $\Phi = -GM/r$, kde G je gravitační konstanta.

podlaha i papíry padají stejnou rychlostí. Pod nohama proto nemůže cítit tlak podlahy. A naopak: urychlování výtahu směrem nahoru vyvolá pocit silnějšího gravitačního působení opačným směrem. Zrychlení a gravitace jsou (lokálně) opravdu totéž![14] Bez jakýchkoli problémů je lze „navzájem převádět“.

Nyní se již můžeme vrátit k dořešení „paradoxu“ dvojčat. Podle principu ekvivalence můžeme *všechny efekty* pozorované ve zrychlené raketě Janou připsat homogennímu gravitačnímu poli. Lze tedy použít vzorec (23) pro odpovídající dilataci času. Musíme jenom spočítat příslušný gravitační potenciál Φ. Protože gravitační pole je homogenní, platí obvyklý vzorec pro potenciální energii $V = -mgx$, takže

$$\Phi \equiv \frac{V}{m} = -gx. \tag{24}$$

Na počátku jsou hodiny Adama a Jany na *stejném* místě $x = 0$, takže $\Phi = 0$, a tudíž podle (23) $t = \tau$. Oboje hodiny tikají stejně a jsou synchronizované.

Pak však začne raketa zrychlovat. Díky principu ekvivalence vnímá Jana uvnitř rakety toto konstantní zrychlování jako homogenní gravitační pole (navíc stále s příjemným „pozemským tíhovým zrychlením“ $g = a = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$), pro které platí vztah (24), kde x je vzdálenost rakety ve vztahu k Adamovi. Dosadíme-li do (24) ze vzorce (6) a vyjádříme pomocí nich (23), dostaneme vztah

$$\frac{t}{\tau} = \sqrt{1+\left(\frac{g}{c}t\right)^2}. \tag{25}$$

Pravá strana však není v tomto případě nic jiného nežli faktor γ daný vzorcem (22), takže

$$\frac{t}{\tau} = \gamma. \tag{26}$$

To je evidentně naprosto *stejný výsledek* jako vzorec (21) pro *dilataci času ve speciální teorii relativity*, platný pro vztah mezi inerciálními soustavami. **Oba přístupy k řešení „paradoxu dvojčat“ jsou navzájem konzistentní a jeho objasnění tudíž přesvědčivější.**

Kinnersleyho fotonová raketa a zakřivený prostoročas

Všeobecně se už ví, že Einsteinova obecná teorie relativity vysvětluje gravitaci zakřivením prostoročasu. Zatím jsme tu ale o žádné deformaci prostoru nemluvili, pouze o zvláštní „deformaci“ času dané vzorcem (23). Použili jsme tedy k vysvětlení „paradoxu“ dvojčat obecnou relativitu?

Ano i ne. V našich úvahách jsme se evidentně dostali za rámec speciální relativity, protože jsme uvažovali *neinerciální soustavu* zrychlující rakety. *Prostoročas ale zůstal nezakřivený.* Raketu s Janou jsme chápali jenom jako „testovací částici“ (reprezentující neinerciální vztažnou soustavu) neboli velmi málo hmotný objekt, který nezakřivuje prostoročas kolem sebe. V tomto smyslu jsme ještě *nepoužili plnou sílu* Einsteinovy obecné relativity, jejíž (značně pokročilý) matematický aparát dokáže přesně popisovat zakřivené čtyřrozměrné prostoročasy. A hlavně díky Einsteinovým rovnicím gravitačního pole z roku 1915 jednoznačně *propojuje hmotu s geometrií prostoročasu.* Unikátní Einsteinovy rovnice nám přesně říkají, jakým způsobem konkrétní hmota ve svém okolí zakřivuje prostoročas, přičemž toto *zakřivení prostoročasu vnímáme jako gravitační slapová působení.*[15]

Existuje nějaké přesné řešení Einsteinových rovnic, které by popisovalo zakřivený prostoročas v okolí

14 Srozumitelné objasnění principu ekvivalence, jeho historii a podstatu Einsteinova odvození vzorce (23) pomocí principu ekvivalence a Dopplerova jevu lze najít na str. 95–102 skvělé knihy Kipa Thorna [19].

