03

02

01

PŘEKVAPIVÁ ŘEŠENÍ ÚLOH MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Jaromír Šimša

Velké Meziříčí, 21. srpna 2019

Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.

(*krajské kolo MO kategorie B*, 2. 4. 2019)

Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.

Ze všech 51 řešitelů Jihomoravského kraje
29 získalo 0 bodů,
3 získali 1–2 body,
4 získali 3–4 body,
2 získali 5 bodů,
13 získalo 6 bodů.

Bodové zisky všech žáků ČR za všechny čtyři úlohy:

Body	0	1	2	3	4	5	6	7
Žáci	23	62	57	42	22	18	35	18

Body	8	9	10	11	12	13	14	15
Žáci	13	15	19	18	5	13	8	5

Body	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Žáci	1	7	4	5	5	1	2	7	5

Bodové zisky všech žáků ČR za všechny čtyři úlohy:

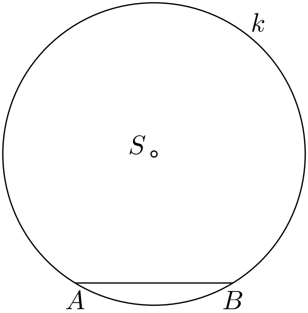
Body	0	1	2	3	4	5	6	7
Žáci	23	62	57	42	22	18	35	18

Body	8	9	10	11	12	13	14	15
Žáci	13	15	19	18	5	13	8	5

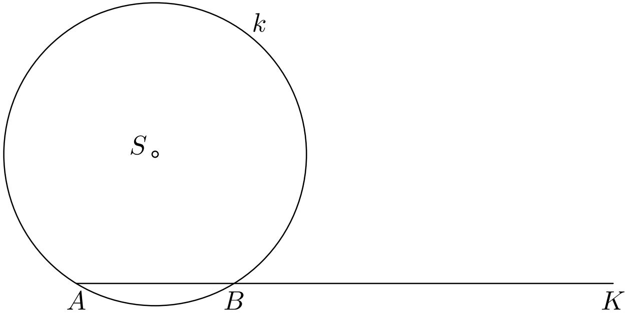
Body	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Žáci	1	7	4	5	5	1	2	7	5

Celkem 410 žáků, úspěšných 133 (s alespoň 8 body).
206 žáků získalo ze čtyř úloh méně než 5 bodů.

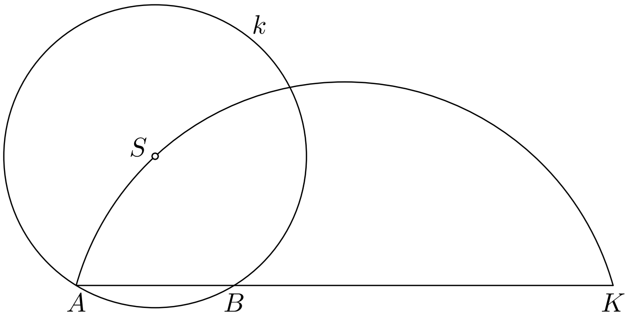
Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.



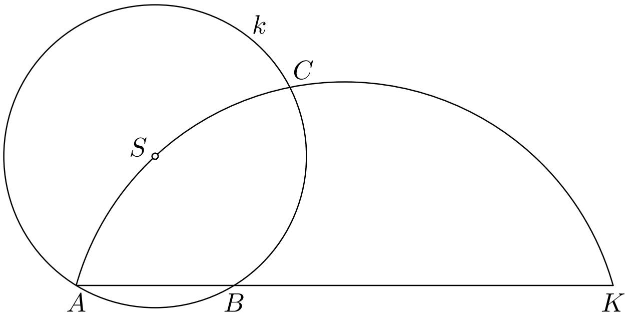
Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.



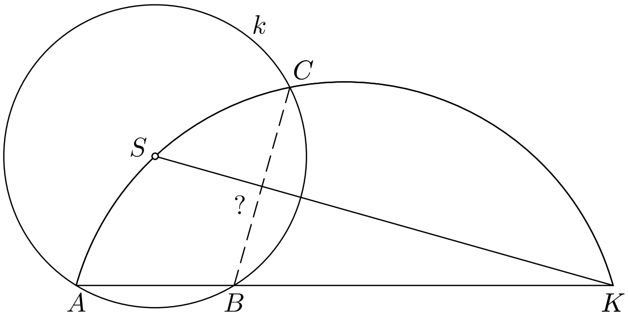
Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.

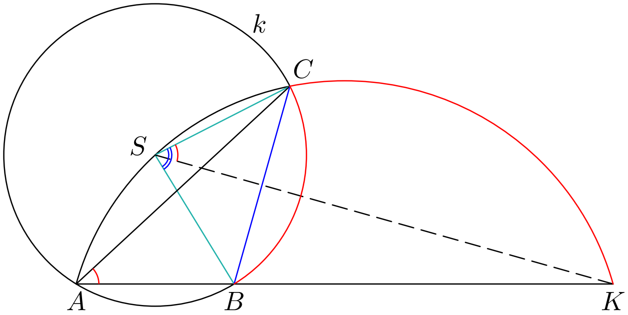


Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.



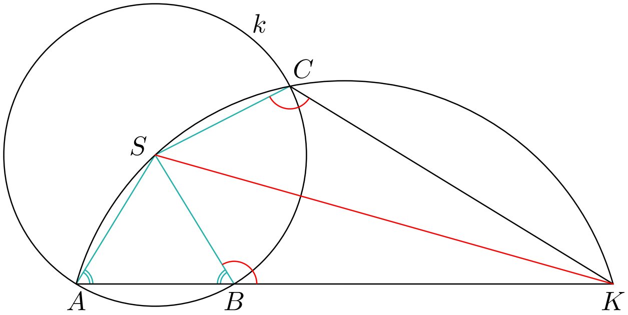
Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB, která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod K různý od B. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C, který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK.



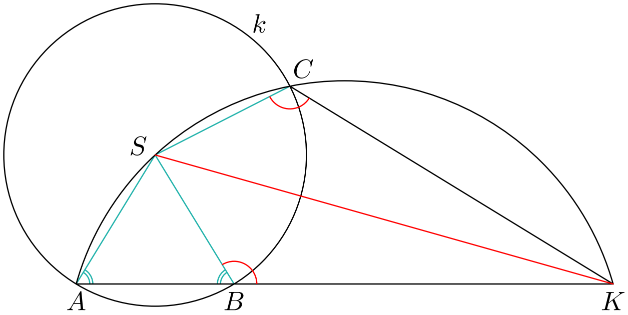


Řešení 1.

□

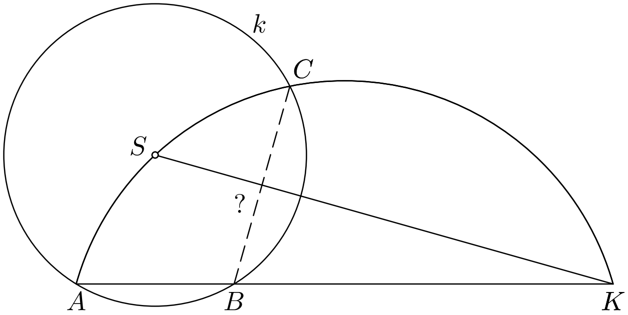


Řešení 2.

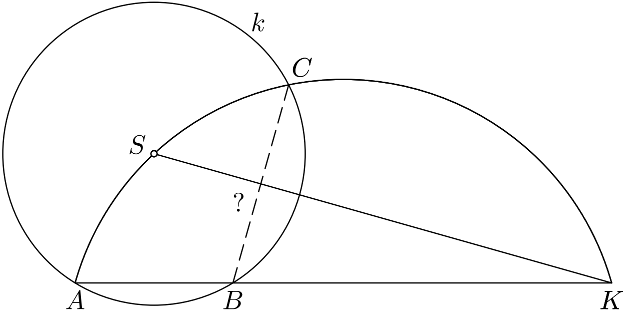


Řešení 2.

Trojúhelníky KBS a KCS jsou shodné podle věty Ssu, takže jsou souměrně sdružené podle přímky KS. $\square$



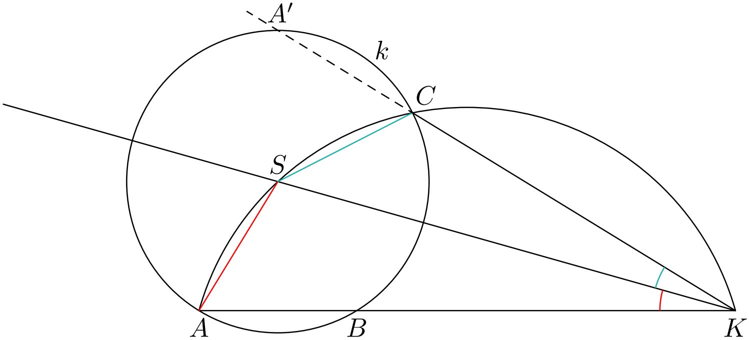
Řešení 3*.



