

NEMONOTÓNĚ O MONOTONII FUNKCÍ

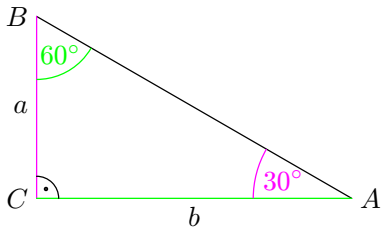
JAROMÍR ŠIMŠA

Velké Meziříčí, 19. 8. 2014

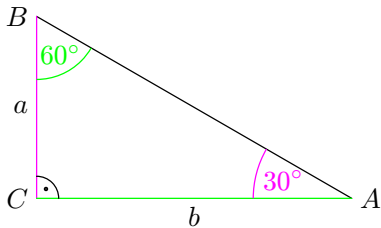
1. Na rozcvičenou
2. Co máme dobře zažito
3. Co nás asi nepřekvapí
4. Co nás může zaskočit
5. Co se nachází o patro výše
6. Co cenného je ještě pod střechou
7. Co (se) patří na závěr

1. Na rozcvičenou

1. Na rozcvičenou

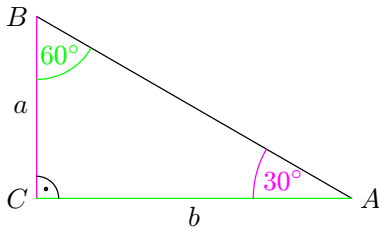


1. Na rozcvičenou



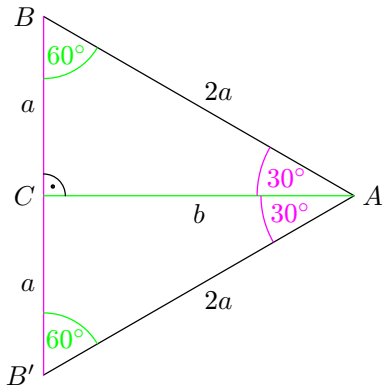
$$a : b = ?$$

1. Na rozcvičenou



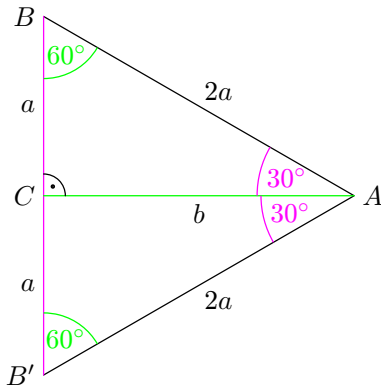
$$a : b = 1 : 2 (= 30^\circ : 60^\circ)$$

1. Na rozcvíčenou



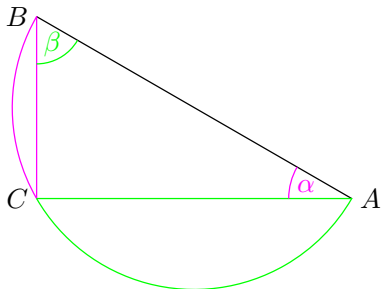
$$b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

1. Na rozsvičenou

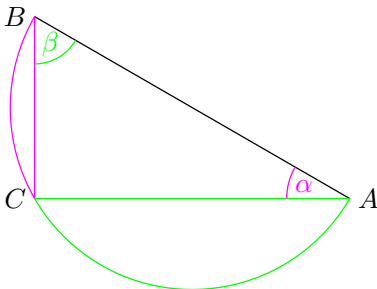


$$b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$$

1. Na rozcvičenou



1. Na rozsvícenou



Poměr velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je roven poměru délek protilehlých oblouků opsané kružnice.