15 Pokud jde o gravitační pole a jeho „velikost“, musíme pečlivě rozlišovat newtonovské pojmy *potenciál, síla* a *slapy.* Zatímco *potenciál* Φ vstupuje například do Einsteinova vzorce (23), Newtonovu gravitační *sílu* lze vždy lokálně vynulovat přechodem do okamžité inerciální soustavy „padajícího výtahu“. I v této soustavě se však projevují *nehomogenity* gravitačního pole neboli *slapy*, a právě ty Einstein interpretoval jako specifické zakřivení prostoročasu.

zrychlující a *hodně hmotné* rakety? Tím bychom se už opravdu zcela ocitli v podivuhodně krásné (i když složité) říši obecné teorie relativity.

Možná vás to překvapí, ale takové řešení opravdu existuje. A dokonce se dá zapsat v docela jednoduchém tvaru

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - 2\,a\,r\cos\vartheta\right)\mathrm{d}u^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + r^2(\mathrm{d}\vartheta + a\sin\vartheta\,\mathrm{d}u)^2 + r^2(\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2. \tag{27}$$

Tuto *metriku*, která je jedním z velice zajímavých přesných řešení Einsteinových rovnic gravitačního pole, našel už před půl stoletím v roce 1969 William Kinnersley [20]. Ve vzorci (27) jsou $(u, r, \vartheta, \varphi)$ čtyři *prostoročasové souřadnice*, funkce $m(u)$ představuje časově proměnnou *hmotnost rakety* a konstanta a označuje *zrychlení rakety*.

Proč není hmotnost rakety konstantní? Aby raketa letěla, tedy zrychlovala směrem dopředu, musí se dozadu zbavovat (podstatné části) své hmotnosti! To platí v klasické Newtonově mechanice i v Einsteinově teorii. V tomto případě raketa vysílá dozadu za sebe velmi intenzivní *pole fotonů*. Je to tedy přesné řešení pro *zrychlující fotonovou raketu*! Právě tak nazval metriku (27) William Bonnor, když v roce 1994 toto řešení Einsteinových rovnic podrobněji analyzoval [21].

Mimochodem: hmotnost rakety během letu díky vyzařování fotonů klesá *exponenciálně* podle vzorce $m(u) = m_0 e^{-3au}$, kde u hraje roli „vnějšího globálního času“. Zhruba platí $u \approx \tau$, kde τ je vlastní čas Jany v raketě. Pro nalezení přesného vztahu mezi u a τ je (opět!) nutné použít Einsteinův klíčový vztah (23) pro dilataci času ve vlastním gravitačním poli rakety, které v tomto případě už není zanedbatelné.

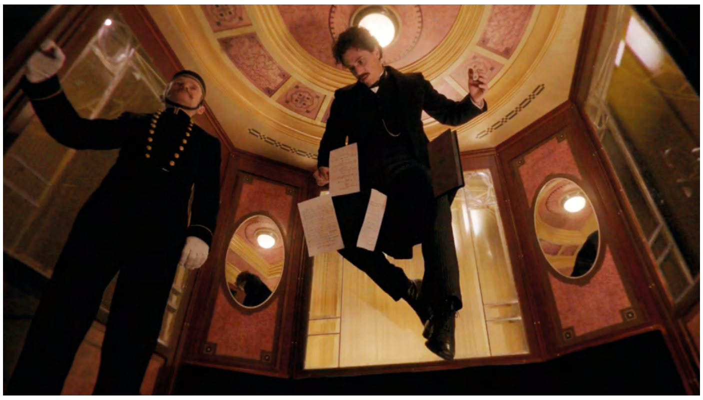
Je překvapivé, že Kinnersleyho řešení (27) připouští dokonce i *časově proměnné zrychlení* $a(u)$. Fotonová raketa při svém přímočarém letu tedy může jakkoli zrychlovat, letět setrvačností (když přestane vyzařovat fotony) a pak naopak třeba zpomalovat, a to libovolným tempem. Stačí jenom předepsat příslušnou funkci $a(u)$. Když zvolíme *nulové zrychlení*, tedy $a = 0$, fotony se nevyzařují a hmotnost rakety m zůstává *konstantní*. V tom případě přechází Kinnersleyho metrika (27) na slavné *Schwarzschildovo řešení*[16]

