Dirichletovy šuplíčky

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

Velké Meziříčí, 19.08. 2019

Motivační úlohy

Motivační úlohy

Tvrzení o vlasech:

Motivační úlohy

Tvrzení o vlasech:

V České Republice žije alespoň dvě osoby, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

Zmatematičtění

Tvrzení o mřížce:

Tvrzení o mřížce:

Máme pět bodů na mřížce, které spojíme úsečkami. Pak alespoň na jedné z nich leží některý další bod z mřížky.

Zgeometričtění

Tvrzení se čtvercem:

Tvrzení se čtvercem:

Umístíme libovolně pět bodů do čtverce o straně 1. *Pak se mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Co mají uvedená tvrzení společného?

Co mají uvedená tvrzení společného?

- Dirichletův princip

Co mají uvedená tvrzení společného?

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip

Co mají uvedená tvrzení společného?

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip

Co mají uvedená tvrzení společného?

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip
- princip holubníku

Co mají uvedená tvrzení společného?

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip
- princip holubníku
- Dirichletovy šuplíčky

Pan autor

Pan autor

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Dirichletův princip

Umístíme-li $n+1$ králíků do n kotců, pak alespoň jeden kotec musí obsahovat alespoň dva králíky.

Provokace

Je možné, že by něco tak jednoduchého mohlo být k něčemu dobré?

Provokace

Je možné, že by něco tak jednoduchého mohlo být k něčemu dobré?

Ross Honsberger (1929–2006)

A ještě česká verze

A ještě česká verze

Umístíme-li večer $n+1$ předmětů do n přihrádek a ráno nemáme nic, pak nám alespoň z jedné přihrádky ukradli alespoň dva předměty.

Mnohostěn

Mnohostěn

Mnohostěn má mnoho stěn, a také hrany a vrcholy.

Mnohostěn

Mnohostěn má mnoho stěn, a také hrany a vrcholy.

Tvrzení. *Na každém mnohostěnu existují dvě stěny se stejným počtem hran.*

Řešení

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme n *Dirichletových šuplíčků*.

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Náš mnohostěn má tedy *alespoň $n + 1$ stěn*.

Řešení

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Náš mnohostěn má tedy *alespoň $n+1$ stěn*.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dvě stěny*.

Deset malých čísloušků

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Deset malých čísloušků

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme množinu S obsahující deset čísloušků.

Deset malých čísloušků

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme množinu S obsahující deset čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Deset malých čísloušků

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme množinu S obsahující deset čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli neprázdnou podmnožinu S.

Deset malých čísloušků

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme množinu S obsahující deset čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli neprázdnou podmnožinu S.

Dva podvýběry nazýváme **disjunktní**, jestliže nemají společný průnik.

Číslouškem nazýváme přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme množinu S obsahující deset čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli neprázdnou podmnožinu S.

Dva podvýběry nazýváme **disjunktní**, jestliže nemají společný průnik.

Příklad: $\{3, 26, 35, 76\}$, $\{9, 14, 59\}$.

Součty podvýběrů

Součty podvýběrů

Přenos: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Součty podvýběrů

Přenos: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

Přenos: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

Podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Součty podvýběrů

Přenos: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

Podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení.

Součty podvýběrů

Přenos: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

Podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení. *Každý výběr S obsahuje alespoň dva disjunktní podvýběry se stejným součtem.*

Řešení

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\text{max}} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry mající součet n.

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\mathrm{max}} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry mající součet n.

Počet všech podvýběrů jednoho výběru: $2^{10} - 1 = 1023$.

Řešení

Nejvyšší možný součet: *maximální výběr*

$$S_{\mathsf{max}} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry mající součet n.

Počet všech podvýběrů jednoho výběru: $2^{10} - 1 = 1023$.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dva podvýběry*.

Farmacie

Farmacie

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu tento napsal prášky.

Farmacie

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu tento napsal prášky.

V balení je **48** prášků, které má Ondra spotřebovat během **30** dnů.

Farmacie

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu tento napsal prášky.