1. Na rozcvičenou

Poznatek ze ZŠ o obecném trojúhelníku ABC

$$\alpha < \beta \Rightarrow a < b \quad (\text{„proti menšímu úhlu leží menší strana“})$$

1. Na rozcvičenou

Poznatek ze ZŠ o obecném trojúhelníku ABC

$$\alpha < \beta \Rightarrow a < b \quad (\text{„proti menšímu úhlu leží menší strana“})$$

upřesníme do podoby pravidla

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} < 1$$

1. Na rozcvíčenou

Poznatek ze ZŠ o obecném trojúhelníku ABC

$$\alpha < \beta \Rightarrow a < b \quad (\text{„proti menšímu úhlu leží menší strana“})$$

upřesníme do podoby pravidla

$$\boxed{\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} < 1}$$

Důkaz: Podle sinové věty platí

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}.$$

1. Na rozcvičenou

Poznatek ze ZŠ o obecném trojúhelníku ABC

$$\alpha < \beta \Rightarrow a < b \quad (\text{„proti menšímu úhlu leží menší strana“})$$

upřesníme do podoby pravidla

$$\boxed{\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} < 1}$$

Důkaz: Podle sinové věty platí

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}.$$

Pro funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tak stačí dokázat

$$0 < x < y < \pi \Rightarrow f(x) > f(y),$$

1. Na rozcvičenou

Poznatek ze ZŠ o obecném trojúhelníku ABC

$$\alpha < \beta \Rightarrow a < b \quad (\text{„proti menšímu úhlu leží menší strana“})$$

upřesníme do podoby pravidla

$$\boxed{\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} < 1}$$

Důkaz: Podle sinové věty platí

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \beta}{\beta}.$$

Pro funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ tak stačí dokázat

$$0 < x < y < \pi \Rightarrow f(x) > f(y),$$

že je tedy funkce f na $(0, \pi)$ *klesající*.

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2}$$

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Krajní body: $g(0) = 0 \cos 0 - \sin 0 = 0$, $g(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi$.

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Krajní body: $g(0) = 0 \cos 0 - \sin 0 = 0$, $g(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi$.

Je funkce g na $\langle 0, \pi \rangle$ klesající? Ano, pokud ...

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Krajní body: $g(0) = 0 \cos 0 - \sin 0 = 0$, $g(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi$.

Je funkce g na $\langle 0, \pi \rangle$ klesající? Ano, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): g'(x) < 0.$$

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Krajní body: $g(0) = 0 \cos 0 - \sin 0 = 0$, $g(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi$.

Je funkce g na $\langle 0, \pi \rangle$ klesající? Ano, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): g'(x) < 0.$$

Poslední je zřejmé po výpočtu

$$g'(x) = (x \cos x - \sin x)' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x,$$

neboť ...

Funkce f je na $(0, \pi)$ klesající, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): f'(x) < 0.$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{\overbrace{x \cos x - \sin x}^{g(x)}}{x^2}$$

Proč $g(x) < 0$ pro každé $x \in (0, \pi)$?

Krajní body: $g(0) = 0 \cos 0 - \sin 0 = 0$, $g(\pi) = \pi \cos \pi - \sin \pi = -\pi$.

Je funkce g na $\langle 0, \pi \rangle$ klesající? Ano, pokud

$$\forall x \in (0, \pi): g'(x) < 0.$$

Poslední je zřejmé po výpočtu

$$g'(x) = (x \cos x - \sin x)' = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x,$$

neboť funkce sinus je na $(0, \pi)$ kladná.

2. Co máme dobře zažito

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

Monotonní funkce, ryze monotonní funkce.

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

Monotonní funkce, ryze monotonní funkce.

Souvislost monotonie diferencovatelné funkce se znaménkem hodnot její první derivace.

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

Monotonní funkce, ryze monotonní funkce.

Souvislost monotonie diferencovatelné funkce se znaménkem hodnot její první derivace.

- $$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

Monotonní funkce, ryze monotonní funkce.

Souvislost monotonie diferencovatelné funkce se znaménkem hodnot její první derivace.

- $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$
- $f(y) - f(x) = f'(\xi) \cdot (y - x)$

2. Co máme dobře zažito

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval libovolného druhu.

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (f je rostoucí na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (f je neklesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (f je klesající na I)

$\forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (f je nerostoucí na I)

Monotonní funkce, ryze monotonní funkce.

Souvislost monotonie diferencovatelné funkce se znaménkem hodnot její první derivace.

Nalezením intervalů monotonie dané funkce často okamžitě řešíme i otázku určení jejích lokálních extrémů (bez výpočtu druhé derivace).