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}u^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + r^2\left[\,(\mathrm{d}\vartheta)^2 + (\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi)^2\,\right] \tag{28}$$

pro vnější (vakuové) gravitační pole *sféricky symetrického* objektu (Země, Slunce, hvězdy, černé díry, stojící sférické rakety atd.).

Kinnersleyho řešení se dá zobecnit, a to dokonce mnoha způsoby. Přidáním *kosmologické konstanty* do prvního členu „vyrobíme“ fotonovou raketu letící v *de Sitterově vesmíru*, což je prázdný vesmír vyplněný „temnou energií“ (viz článek [22] a kniha [23] jednoho z autorů tohoto příspěvku, JP). Existuje i zobecnění *do prostoročasu libovolné vyšší dimenze*. A řešení lze dokonce dále zobecnit tak, že raketa může *libovolným způsobem manévrovat*, tedy nemusí letět jen přímočaře vpřed. Zajímá-li vás, jak takové řešení vypadá, jaký je vyzařovací diagram fotonů a jakým způsobem se přitom mění rychlost a hmotnost rakety, nahlédněte do [24].

16 Zapsané zde v tzv. Eddingtonových–Finkelsteinových souřadnicích. Obvyklý tvar s časovou souřadnicí t se získá transformací $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t - \mathrm{d}r/(1 - 2m/r)$.



Obr. 7 Myšlenkový experiment s padajícím výtahem, který demonstruje princip ekvivalence. K jeho animaci v seriálu *Génius* byl použit secesní výtah v pražském Obecním domě.

Závěrečné shrnutí pro pedagogy

Uvedení a rozbor „paradoxu“ dvojčat ve výuce teorie relativity na střední škole je pro žáky určitě zajímavé a inspirující téma. Při jeho vysvětlování se však setkáváme s řadou metodických problémů. Pokusili jsme se zde předložit specifický přístup a návod (kombinující znalosti a úvahy středoškolského a vysokoškolského učitele fyziky), jak problematiku výkladu „paradoxu“ dvojčat pojmout.

Možný postup výkladu je následující:

1. Užije se standardní vztah pro dilataci času (1), ze kterého vyplyne, že z hlediska pozorovatele ve Sluneční soustavě (Adama) plyne čas v kosmické lodi (Jany) pomaleji.
2. Zdánlivý rozpor, totiž že obě soustavy jsou podle relativity rovnocenné, a tudíž by naopak měl plynout pomaleji také čas Adama vůči Janě, se vysvětlí **asymetrií jejich historie.** Pro přímé porovnání jejich hodin je totiž potřeba dopravit je *na stejné místo*, ale jenom Jana při tomto ději zažívá zrychlení (a zpomalení) své rakety, zatímco Adam je po celou dobu v inerciální vztažné soustavě.
3. Konkrétní řešení v rámci speciální teorie relativity, které lze najít například ve vysokoškolských učebnicích [5] nebo [8], vyžaduje vzít do úvahy a pečlivě započítat vzájemné vztahy mezi *třemi* inerciálními soustavami, totiž Adama, vzdalující se Jany a přibližující se Jany (respektive Jitky). Koncepční podstatou řešení „paradoxu“ je relativita současnosti, plynoucí z Lorentzovy transformace: kvůli tomu Jana *těsně před* otočkou rakety a Jana *těsně po* otočce rakety (neboli Jitka) bude za „současné“ považovat *dvě různé události v Adamově historii*, mezi nimiž „náhle“ uplyne hodně dlouhý čas. Podrobný rozbor tohoto jevu bohužel není úplně přehledný a přesahuje rámec střední školy (viz obr. 3 a rámeček 1).
4. Domníváme se, že je vhodné vyhnout se úvahám o „náhlém přeskoku“ Jany z jedné inerciální soustavy do druhé v okamžiku otočky její rakety. Při tom totiž dochází „k nekonečnému zrychlení“, jehož vliv na chod Janiných hodin není ze speciální teorie relativity vůbec jasný a odůvodněný. Dostáváme se dokonce mimo její rámec do obecné teorie relativity, která platí ve všech vztažných soustavách, tedy i zrychlených (neinerciálních).