V balení je 48 prášků, které má Ondra spotřebovat během 30 dnů.

Může si je rozvrhnout jak chce, ale musí dodržet jedno pravidlo: **každý den musí spolknout alespoň jeden prášek**.

Výsledky terapie

Výsledky terapie

V příbalovém letáku je psáno:

Výsledky terapie

V příbalovém letáku je psáno:

Jestliže během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

Výsledky terapie

V příbalovém letáku je psáno:

Jestliže během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

Jestliže během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **11** prášků, upadnou mu palce u rukou.

Výsledky terapie

V příbalovém letáku je psáno:

Jestliže během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

Jestliže během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **11** prášků, upadnou mu palce u rukou.

Otázka: Bude se Ondra na konci terapie schopen kousnout do palce?

Záchrana zubů

Záchrana zubů

$$\underbrace{11\ldots1}_{15}\,19\,\underbrace{11\ldots1}_{14}$$

A co palce?

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*.

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

Čísel je celkem 60 a v rámci posloupnosti se neopakují.

A co palce?

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i-tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

Čísel je celkem 60 a v rámci posloupnosti se neopakují.

Dirichlet: *Existuje alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech*.

Řešení

Řešení

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Řešení

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Tedy ve dnech $i+1, i+2, \ldots, j$ spotřebuje Ondra 11 pilulek.

Řešení

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Tedy ve dnech $i+1, i+2, \dots, j$ spotřebuje Ondra 11 pilulek.

A palce jsou v háji.

Řešení

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Tedy ve dnech $i+1, i+2, \ldots, j$ spotřebuje Ondra 11 pilulek.

A palce jsou v háji.

Odpověď: Na konci terapie se Ondra sice bude moci kousnout do palce, ale pouze do palce u nohy.

Matlafousek a Ňufafula

Matlafousek a Ňufafula

Žák **Matlafousek** chodil do školy jeden den a naučil se číslici 1.

Žák **Matlafousek** chodil do školy jeden den a naučil se číslici 1.

Matlafouskovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí jedniček, tedy

Matlafousek a Ňufafula

Žák **Matlafousek** chodil do školy jeden den a naučil se číslici 1.

Matlafouskovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí jedniček, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, \text{atd.}$$

Ňufafulovo číslo

Ňufafulovo číslo

Žák **Ňufafula** chodil do školy dva dny a naučil se číslice 1 a 0.

Ňufafulovo číslo

Žák **Ňufafula** chodil do školy dva dny a naučil se číslice 1 a 0.

Ňufafulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

Ňufafulovo číslo

Žák **Ňufafula** chodil do školy dva dny a naučil se číslice 1 a 0.

Ňufafulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

$$10, 110000, 1110, 111100, 111110000000, \text{atd.}$$

Ňufafulovo číslo

Žák **Ňufafula** chodil do školy dva dny a naučil se číslice 1 a 0.

Ňufafulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

$$10, 110000, 1110, 111100, 111110000000, \text{atd.}$$

Množinu Ňufafulových čísel označíme symbolem $\check{\mathbb{N}}$.

Buližníkovo smělé tvrzení

Žák **Buližník** jednoho dne řekl Ňufafulovi potěšující zvěst:

Buližníkovo smělé tvrzení

Žák **Buližník** jednoho dne řekl Ňufafulovi potěšující zvěst:

Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \check{\mathbb{N}}$.

Buližníkovo smělé tvrzení

Žák **Buližník** jednoho dne řekl Ňufafulovi potěšující zvěst:

Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že km $\in \check{\mathbb{N}}$.

OTÁZKA: Má Buližník pravdu?