Řešení 3*.

Řešitelka úvodem poznamenala:

Kružnice je souměrná podle každé přímky, která prochází jejím středem.


A'
k
C
S
A
B
K

□

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?

(*krajské kolo MO kategorie* A, 15. 1. 2019)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?

Ze všech 54 řešitelů Jihomoravského kraje

19 získalo 0 bodů,

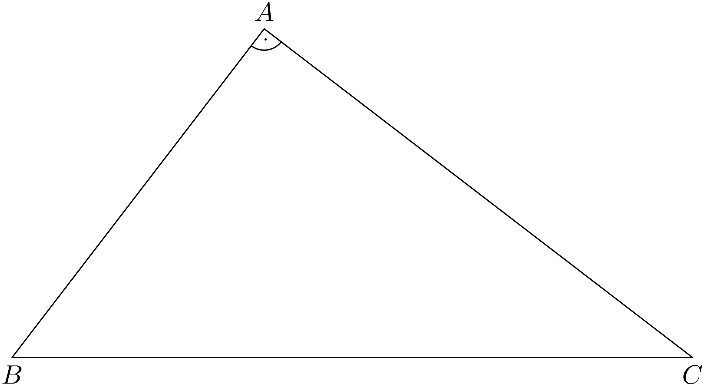
22 získali 1–2 body,

3 získali 3–4 body,

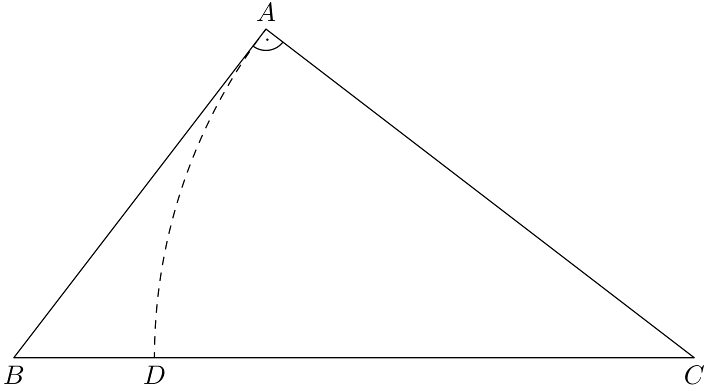
3 získali 5 bodů,

7 získalo 6 bodů.

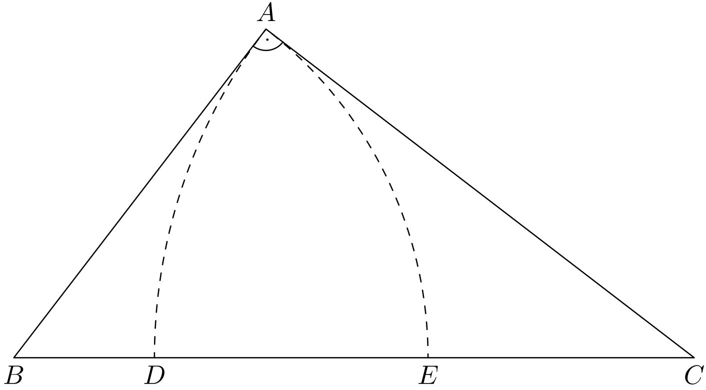
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?



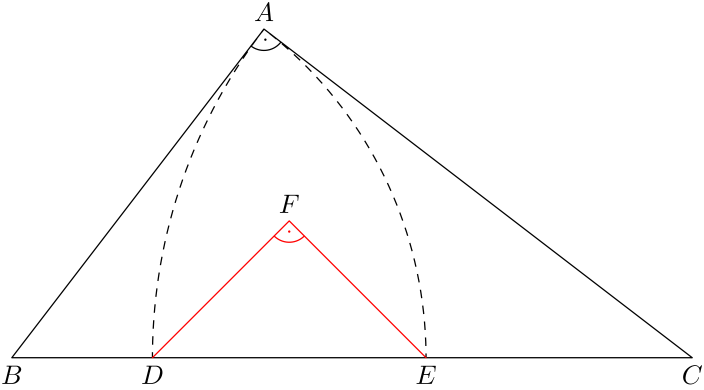
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?



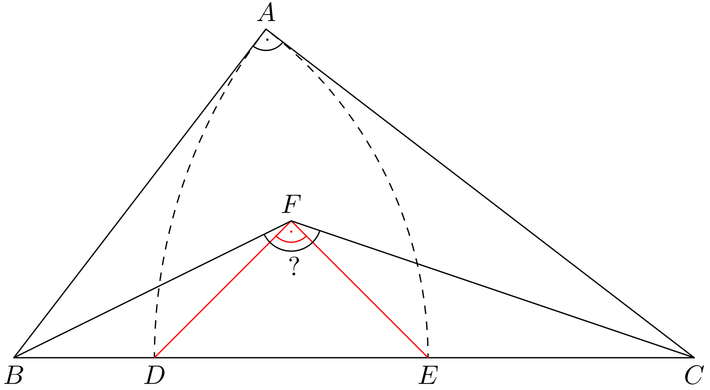
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?

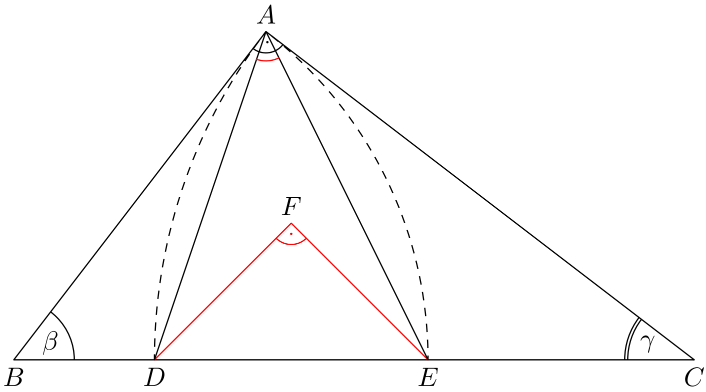


Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?



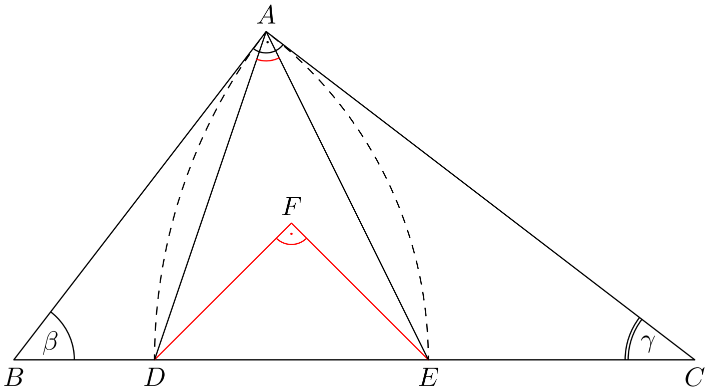
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC. Na jeho přeponě BC leží body D, E takové, že $|CD| = |CA|$, $|BE| = |BA|$. Nechť F je takový vnitřní bod trojúhelníku ABC, že DEF je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s přeponou DE. Jaká je velikost úhlu BFC?



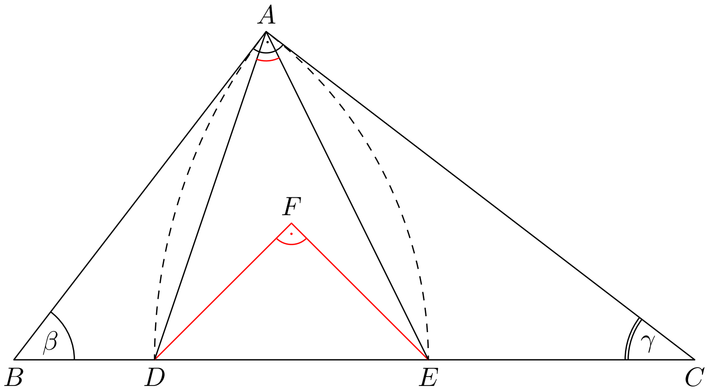


Řešení 1.

Ukážeme nejdříve, že $|\sphericalangle DAE| = 45^\circ$ nezávisle na β a γ.