„Paradox“ dvojčat je přirozeněji a konzistentněji řešitelný v rámci Einsteinovy obecné relativity.

5. Navrhujeme proto jako didakticky přesvědčivější řešení „paradoxu“ dvojčat uvažovat takový pohyb Jany, kdy její raketa *po celou dobu zrychluje* (resp. zpomaluje) *s konstantním zrychlením*, viz obr. 5. Řešením příslušné pohybové rovnice (2) lze získat všechny potřebné vzorce, zejména vztah (11) mezi vlastním časem Jany v raketě a vlastním časem Adama ve Sluneční soustavě. Velmi zajímavé a poměrně jednoduché jsou také vzorce pro vzdálenost a rychlost Janiny rakety (6) a (5), vyjádřené pomocí času t Adama, resp. (12) a (13) pomocí vlastního času τ Jany.
6. Tyto vzorce lze dobře ilustrovat dosazením konkrétních hodnot, viz vzorce (14) až (20). Přitom jsou použity a na zajímavém fyzikálním případu s relativistickou raketou procvičeny hyperbolické funkce, které na střední škole sice nejsou běžné, ale studenti je najdou na svých kalkulačkách.
7. Spočítaná úloha s konstantně zrychlující raketou může potom sloužit jako *přirozený most mezi speciální a obecnou teorií relativity:* jedná se o přechod od fyzikální teorie platné pouze v inerciálních soustavách k teorii platné v libovolných neinerciálních soustavách. Tato zobecněná relativistická teorie podle Einsteina zahrnuje i gravitaci.
8. Klíčovou roli při těchto úvahách hraje *princip ekvivalence*, což je výchozí princip obecné relativity. Princip ekvivalence (dnes experimentálně ověřovaný s obrovskou přesností) říká, že *účinky konstantního zrychlení neinerciální vztažné soustavy a homogenního gravitačního pole od sebe nelze za žádných okolností odlišit*. Lze ho velmi hezky demonstrovat a zdůvodnit Einsteinovým myšlenkovým pokusem s výtahem (obr. 4 a obr. 7).
9. Pomocí principu ekvivalence lze převést výpočty, které se týkaly chodu hodin Jany ve zrychlené raketě, na chod hodin v gravitačním poli. Tím se ukáže konzistence s výpočtem podle slavného Einsteinova vzorce (23) pro *dilataci času v gravitačním poli* (neboli pro červený posuv světla) z roku 1907, resp. 1911 (obr. 6).
10. Tento vzorec (který lze srozumitelně odůvodnit Einsteinovými úvahami o rotujícím disku, viz rámeček 2) říká, že *v silnějším gravitačním poli jdou hodiny pomaleji*: podíl časových intervalů je určen *rozdílem gravitačních potenciálů Φ* v místech obou od sebe vzdálených hodin.
11. **Výpočet celkové dilatace času během zrychleného a zpomaleného letu rakety s Janou vůči Adamovi užitím obecné relativity vede k úplně stejnému finálnímu výsledku, který lze dostat správně použitým vzorcem speciální relativity (1) pro tři inerciální soustavy,** jak je detailně provedeno v učebnicích [5] a [8]: vztahy (21) a (26) jsou identické. **Když fyzikálně správnými úvahami aplikujeme matematické vzorce speciální relativity i obecné relativity, žádný rozpor nevzniká. Výsledky jsou jednoznačné.**
12. Závěrem se lze studentům zmínit o tom, že v kontextu Einsteinovy teorie gravitace existují dokonce i přesná řešení popisující zakřivený prostoročas v okolí zrychlujícího a velmi hmotného objektu – takzvaná Kinnersleyho fotonová raketa (27) a její zobecnění.