Prověříme

Prověříme

$$
\begin{aligned}
k &= 2: && m = 5, && km = 10 \in \check{\mathbb{N}};\\
k &= 3: && m = 370, && km = 1110 \in \check{\mathbb{N}};\\
k &= 4: && m = 25, && km = 100 \in \check{\mathbb{N}};\\
k &= 5: && m = 2, && km = 10 \in \check{\mathbb{N}};\\
k &= 6: && m = 185, && km = 1110 \in \check{\mathbb{N}};\\
k &= 8: && m = 125, && km = 1000 \in \check{\mathbb{N}}.
\end{aligned}
$$

Prověříme

$$\begin{aligned}
k = 2: \quad & m = 5, \quad & km = 10 \in \check{\mathbb{N}}; \\
k = 3: \quad & m = 370, \quad & km = 1110 \in \check{\mathbb{N}}; \\
k = 4: \quad & m = 25, \quad & km = 100 \in \check{\mathbb{N}}; \\
k = 5: \quad & m = 2, \quad & km = 10 \in \check{\mathbb{N}}; \\
k = 6: \quad & m = 185, \quad & km = 1110 \in \check{\mathbb{N}}; \\
k = 8: \quad & m = 125, \quad & km = 1000 \in \check{\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

První *zajímavější* číslo je $k = 7$.

Modulární aritmetika

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p,

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\; p),$$

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\bmod p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\operatorname{mod} p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\, p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady:

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n \pmod p,$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady: $5 + 3 = 1 \pmod 7$,

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\, p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit. Příklady: $5 + 3 = 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, $2 \cdot 7 = 2 (\mathrm{mod}\, 12)$.

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n \pmod{p},$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit. Příklady: $5 + 3 = 1 \pmod{7}$, $2 \cdot 7 = 2 \pmod{12}$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\, p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit. Příklady: $5 + 3 = 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, $2 \cdot 7 = 2 (\mathrm{mod}\, 12)$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

$$\frac{2}{3} = 3,\ \frac{3}{4} = 6,\ \frac{2}{5} = 6,\ \frac{3}{5} = 2,\ \frac{4}{5} = 5,\ \frac{5}{6} = 2\ (\mathrm{mod}\, 7).$$

Modulární aritmetika

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p, psáno

$$m \equiv n (\mathrm{mod}\, p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit. Příklady: $5 + 3 = 1 (\mathrm{mod}\, 7)$, $2 \cdot 7 = 2 (\mathrm{mod}\, 12)$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

$$\frac{2}{3} = 3,\ \frac{3}{4} = 6,\ \frac{2}{5} = 6,\ \frac{3}{5} = 2,\ \frac{4}{5} = 5,\ \frac{5}{6} = 2\ (\mathrm{mod}\, 7).$$

Otázka pro koumáky: Co je $\frac{1}{7}$ $(\mathrm{mod}\, 7)$?

Řešení

Řešení

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Řešení

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Řešení

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k.

Řešení

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k.

Odečteme menší od většího.

Řešení

Nechť $k \in \mathbb{N}$.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k.

Odečteme menší od většího.

Vzniklé číslo je prvkem $\check{\mathbb{N}}$ a navíc je dělitelné číslem k.

Příklad

Příklad

Nechť $k = 7$.

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

$$1111110 = 7 \times 158730.$$

Příklad

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

$$1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.$$

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

$$1,\ 4,\ 6,\ 5,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4.$$

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

$$1111110 = 7 \times 158730.$$

Poznámka: Uvedené číslo je skutečně *nejmenší* Ňufafulovo číslo, které je dělitelné sedmi.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

Nervózní kuchtík upustil pepřenku a vysypal na pizzu celý její obsah, tedy **650** zrníček pepře.

Pohlreichův problém pekelně přepepřené pizzy

Šéf praví: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

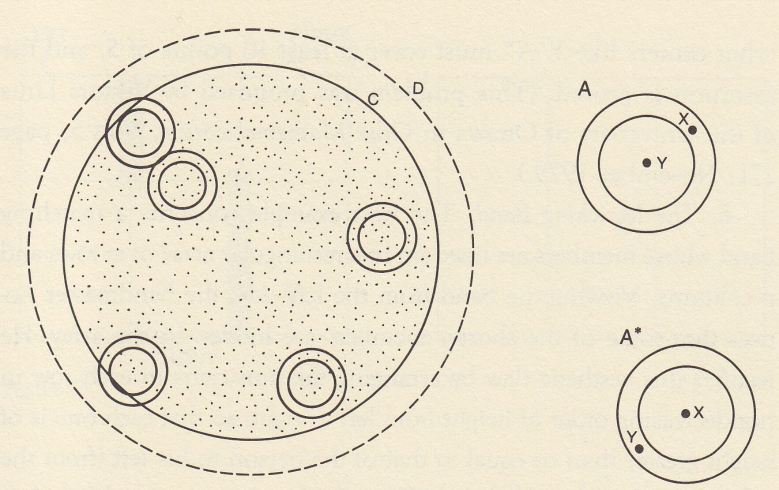
Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