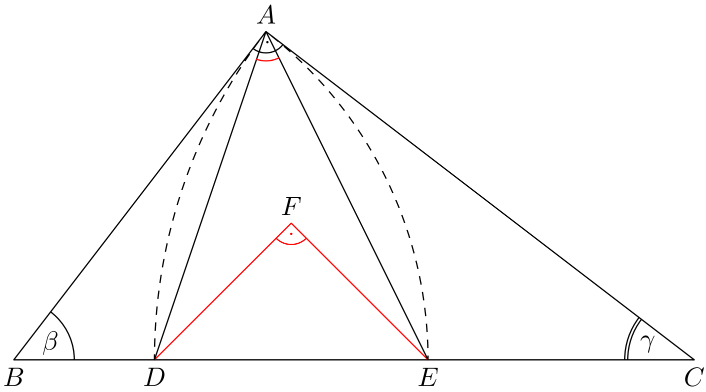


rr $\triangle ADC$: $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \implies |\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}\gamma$



rr $\triangle ADC$: $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \implies |\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}\gamma$

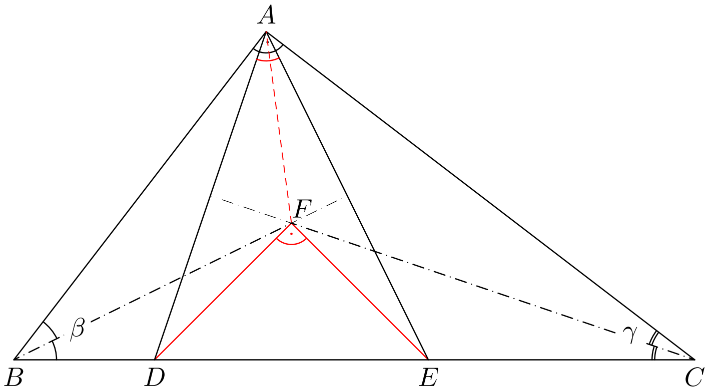
rr $\triangle AEB$: $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BEA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta \implies |\sphericalangle CAE| = \frac{1}{2}\beta$



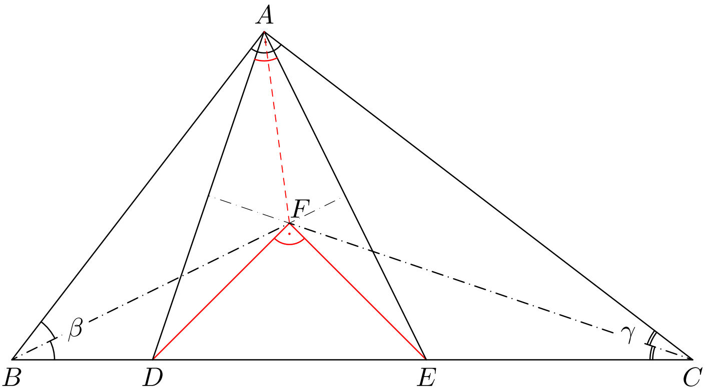
rr $\triangle ADC$: $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CDA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma \implies |\sphericalangle BAD| = \frac{1}{2}\gamma$

rr $\triangle AEB$: $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BEA| = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta \implies |\sphericalangle CAE| = \frac{1}{2}\beta$

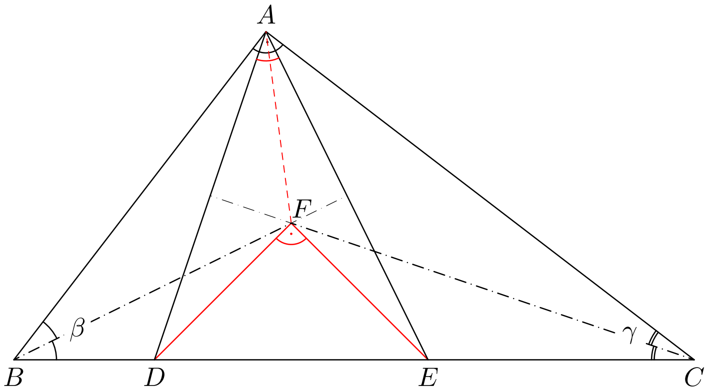
$|\sphericalangle DAE| = 90^\circ - |\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle CAE| = 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\beta = 45^\circ$



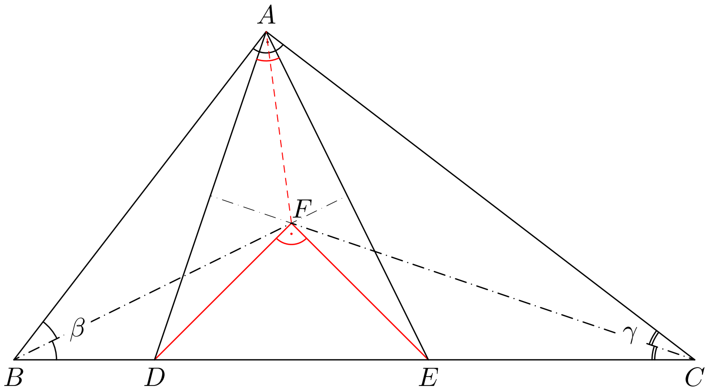
Nyní ukážeme, že bod F leží na osách úhlů β a γ.



$$|\sphericalangle DAE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DFE| \wedge |DF| = |EF|$$

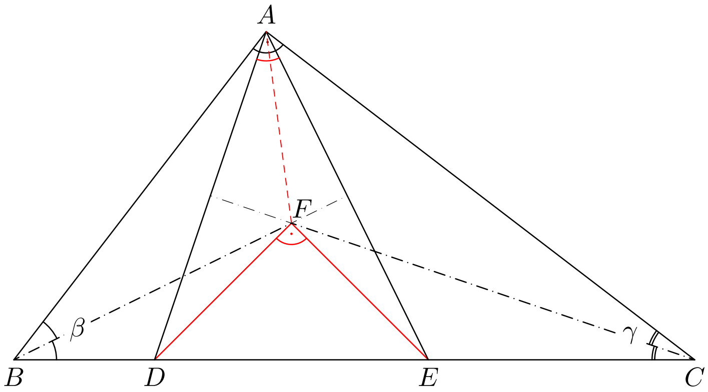


$$|\sphericalangle DAE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DFE| \wedge |DF| = |EF| \implies |DF| = |EF| = |AF|$$



$$|\sphericalangle DAE| = \tfrac{1}{2}|\sphericalangle DFE| \wedge |DF| = |EF| \implies |DF| = |EF| = |AF|$$

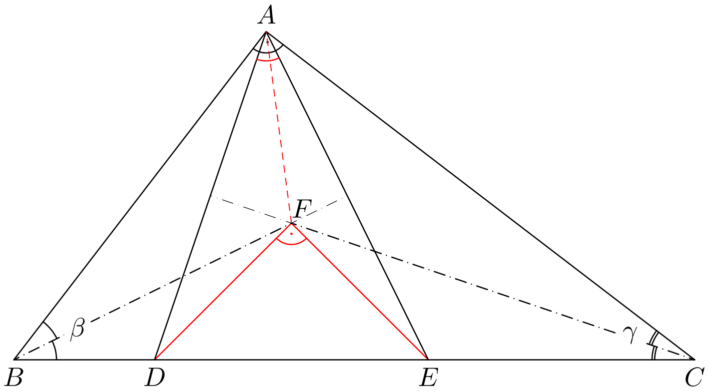
rr $\triangle ADC$: $|DF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu γ



$|\sphericalangle DAE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle DFE| \wedge |DF| = |EF| \implies |DF| = |EF| = |AF|$

rr $\triangle ADC:\ |DF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu γ

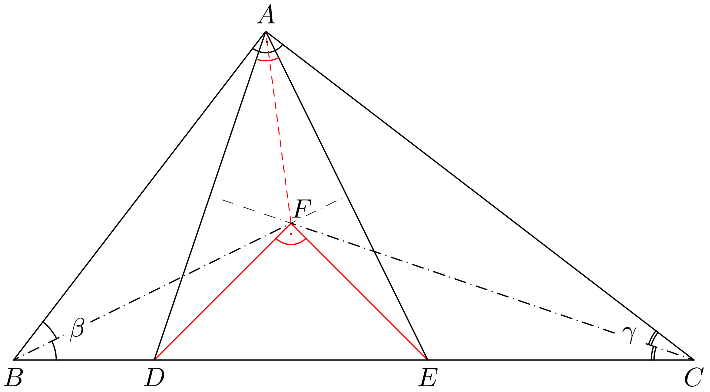
rr $\triangle AEB:\ |EF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu β