3. Co nás asi nepřekvapí

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Důkaz (pro neklesající funkci f):

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Důkaz (pro neklesající funkci f): Je-li x_0 vnitřní bod I , pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} \leq f(x_0)$$

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Důkaz (pro neklesající funkci f): Je-li x_0 vnitřní bod I , pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} &\leq f(x_0) \leq \\ &\leq \inf\{f(x) : x > x_0\} = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x). \end{aligned}$$

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Důkaz (pro neklesající funkci f): Je-li x_0 vnitřní bod I , pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} &\leq f(x_0) \leq \\ &\leq \inf\{f(x) : x > x_0\} = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x). \end{aligned}$$

Na každém intervalu $\langle a, b \rangle \subset I$ je součet hodnot jakéhokoliv konečného počtu skoků funkce f nejvýše roven $f(b) - f(a)$.

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Důkaz (pro neklesající funkci f): Je-li x_0 vnitřní bod I , pak

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\} &\leq f(x_0) \leq \\ &\leq \inf\{f(x) : x > x_0\} = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).\end{aligned}$$

Na každém intervalu $\langle a, b \rangle \subset I$ je součet hodnot jakéhokoliv konečného počtu skoků funkce f nejvýše roven $f(b) - f(a)$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je tak množina bodů

$$\{x_0 \in \langle a, b \rangle : \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) > 1/n\}$$

konečná. \square

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Věta 2 (Lebesgueova). Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní derivaci v libovolném vnitřním bodě intervalu I s případnou vyjímkou bodů, které tvoří množinu míry nula. (Říkáme, že funkce f je diferencovatelná *skoro všude*.)

3. Co nás asi nepřekvapí

Věta 1. Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní obě jednostranné limity v libovolném vnitřním bodě intervalu I . Množina jejích případných bodů nespojitosti (v nichž tedy má „skoky“ téhož znaménka) je nejvýše spočetná.

Věta 2 (Lebesgueova). Každá monotonní funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní derivaci v libovolném vnitřním bodě intervalu I s případnou výjimkou bodů, které tvoří množinu míry nula. (Říkáme, že funkce f je diferencovatelná *skoro všude*.)

Věta 3. Pro každou monotonní funkci $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x) dx.$$

4. Co nás může zaskočit

4. Co nás může zaskočit

- A. Body nespojitosti monotonních funkcí
- B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu
- C. Monotonie spojitých funkcí
- D. Monotonie diferencovatelných funkcí

4. Co nás může zaskočit

A. Body nespojitosti monotonních funkcí

4. Co nás může zaskočit

A. Body nespojitosti monotonních funkcí

- *Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .*

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

Konstrukce: $E = (r_k)_{k=1}^{\infty}$

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

Konstrukce: $E = (r_k)_{k=1}^{\infty}$, zvolíme $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

Konstrukce: $E = (r_k)_{k=1}^\infty$, zvolíme $(a_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

(Číslo a_k bude velikost skoku funkce f v bodě r_k .)

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

Konstrukce: $E = (r_k)_{k=1}^\infty$, zvolíme $(a_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

(Číslo a_k bude velikost skoku funkce f v bodě r_k .) Definujeme

$$f(x) = \sum_{k: r_k \leq x} a_k \quad \text{pro každé } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

- Pro každou spočetnou množinu $E \subset (0, 1)$ (jež tam může být i všude hustá) existuje neklesající funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, jejíž body nespojitosti tvoří právě množinu E .

Konstrukce: $E = (r_k)_{k=1}^\infty$, zvolíme $(a_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

(Číslo a_k bude velikost skoku funkce f v bodě r_k .) Definujeme

$$f(x) = \sum_{k: r_k \leq x} a_k \quad \text{pro každé } x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pak $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a vše potřebné plyne z vyjádření

$$f(y) - f(x) = \sum_{k: x < r_k \leq y} a_k \quad (0 < x < y < 1).$$

4. Co nás může zaskočit

B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu

4. Co nás může zaskočit

B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu

Neklesající funkce, která není rostoucí, musí být na některém intervalu konstantní.