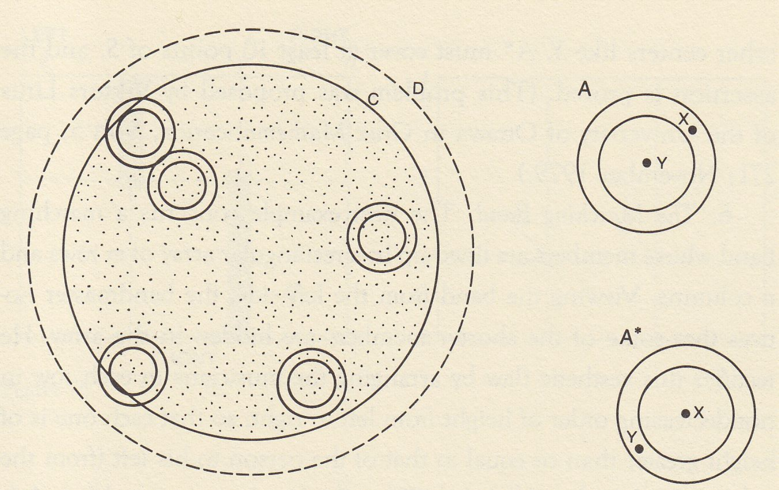
Nervózní kuchtík upustil pepřenku a vysypal na pizzu celý její obsah, tedy **650** zrníček pepře.

Otázka: Je pizza přepepřená?

Ilustrace



Ilustrace



Je pizza přepepřená?

Paradox kapelníka dechovky

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Kapelník proto provede v každé řadě *nerostoucí přerovnání*.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Kapelník proto provede v každé řadě *nerostoucí přerovnání*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Kapelník proto provede v každé řadě *nerostoucí přerovnání*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnání ještě také v každém sloupci.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Kapelník proto provede v každé řadě *nerostoucí přerovnání*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnání ještě také v každém sloupci.

Nyní se bojí vrátit na tribunu.

Paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na přehlídku.

Kapela je obdélník o m řadách a n sloupcích.

Při pohledu zleva jsou někteří menší hudebníci zakryti vyššími kolegy.

Kapelník proto provede v každé řadě *nerostoucí přerovnání*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnání ještě také v každém sloupci.

Nyní se bojí vrátit na tribunu.

Otázka: *Bojí se kapelník oprávněně?*

Cvičení

Cvičení

Tvrzení. *V rovině je dáno šest kruhů. Žádný z nich neobsahuje střed jiného kruhu. Potom mají prázdný průnik.*

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Téměř neustále některý student spí.

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Téměř neustále některý student spí.

PRAVIDLO: Jestliže usne **více než polovina přítomných studentů**, nudný profesor se naštve a příště dá písemku.

nudná přednáška - zadání úlohy

Na přednášce sedělo **pět** studentů.

nudná přednáška - zadání úlohy

Na přednášce sedělo **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

nudná přednáška - zadání úlohy

Na přednášce sedělo **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

nudná přednáška - zadání úlohy

Na přednášce sedělo **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

OTÁZKA: Bude příště písemka?

nudná přednáška - zadání úlohy

Na přednášce sedělo **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

OTÁZKA: Bude příště písemka?

VÝHRŮŽKA: Jestli mi nepošlete včas řešení, tak vám při příštím setkání napařím písemku.

Disclaimer

Disclaimer

Při přípravě této přednášky nebylo utraceno žádné zvíře.

Díky za pozornost!

Díky za pozornost!

Díky za pozornost!