rr $\triangle ADC:\ |DF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu γ

rr $\triangle AEB:\ |EF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu β

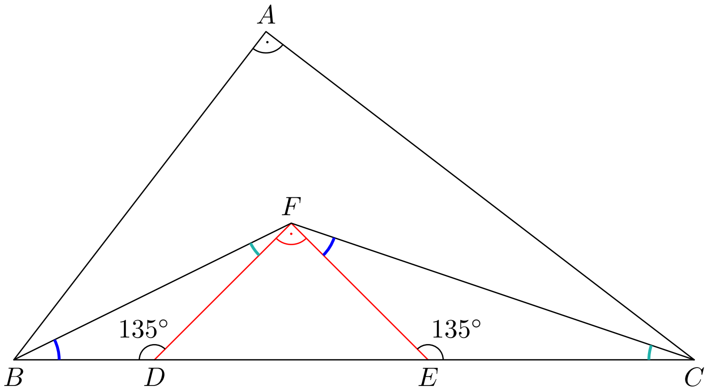
(F je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$)



rr $\triangle ADC$: $|DF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu γ

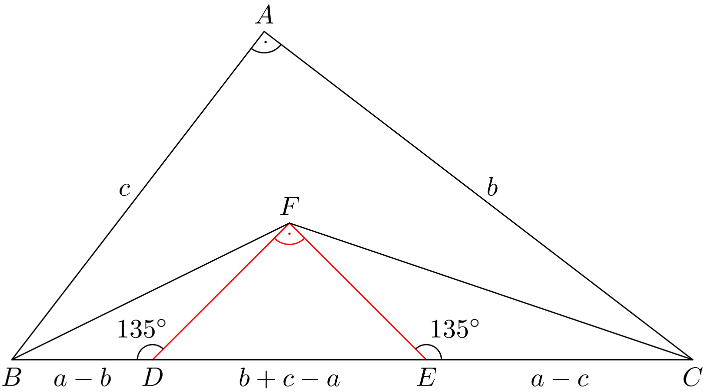
rr $\triangle AEB$: $|EF| = |AF| \implies F$ leží na ose úhlu β

$\triangle BFC$: $|\sphericalangle BFC| = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = 135^\circ \quad \square$

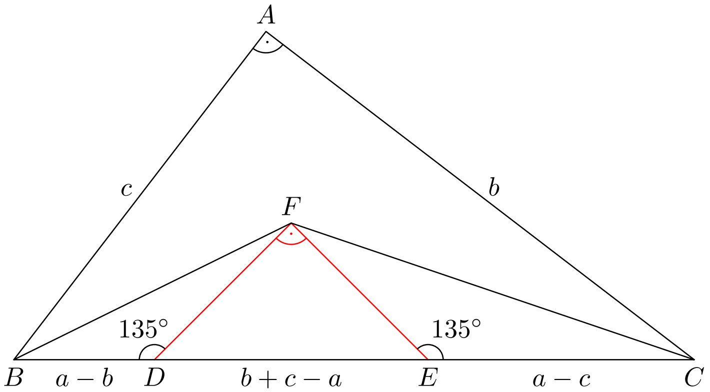


Řešení 2.

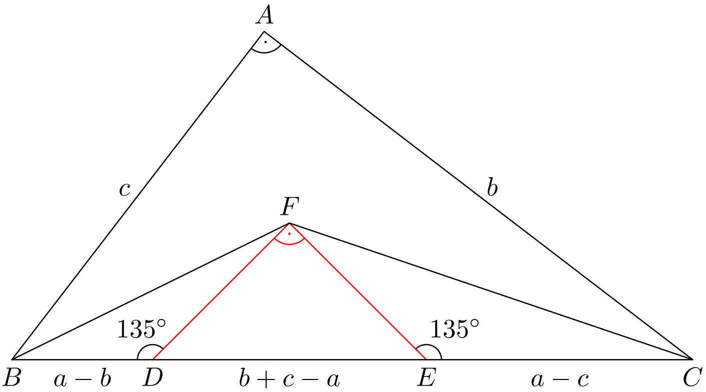
Má-li vyjít $|\sphericalangle BFC| = 135^\circ$, je nutné a stačí, aby …



$|AB| = c, \quad |AC| = b, \quad |BC| = a$

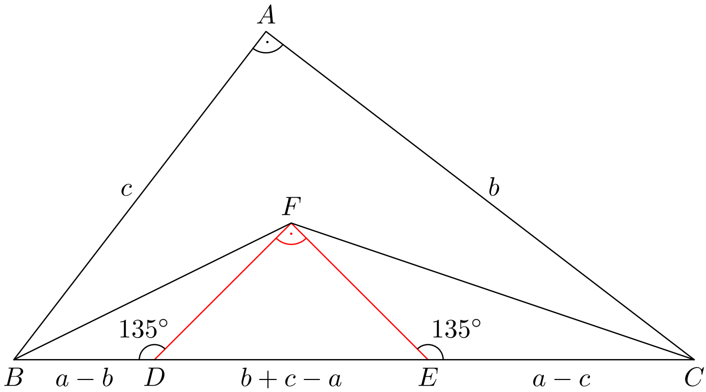


$$|DF| = |EF| = \frac{\sqrt{2}}{2}|DE| = \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c-a)$$



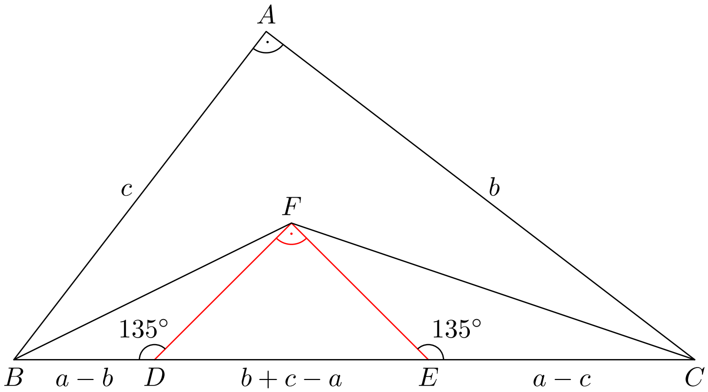
$$|DF| = |EF| = \frac{\sqrt{2}}{2}|DE| = \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c-a)$$

$\triangle FDB \sim \triangle CEF$, pokud $|DB| : |DF| = |EF| : |EC|$



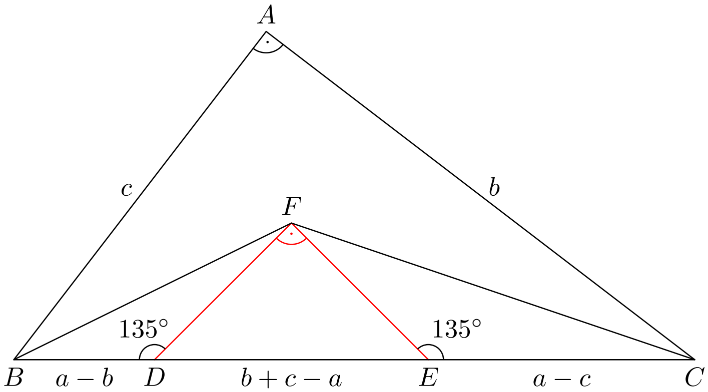
$|DF| = |EF| = \frac{\sqrt{2}}{2}|DE| = \frac{\sqrt{2}}{2}(b+c-a)$

$\triangle FDB \sim \triangle CEF$, pokud $|DB| : |DF| = |EF| : |EC|$ neboli $|DF|^2 = |DB| \cdot |EC|$

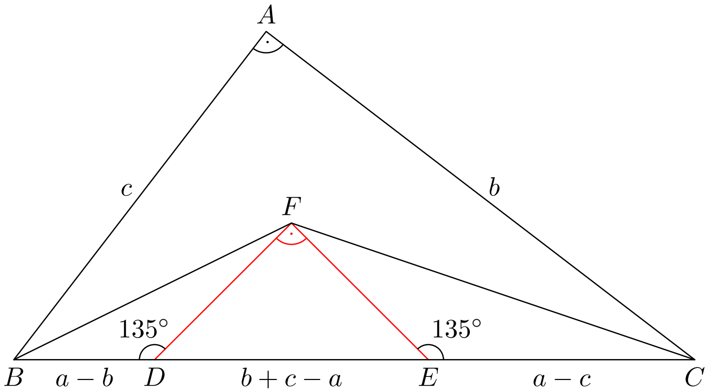


$|DF| = |EF| = \frac{\sqrt{2}}{2}|DE| = \frac{\sqrt{2}}{2}(b + c - a)$

$\triangle FDB \sim \triangle CEF$, pokud $|DB| : |DF| = |EF| : |EC|$ neboli $|DF|^2 = |DB| \cdot |EC|$ neboli $\frac{1}{2}(b + c - a)^2 = (a - b)(a - c)$.