4. Co nás může zaskočit

B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu

Neklesající funkce, která není rostoucí, musí být na některém intervalu konstantní. Důvod je nasnadě:

$$x < y < z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(z).$$

4. Co nás může zaskočit

B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu

Neklesající funkce, která není rostoucí, musí být na některém intervalu konstantní. Důvod je nasnadě:

$$x < y < z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(z).$$

Když je taková funkce navíc spojitá (a globálně nekonstantní), musí být na nějakém intervalu rostoucí?

4. Co nás může zaskočit

B. Intervaly stálosti, růstu a poklesu

Neklesající funkce, která není rostoucí, musí být na některém intervalu konstantní. Důvod je nasnadě:

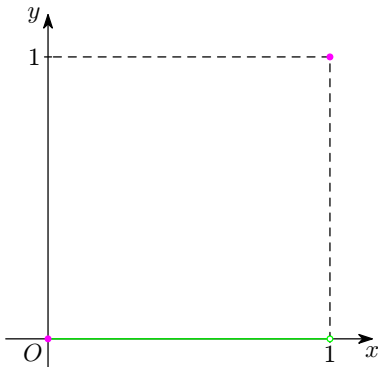
$$x < y < z \Rightarrow f(x) \leq f(y) \leq f(z).$$

Když je taková funkce navíc spojitá (a globálně nekonstantní), musí být na nějakém intervalu rostoucí?

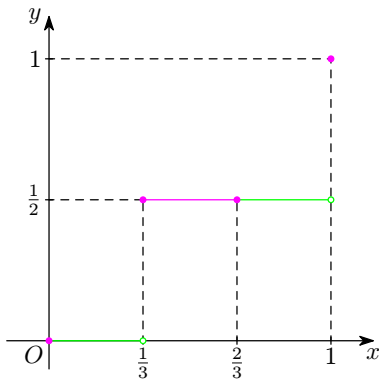
- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.*

- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.

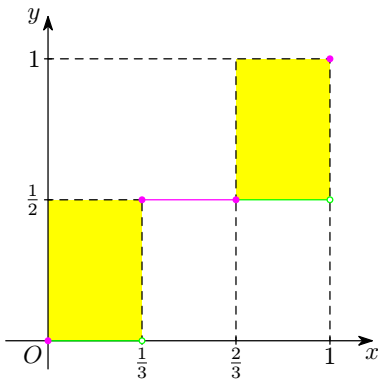
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



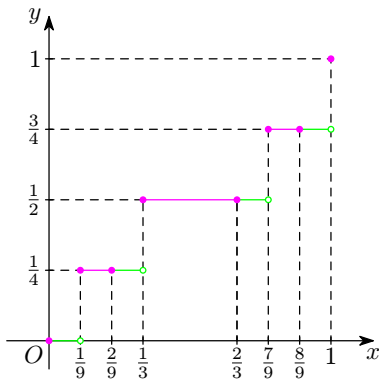
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



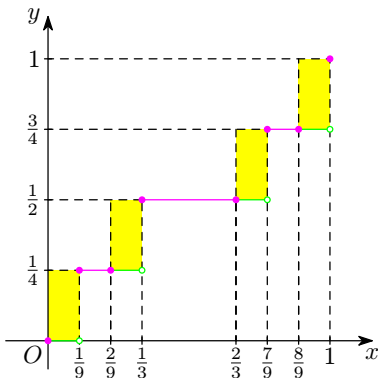
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



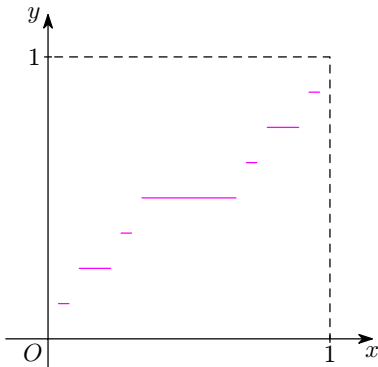
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



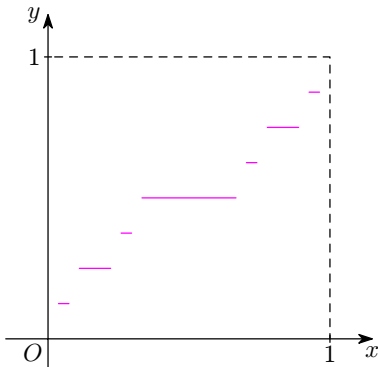
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.