Toto shrnutí hlavních bodů článku snad opravňuje naše tvrzení, že „paradox“ dvojčat je přirozeněji a konzistentněji řešitelný v rámci Einsteinovy obecné relativity, jež rozšiřuje platnost relativistických zákonů také na neinerciální soustavy a současně je i teorií gravitace.

Poděkování

JP děkuje Grantové agentuře ČR za dlouholetou podporu výzkumu přesných prostoročasů, aktuálně projektu číslo 20-05421S. Oba autoři děkují prof. Janu Novotnému za jeho rady a komentáře.

Literatura

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: *Fyzika*. Vutium a Prometheus, Brno 2000; druhé vydání Vutium, Brno 2013.

[2] K. Bartuška: *Speciální teorie relativity.* 3. přepracované vydání. Prometheus, Praha 2001.

[3] L. Dvořák: *Teorie relativity.* Prozatímní učební text k přednášce NUFY027. Katedra didaktiky fyziky MFF UK, Praha 2015. Dostupné online na: http://kdf.mff.cuni.cz

[4] J. S. Al-Khalili: *Paradox*. Leda, Rozmluvy, Voznice, Praha 2014.

[5] V. Votruba: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha 1977.

[6] E. S. Lowry: The clock paradox. *American Journal of Physics* **31**, 59 (1963).

[7] O. Semerák: *Speciální teorie relativity. Text k přednášce pro MFF UK.* Ústav teoretické fyziky MFF UK, Praha 2012.

[8] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník: *Mechanika ve fyzice*. Academia, Praha 2001.

[9] J. Horský: *Úvod do teorie relativity.* SNTL, Praha 1975.

[10] C. M. Will: The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity* **17**, 4 (2014). Dostupné online na: http://www.livingreviews.org/lrr-2014-4

[11] K. Rektorys a kol.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, Praha 1981.

[12] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperbolické_funkce, resp. https://cs.wikipedia.org/wiki/Hyperbolometrická_funkce

[13] B. F. Schutz: *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge 1985.

[14] P. Krtouš: *Výlet ke hvězdám – Paradox dvojčat*. Demonstrační program a interaktivní animace, Praha 2001–2004. Dostupné online na: http://utf.mff.cuni.cz/popularizace/StarTrip/StarTrip.html

[15] C. Rovelli: *Řád času*. Dokořán, Argo, Praha 2020.

[16] A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* **4**, 411–462 (1907).

[17] A. Einstein: Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. *Annalen der Physik* **35**, 898–908 (1911).

[18] A. Einstein: *Theorie relativity speciální i obecná*. František Borový, Praha 1923. Včetně všech pozdějších dodatků přetištěna v knize *Teorie relativity,* Vutium, Brno 2005.

[19] K. S. Thorne: *Černé díry a zborcený čas – Podivuhodné dědictví Einsteinova génia*. Mladá fronta, Praha 2004.

[20] W. Kinnersley: Field of an arbitrarily accelerating point mass. *Physical Review* **186**, 1335–1336 (1969).

[21] W. B. Bonnor: The photon rocket. *Classical and Quantum Gravity* **11**, 2007–2012 (1994).

[22] J. Podolský: Photon rockets in (anti-)de Sitter universe. *Physical Review D* **78**, 044029 (2008). Dostupné na: https://arxiv.org/abs/0806.2966

[23] J. B. Griffiths, J. Podolský: *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge 2009.

[24] J. Podolský: Photon rockets moving arbitrarily in any dimension. *International Journal of Modern Physics D* **20**, 335–360 (2011). Dostupné na: https://arxiv.org/abs/1006.1583