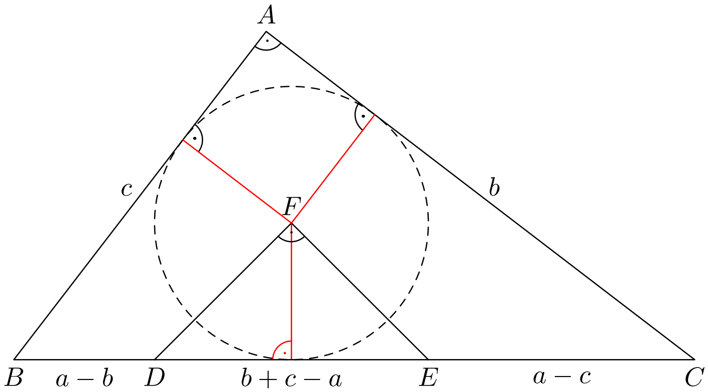


$\triangle FDB \sim \triangle CEF$, pokud $\frac{1}{2}(b+c-a)^2 = (a-b)(a-c)$.



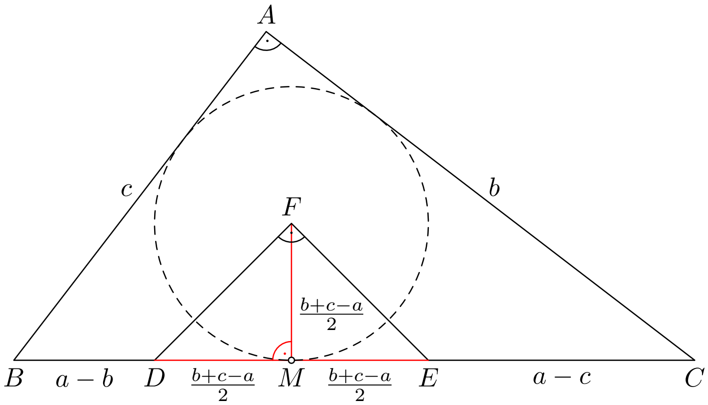
$\triangle FDB \sim \triangle CEF$, pokud $\frac{1}{2}(b+c-a)^2 = (a-b)(a-c)$.

To je však ekvivalentní s rovností $b^2 + c^2 = a^2$. $\square$

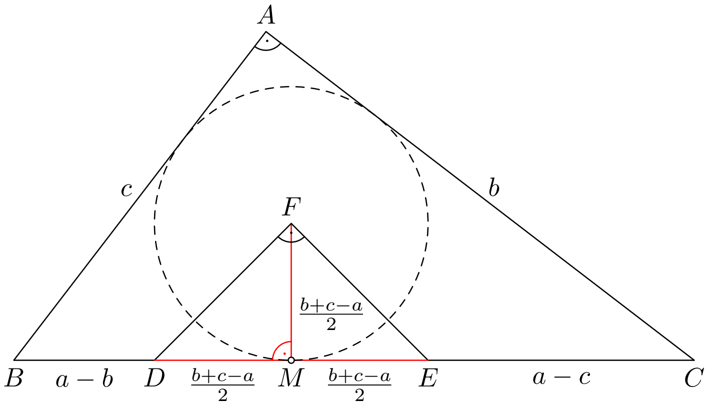


Řešení 3.

Stačí ukázat, že náš bod F je středem kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku, o které je toho dost známo (zasvěceným).

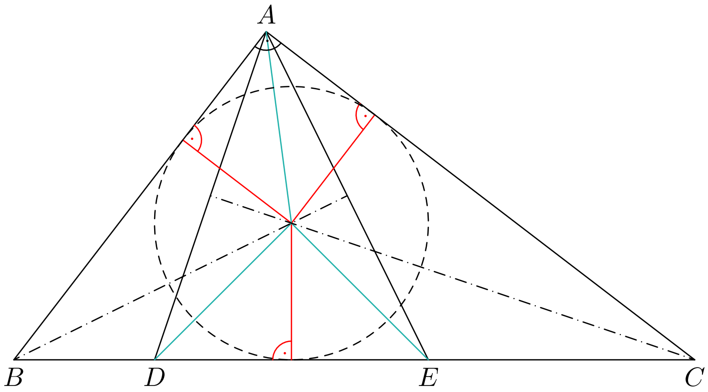


$$|DE| = b + c - a \implies |MD| = |ME| = |MF| = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$$



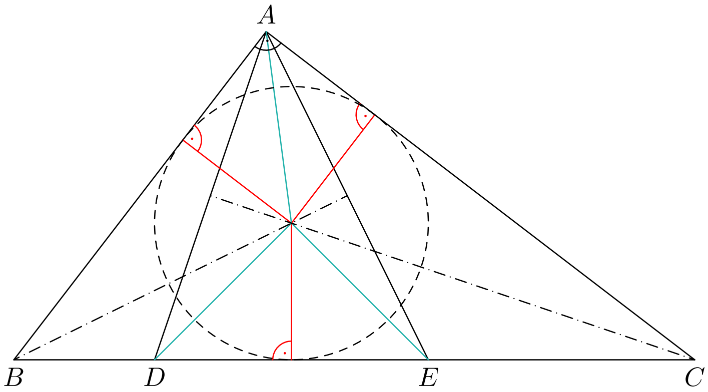
$$|DE| = b + c - a \implies |MD| = |ME| = |MF| = \tfrac{1}{2}(b + c - a)$$

Vepsaná kružnice má však poloměr $\varrho = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a dotyk s BC právě v bodě M daném rovností $|BM| = \frac{1}{2}(a + c - b)$. $\square$



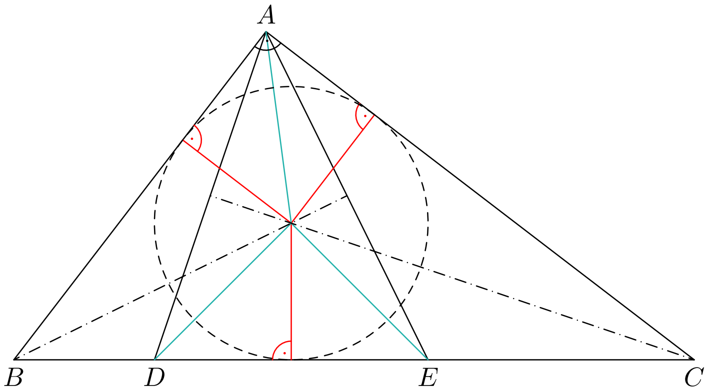
Řešení 4.

Vepsaná kružnice $k(S, \varrho)$



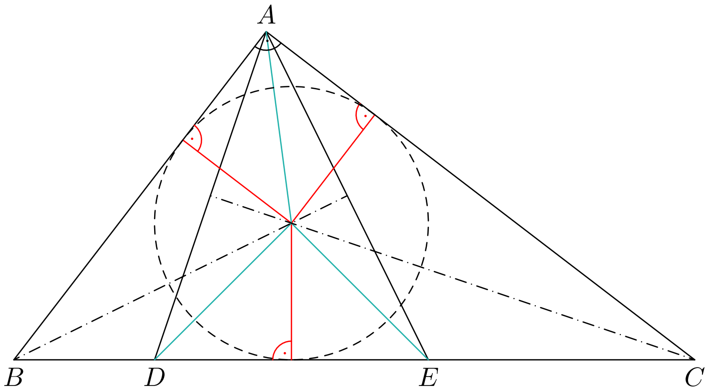
Řešení 4.

Vepsaná kružnice $k(S, \varrho)$ — je ΔDES rr a R?



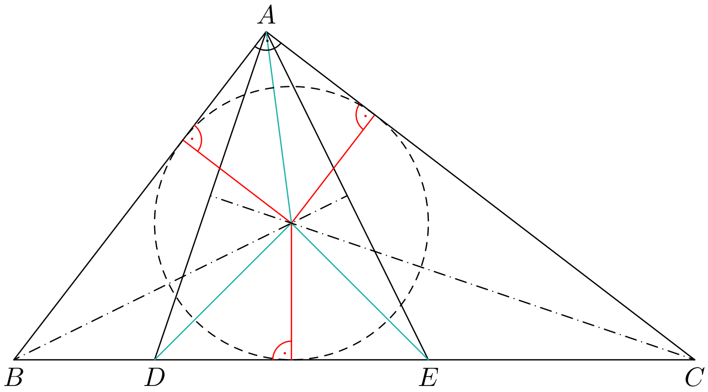
Řešení 4.