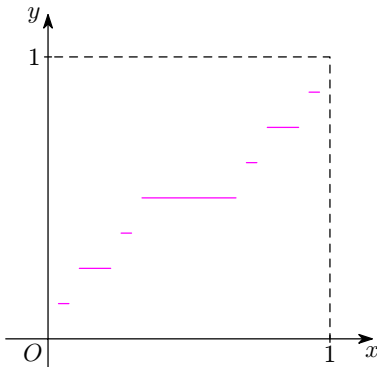


- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



Nekreslíme již zelené body grafu.

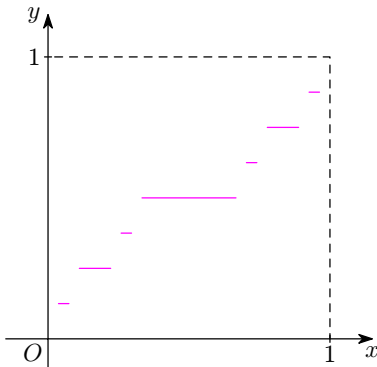
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



Nekreslíme již zelené body grafu.

Víme, kde leží, nad pevným x stoupají do omezené výše.

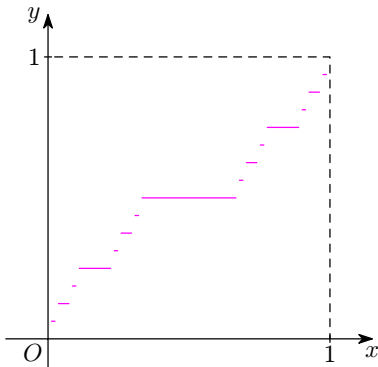
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



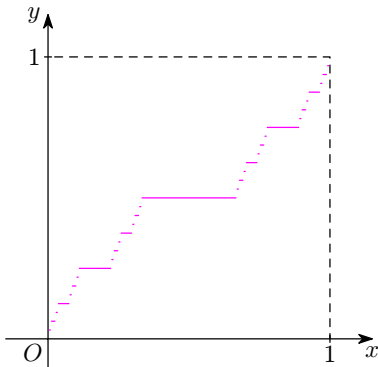
Nekreslíme již zelené body grafu.

Víme, kde leží, nad pevným x stoupají do omezené výše.
I když třeba nikdy nezčervenají, budou konvergovat.

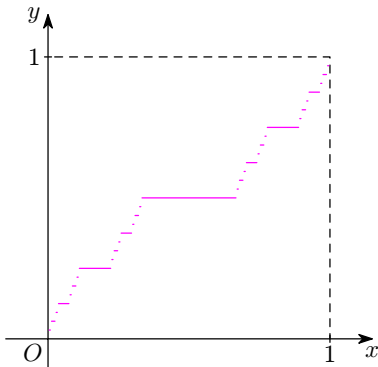
- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.

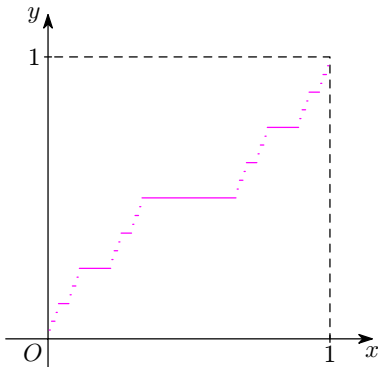


- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.



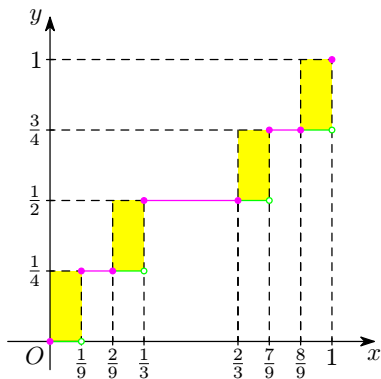
Limitní funkce f není rostoucí na žádném intervalu.

- Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není rostoucí na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$, přestože $f(0) < f(1)$.