$|SD| = |SA| \quad (\text{rr } \Delta ADC)$



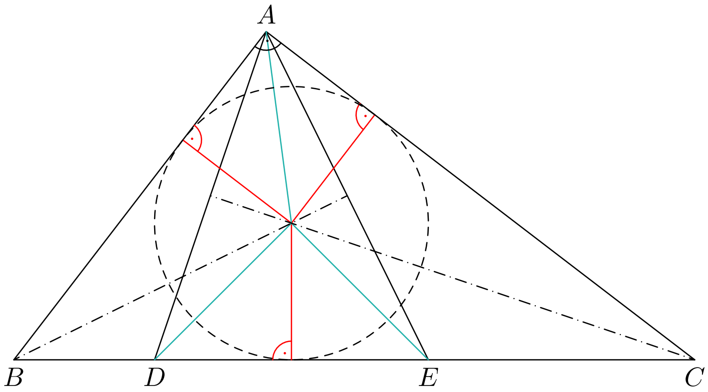
Řešení 4.

$|SD| = |SA| = |SE| \quad (\text{rr } \Delta AEB)$



Řešení 4.

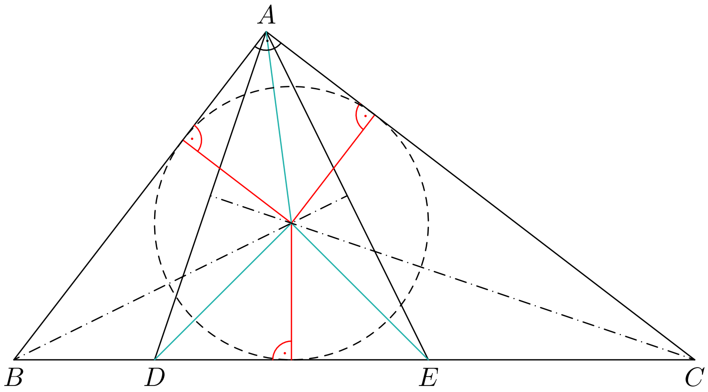
$|SD| = |SA| = |SE| = \varrho\sqrt{2}$ (ze čtverce u vrcholu A)



Řešení 4.

$|SD| = |SA| = |SE| = \varrho\sqrt{2}$

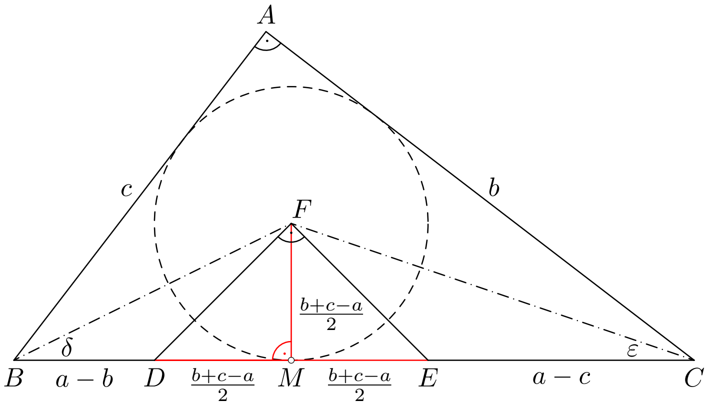
ΔDES je rr s rameny $\varrho\sqrt{2}$ a výškou ϱ



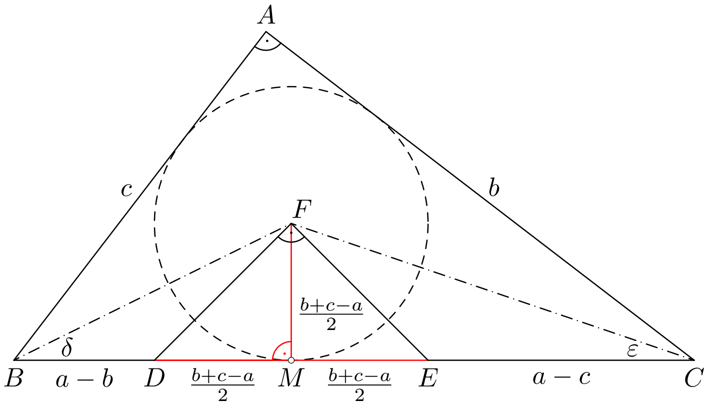
Řešení 4.

$|SD| = |SA| = |SE| = \varrho\sqrt{2}$

ΔDES je rr s rameny $\varrho\sqrt{2}$ a výškou $\varrho \implies$ je R. $\square$

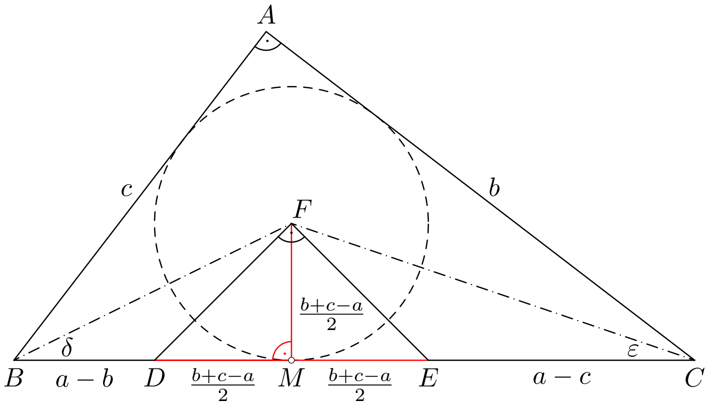


Řešení 5 (počtářské).



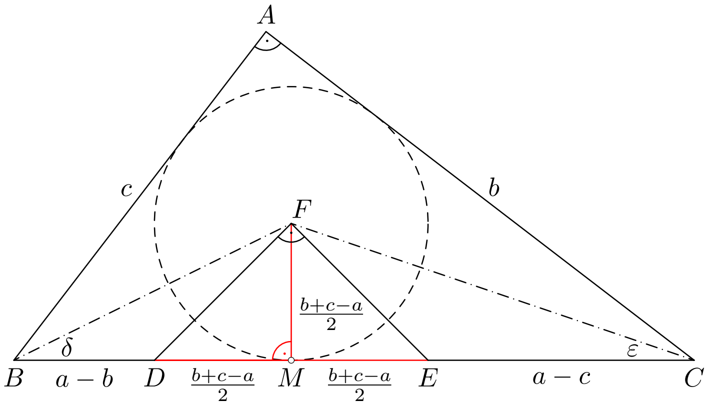
Řešení 5 (počtářské).

Na zavedené úhly ε, δ trojúhelníku BFC uplatníme funkci tangens.



Řešení 5 (počtářské).

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{|MF|}{|MC|} = \frac{b+c-a}{a+b-c}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{|MF|}{|MB|} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$



$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{|MF|}{|MC|} = \frac{b+c-a}{a+b-c}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{|MF|}{|MB|} = \frac{b+c-a}{a+c-b} \implies$$

$$\operatorname{tg}(\varepsilon+\delta) = \cdots = 1 \quad \square$$

Intermezzo: *Jak vznikají příklady na úpravy výrazů?*

Intermezzo: *Jak vznikají příklady na úpravy výrazů?*

Zjednodušte:

(1) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

(2) $\left((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}\right) : \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$

(3) $\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}} : \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)$

(4) $\left(\frac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3} : \left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6}$

(5) $\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}} - \frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}} - \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

(6) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} : \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$

(7) $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)} : \frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}$

(8) $t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$

(9) $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$

(10) $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$

(11) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$

(12) $\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$

(13) $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}} : \sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$

(14) $\left(\frac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$

(15) $\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}} \cdot \frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1} \cdot x^{1/4} + 1$

(16) $\left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1} \cdot (5-2x^2)$

(17) $\frac{(x^2-y^2)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}} - \left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

(18) $\sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4+\frac{8}{a}+\frac{4}{a^2}}{\sqrt{2}}}$

(19) $\frac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}$

(20) $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$

(21) $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})} \cdot \sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$

(22) $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$

(23) $\dfrac{a^3-a-2b-\frac{b^2}{a}}{1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\cdot(a+\sqrt{a+b})}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right)$

(24) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a^3\sqrt{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$

(25) $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

(26) $\dfrac{x(x^2-a^2)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-(x^2-a^2)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}$

(27) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$

(28) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$

(29) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$

(30) $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$

$$(31)\quad \frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}$$

$$(32)\quad 1-\frac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$$

$$(33)\quad \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$$

$$(34)\quad \left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right)$$

$$(35)\quad \frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}$$

$$(36)\quad \left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$$

$$(37)\quad \frac{9b^{4/3}-\frac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}$$

$$(38)\quad \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}$$

$$(39)\quad \frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}$$

$$(40)\quad \frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$$

$$(41)\quad \frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}$$

(42) $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1};$

(43) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}$

(44) $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

(45) $\frac{\frac{a-b}{2a-b}-\frac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{(4b^4+4ab^2+a^2):(2b^2+a)}\cdot(b^2+b+ab+a)$