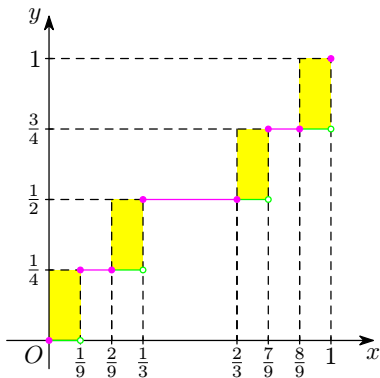


Limitní funkce f není rostoucí na žádném intervalu.
Je však spojitá v každém bodě?

Ke spojitosti sestrojené funkce



Ke spojitosti sestrojené funkce



$$|x - y| < \frac{1}{3^n} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^n}$$

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$.*

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$.*

Stačí sestrojit příklad spojité funkce, která *nemá derivaci* v žádném bodě svého definičního intervalu.

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$.*

Stačí sestrojit příklad spojité funkce, která *nemá derivaci* v žádném bodě svého definičního intervalu.

Karl Weierstrass (přednáška v berlínské Akademii 18. 7. 1872)

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$.*

Stačí sestavit příklad spojitě funkce, která *nemá derivaci* v žádném bodě svého definičního intervalu.

Karl Weierstrass (přednáška v berlínské Akademii 18. 7. 1872)

Bernard Bolzano (cca 1830, publikováno 1922)

4. Co nás může zaskočit

C. Monotonie spojitých funkcí

- *Existuje spojitá funkce $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \langle 0, 1 \rangle$.*

Stačí sestrojit příklad spojité funkce, která *nemá derivaci* v žádném bodě svého definičního intervalu.

Karl Weierstrass (přednáška v berlínské Akademii 18. 7. 1872)

Bernard Bolzano (cca 1830, publikováno 1922)

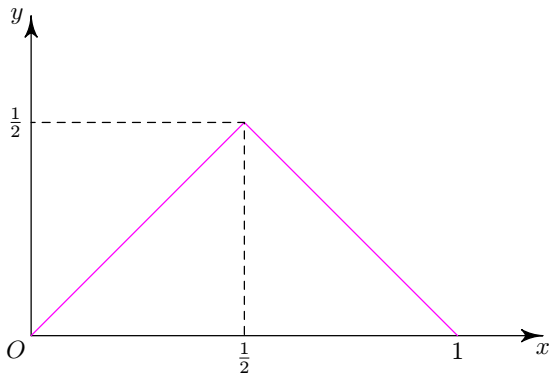
Bartel Leendert van der Waerden (1930)

4. Co nás může zaskočit

Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce

4. Co nás může zaskočit

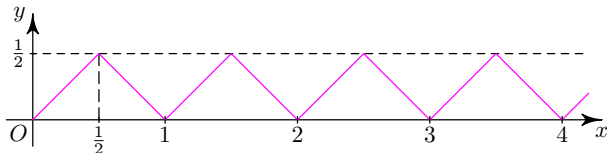
Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce



$$w(x) = x \quad (0 \leq x \leq 1/2), \quad w(x) = 1 - x \quad (1/2 \leq x \leq 1)$$

4. Co nás může zaskočit

Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce

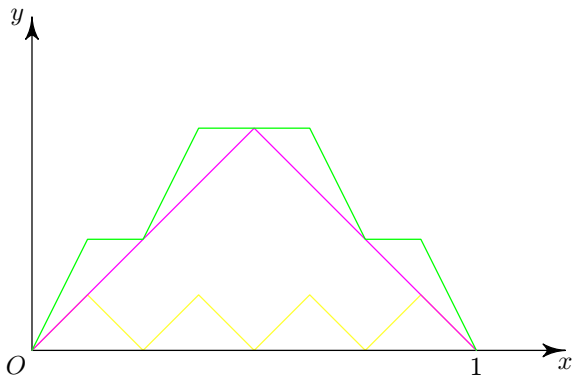


$$w(x) = x \quad (0 \leq x \leq 1/2), \quad w(x) = 1 - x \quad (1/2 \leq x \leq 1)$$

$$w(x) = w(x - 1) \quad (x > 1)$$

4. Co nás může zaskočit

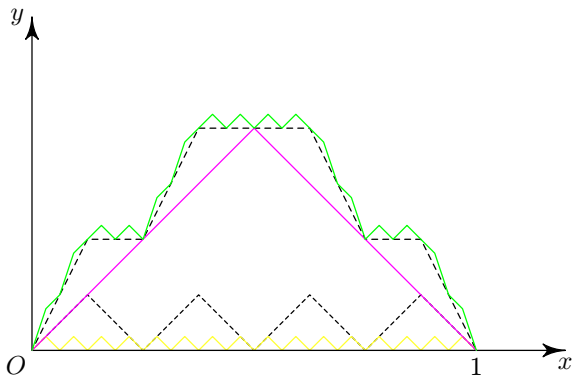
Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce



$$w_2(x) = w(x) + \frac{w(4x)}{4} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

4. Co nás může zaskočit

Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce



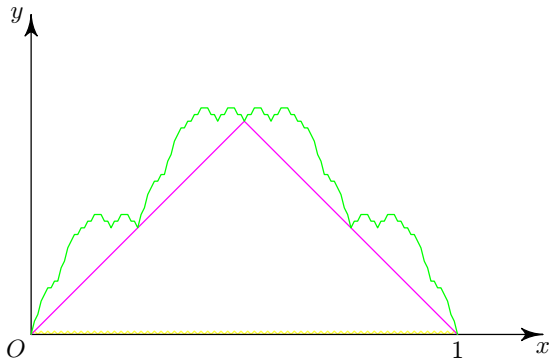
$$w_3(x) = w(x) + \frac{w(4x)}{4} + \frac{w(16x)}{16} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{w(4^k x)}{4^k}, \quad W(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w(4^k x)}{4^k}$$

Konstrukce spojité, nikde ne monotonní funkce

$$w_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{w(4^k x)}{4^k}, \quad W(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w(4^k x)}{4^k}$$



Graf funkce $y = w_4(x)$

Spojité ano, proč nikde ne monotonní?

Spojité ano, proč nikde ne monotonní?

Pro všechna $a, n, N \in \mathbb{N}$ za předpokladů $a < 4^n$ a $N \gg n$ platí:

$$W\left(\frac{a}{4^n} - \frac{1}{4^N}\right) \stackrel{!}{>} W\left(\frac{a}{4^n}\right) \stackrel{!}{<} W\left(\frac{a}{4^n} + \frac{1}{4^N}\right)$$

Spojité ano, proč nikde ne monotonní?

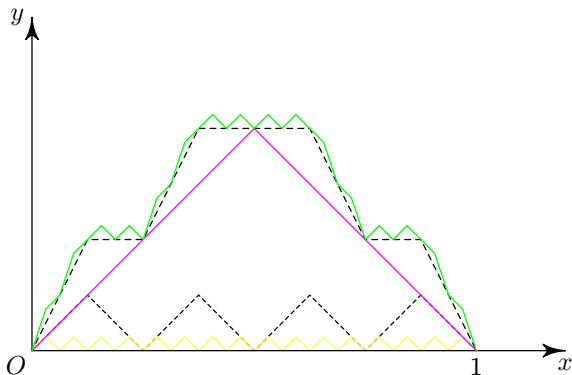
Pro všechna $a, n, N \in \mathbb{N}$ za předpokladů $a < 4^n$ a $N \gg n$ platí:

$$w_N\left(\frac{a}{4^n} - \frac{1}{4^N}\right) \stackrel{!}{>} w_n\left(\frac{a}{4^n}\right) \stackrel{!}{<} w_N\left(\frac{a}{4^n} + \frac{1}{4^N}\right)$$

Spojité ano, proč nikde ne monotonní?

Pro všechna $a, n, N \in \mathbb{N}$ za předpokladů $a < 4^n$ a $N \gg n$ platí:

$$w_N\left(\frac{a}{4^n} - \frac{1}{4^N}\right) \stackrel{!}{>} w_n\left(\frac{a}{4^n}\right) \stackrel{!}{<} w_N\left(\frac{a}{4^n} + \frac{1}{4^N}\right)$$



4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

- *Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, přestože má vlastní derivaci v každém bodě a funkce $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je navíc dokonce ohraničená.*

4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

- *Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, přestože má vlastní derivaci v každém bodě a funkce $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je navíc dokonce ohraničená.*

První *správné* příklady Köpcke (1889) a Pereno (1897), později mnozí další.