(46) $\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$

(47) $\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$

(48) $\frac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$

(49) $\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}+1+\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)$

(50) $\left(\left(1-p^2\right)^{-1/2}-\left(1+p^2\right)^{-1/2}\right)^2+2\left(1-p^4\right)^{-1/2}$

(51) $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$

(52) $\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)$

$$(53)\quad \left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} : \frac{1}{a+\frac{1}{b}} - \frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}$$

$$(54)\quad \left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2} - \frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2 \cdot \frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$$

$$(55)\quad \left(\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)\right) : \frac{(x-y)^2+4xy}{1+\frac{y}{x}}$$

$$(56)\quad \left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}\right) : \frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

$$(57)\quad \left(x^2 + 2x - \frac{11x-2}{3x+1}\right) : \left(x + 1 - \frac{2x^2+x+2}{3x+4}\right)$$

$$(58)\quad \left(6a^2 + 5a - 1 + \frac{a+4}{a+1}\right) : \left(3a - 2 + \frac{3}{a+1}\right)$$

$$(59)\quad \frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}} \cdot \frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} - \frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$$

$$(60)\quad \frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b} \cdot \frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$$

$$(61)\quad \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$$

$$(62)\quad \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$$

$$(63)\quad \frac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}} - \frac{a}{\sqrt[3]{b}}$$

$$(64)\quad \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}$$

$$(65)\quad \frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b} : a^{1/3}$$

$$(66)\quad \frac{\left(a^2-b^2\right)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$$

$$(67)\quad \frac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}$$

$$(68)\quad \frac{\sqrt[3]{ab}\quad \sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\quad +\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}} \cdot \sqrt[3]{a^3}$$

$$(69)\quad \frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})}$$

$$(70)\quad \frac{a^{1/m}-a^{1/n}\quad{}^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{\left(a^{2/m}-a^{2/n}\right)\quad \sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}}$$

$$(71)\quad \frac{x^{2/m}-9x^{2/n}\quad \cdot\quad \sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}}}{\left(x^{1/m}+3x^{1/n}\right)^2-12x^{(m+n)/(mn)}}$$

$$(72)\quad \frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2,4}(\sqrt{15}+3)$$

$$(73)\quad \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}} : \frac{a^2b^2}{(a-b)^2-3ab} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}$$

$$(74)\quad \left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2 \cdot \frac{(t-3)^2+12t}{2}$$

$$(75)\quad \left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{m^2}{4}}$$

$$(76)\quad \frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)\left(a^3-b^3\right)}$$

$$(77)\quad \left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}$$

$$(78)\quad \frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$$

$$(79)\quad \left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right)$$

$$(80)\quad \left(\frac{2-b}{b-1}+2\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right)$$

$$(81)\quad \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

$$(82)\quad \left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}$$

$$(83)\quad \frac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\frac{3}{a}-\frac{3}{c}}$$

$$(84)\quad (\sqrt{1-x^2}+1):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$(85)\quad \frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}$$

(86) $\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}$

(87) $\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}$

(88) $\left(x\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right)^{-3/5}:(x^2-1)^{4/5}$

(89) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right)$

(90) $\frac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$

(91) $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}$

(92) $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$

(93) $\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\frac{8}{\sqrt{x}}}{\left(2-\sqrt{x+2}\right):\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

(94) $\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}$

(95) $\frac{(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3})}{(\sqrt[3]{x^4}-8y^3\sqrt[3]{x}):\sqrt[3]{xy}} \cdot \left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$

(96) $\frac{(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z})^2\cdot(1+\sqrt{z})^2}{z-2+\frac{1}{z}} - z\sqrt{z}\sqrt{\frac{4}{z}+4+z}$

(97) $\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right)^{-1}$

(98) $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1}\right) \cdot \frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}$

(99) $(\sqrt{ab} - ab\,(a+\sqrt{ab})^{-1}) : (2\,((ab)^{1/2} - b)\cdot(a-b)^{-1})$

(100) $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}} - a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}} + \frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right) : \frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}$

(101) $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}} - \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2 \cdot \frac{x^2-1}{2} - \sqrt{1-x^2}$

(102) $\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6} \cdot \sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2} \cdot \sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}$

(103) $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right);\ x = \frac{1}{a-1}$

(104) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right)\left(\frac{a+b}{2a} - \frac{b}{a+b}\right) : \left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}\right)\right)$

(105) $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3 + (-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}})^2 + \left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3$

(106) $\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}$

Intermezzo: *Jak vznikají příklady na úpravy výrazů?*

Verze 1: Zjednodušte $$\frac{\dfrac{b+c-a}{a+b-c}+\dfrac{b+c-a}{a+c-b}}{1-\dfrac{(b+c-a)^2}{(a+b-c)(a+c-b)}}.$$

Intermezzo: *Jak vznikají příklady na úpravy výrazů?*

Verze 1: Zjednodušte
$$\frac{\dfrac{b+c-a}{a+b-c}+\dfrac{b+c-a}{a+c-b}}{1-\dfrac{(b+c-a)^2}{(a+b-c)(a+c-b)}}\,.$$

Odpověď:
$$\frac{a(b+c)-a^2}{a(b+c)-b^2-c^2}\,.$$

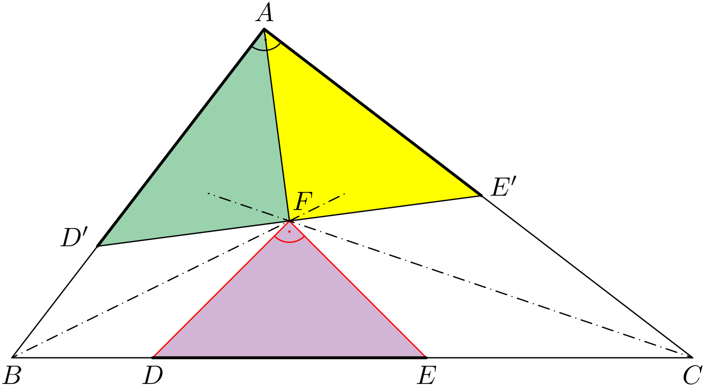
Intermezzo: *Jak vznikají příklady na úpravy výrazů?*

Verze 1: Zjednodušte
$$\frac{\dfrac{b+c-a}{a+b-c}+\dfrac{b+c-a}{a+c-b}}{1-\dfrac{(b+c-a)^2}{(a+b-c)(a+c-b)}}\,.$$

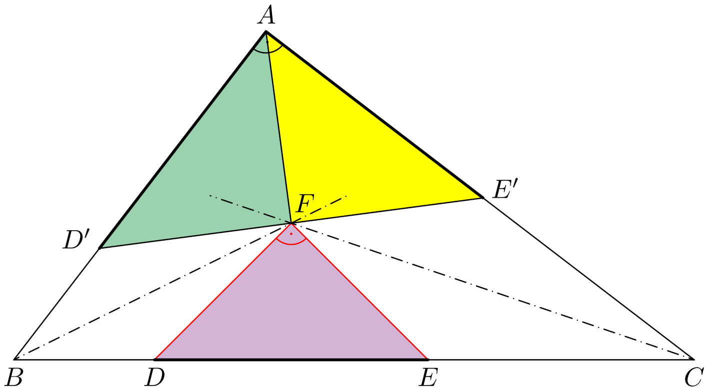
Odpověď: $$\frac{a(b+c)-a^2}{a(b+c)-b^2-c^2}\,.$$

Verze 2: Zjednodušte … za předpokladu, že $a^2=b^2+c^2$.

Odpověď: 1.



Řešení 6*.



Řešení 6*.

Uvážíme obrazy trojúhelníku DEF ve dvou souměrnostech podle os vnitřních úhlů ABC a ACB. □

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

(*krajské kolo polské MO juniorů*, 12. 1. 2019)

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení:

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení: Nechť $x^2 + x \leqq y$.

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení: Nechť $x^2 + x \leqq y$. Pak $y^2 + y\ \dots$

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení: Nechť $x^2 + x \leqq y$. Pak $y^2 + y \geqq y \ \ldots$

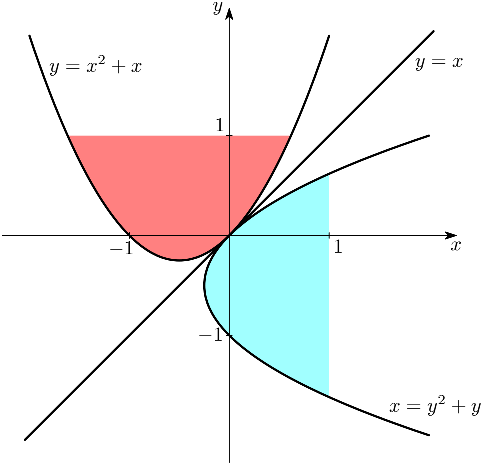
Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení: Nechť $x^2 + x \leqq y$. Pak $y^2 + y \geqq y \geqq x^2 + x \ \ldots$

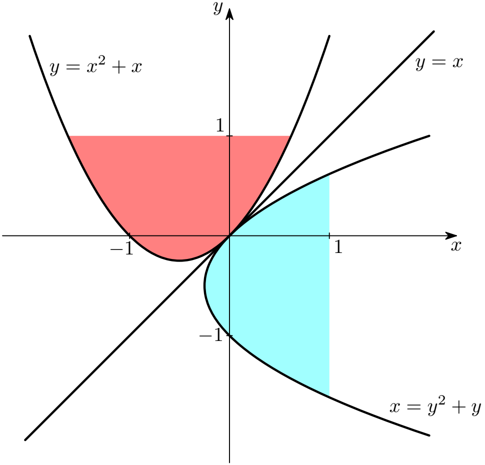
Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

Řešení: Nechť $x^2 + x \leqq y$. Pak $y^2 + y \geqq y \geqq x^2 + x \geqq x$. $\square$

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$

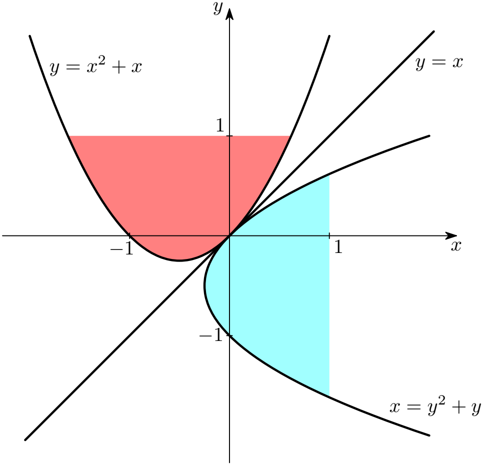


Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x.$



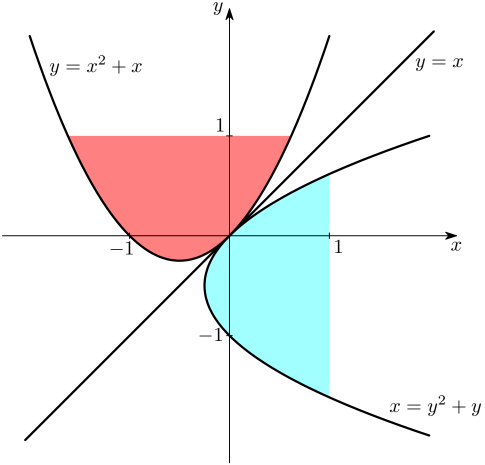
$x^2 + x \leqq y$

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\; x^2 + x \leqq y \;\Rightarrow\; y^2 + y \geqq x.$



$$x^2 + x \leqq y \;\Rightarrow\; y \geqq x$$

Dokažte: $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x$



$$x^2 + x \leqq y \ \Rightarrow\ y \geqq x \ \Rightarrow\ y^2 + y \geqq x. \ \square$$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

(*krajské kolo MO kategorie C*, 2. 4. 2019)

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

Ze všech 84 řešitelů Jihomoravského kraje
50 získalo 0 bodů,
11 získalo 1–2 body,
 8 získalo 3–4 body,
 nikdo nezískal 5 bodů,
15 získalo 6 bodů.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

Ze všech 84 řešitelů Jihomoravského kraje
50 získalo 0 bodů,
11 získalo 1–2 body,
8 získalo 3–4 body,
nikdo nezískal 5 bodů,
15 získalo 6 bodů.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.
Chytré děti píší: „Aby jedno číslo z dané rovnosti bylo co největší, vezmeme ostatní dvě co nejmenší …“

OBJEV: Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.
Chytré děti píší: „Aby jedno číslo z dané rovnosti bylo co největší, vezmeme ostatní dvě co nejmenší. Když v rovnosti zvolíme $a = b = \frac{1}{2}$, vyjde nám z ní $c = 1$ …“

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.
Chytré děti píší: „Aby jedno číslo z dané rovnosti bylo co největší, vezmeme ostatní dvě co nejmenší. Když v rovnosti zvolíme $a = b = \frac{1}{2}$, vyjde nám z ní $c = 1$. Protože však namísto $a = b = \frac{1}{2}$ platí $a, b > \frac{1}{2}$, musí být $c < 1$, stejně tak $a, b < 1$.“

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1. Zdůvodnění:

$$\frac{5}{4} = (a + b)c + ab > (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})c + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = c + \tfrac{1}{4},$$

odkud $c < 1$ (a ze symetrie rovněž $a < 1$ a $b < 1$).

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV 1: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV 1: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.

OBJEV 2:

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2.$$

OBJEV 1: Z rovnosti $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$ pro čísla a,b,c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.

OBJEV 2: Nerovnost $x>x^2$ platí pro každé $x\in(0,1)$.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažte, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2.$$

OBJEV 1: Z rovnosti $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$ pro čísla a, b, c větší než $\frac{1}{2}$ plyne, že zároveň jsou všechna menší než 1.

OBJEV 2: Nerovnost $x > x^2$ platí pro každé $x \in (0, 1)$.

Řešení ukončíme sečtením nerovností $a > a^2$, $b > b^2$ a $c > c^2$. $\square$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

$a=\frac{1}{2}+\alpha,\ b=\frac{1}{2}+\beta,\ c=\frac{1}{2}+\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma>0)$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

$$a=\tfrac{1}{2}+\alpha,\ b=\tfrac{1}{2}+\beta,\ c=\tfrac{1}{2}+\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma>0)$$

$$ab+bc+ca=\tfrac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma=\tfrac{1}{2} \tag{P}$$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

$a = \frac{1}{2} + \alpha,\ b = \frac{1}{2} + \beta,\ c = \frac{1}{2} + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$

$$ab + bc + ca = \frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \frac{1}{4} \tag{Z}$$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

$a = \frac{1}{2} + \alpha,\ b = \frac{1}{2} + \beta,\ c = \frac{1}{2} + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$

$$ab + bc + ca = \frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

$a = \frac{1}{2} + \alpha,\ b = \frac{1}{2} + \beta,\ c = \frac{1}{2} + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$

$$ab + bc + ca = \tfrac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma = \tfrac{1}{2} \tag{P}$$

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \tfrac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \tfrac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha + \beta + \gamma < \frac{1}{2}$,

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

$a = \frac{1}{2} + \alpha,\ b = \frac{1}{2} + \beta,\ c = \frac{1}{2} + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$

$$ab + bc + ca = \frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha + \beta + \gamma < \frac{1}{2}$, tudíž $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 <$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab + bc + ca = \frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2}.$$

$a = \frac{1}{2} + \alpha,\ b = \frac{1}{2} + \beta,\ c = \frac{1}{2} + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0)$

$$ab + bc + ca = \frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a + b + c > a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha, \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha + \beta + \gamma < \frac{1}{2}$, tudíž $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

$a=\frac{1}{2}+\alpha,\ b=\frac{1}{2}+\beta,\ c=\frac{1}{2}+\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma>0)$

$$ab+bc+ca=\frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha,\beta,\gamma<\frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{2}$, tudíž $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

$a=\frac{1}{2}+\alpha,\ b=\frac{1}{2}+\beta,\ c=\frac{1}{2}+\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma>0)$

$$ab+bc+ca=\frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha,\beta,\gamma<\frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{2}$, tudíž $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Reálná čísla a, b, c, všechna větší než $\frac{1}{2}$, splňují podmínku $ab+bc+ca=\frac{5}{4}$. Dokažme, že platí

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2}.$$

$a=\frac{1}{2}+\alpha,\ b=\frac{1}{2}+\beta,\ c=\frac{1}{2}+\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma>0)$

$$ab+bc+ca=\frac{5}{4} \ \longrightarrow\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2} \tag{P}$$

$$a+b+c>a^2+b^2+c^2+\frac{1}{2} \ \longrightarrow\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{4} \tag{Z}$$

Z (P) máme $\alpha,\beta,\gamma<\frac{1}{2}$ a rovněž $\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{2}$, tudíž $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Tím je (Z) dokázáno. $\square$

DĚKUJI, TĚŠILO MĚ!