4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

- *Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, přestože má vlastní derivaci v každém bodě a funkce $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je navíc dokonce ohraničená.*

První *správné* příklady Köpcke (1889) a Pereno (1897), později mnozí další. Chybná konstrukce je i v knize

Bernard Gelbaum, John Omlsted: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, Inc., San Francisco 1964.

4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

- *Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, přestože má vlastní derivaci v každém bodě a funkce $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je navíc dokonce ohraničená.*

První *správné* příklady Köpcke (1889) a Pereno (1897), později mnozí další. Chybná konstrukce je i v knize

Bernard Gelbaum, John Omlsted: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, Inc., San Francisco 1964.

Pozitivní poznámka. Diferencovatelná funkce f je ovšem ryze monotonní na okolí každého bodu, v němž je derivace f' různá od nuly a spojitá.

4. Co nás může zaskočit

D. Monotonie diferencovatelných funkcí

- *Existuje funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která není monotonní na žádném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, přestože má vlastní derivaci v každém bodě a funkce $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je navíc dokonce ohraničená.*

První *správné* příklady Köpcke (1889) a Pereno (1897), později mnozí další. Chybná konstrukce je i v knize

Bernard Gelbaum, John Omlsted: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, Inc., San Francisco 1964.

Pozitivní poznámka. Diferencovatelná funkce f je ovšem ryze monotonní na okolí každého bodu, v němž je derivace f' různá od nuly a spojitá.

Negativní poznámka. Existuje spojitá rostoucí funkce, která má derivaci skoro všude rovnu nule! (V ostatních bodech, jež tvoří množinu míry nula, má nevlastní derivaci $+\infty$.)

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z - y}{z - x} + f(z) \cdot \frac{y - x}{z - x}$$

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z-y}{z-x} + f(z) \cdot \frac{y-x}{z-x}$$

Nerovnost napravo lze přepsat do podoby

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z-y}{z-x} + f(z) \cdot \frac{y-x}{z-x}$$

Nerovnost napravo lze přepsat do podoby

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

a pro *diferencovatelnou* funkci f ještě dále jako

$$f'(\xi) < f'(\eta) \quad (x < \xi < y < \eta < z).$$

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z-y}{z-x} + f(z) \cdot \frac{y-x}{z-x}$$

Nerovnost napravo lze přepsat do podoby

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

a pro *diferencovatelnou* funkci f ještě dále jako

$$f'(\xi) < f'(\eta) \quad (x < \xi < y < \eta < z).$$

f' je rostoucí na $I \Rightarrow f$ je ryze konvexní na I

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z-y}{z-x} + f(z) \cdot \frac{y-x}{z-x}$$

Nerovnost napravo lze přepsat do podoby

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

a pro *diferencovatelnou* funkci f ještě dále jako

$$f'(\xi) < f'(\eta) \quad (x < \xi < y < \eta < z).$$

$f' \text{ je rostoucí na } I \Rightarrow f \text{ je ryze konvexní na } I$

Platí to pro funkci s derivací i naopak?

5. Co se nachází o patro výše

Pomocí *monotonie* můžeme vyšetřovat další významné vlastnosti funkcí, totiž jejich *konvexnost* či *konkávnost*.

Funkce f je na intervalu I *ryze konvexní*, pokud

$$\forall x, y, z \in I: x < y < z \Rightarrow f(y) < f(x) \cdot \frac{z-y}{z-x} + f(z) \cdot \frac{y-x}{z-x}$$

Nerovnost napravo lze přepsat do podoby

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

a pro *diferencovatelnou* funkci f ještě dále jako

$$f'(\xi) < f'(\eta) \quad (x < \xi < y < \eta < z).$$

$f' \text{ je rostoucí na } I \Rightarrow f \text{ je ryze konvexní na } I$

Platí to pro funkci s derivací i naopak? Ano, máte pravdu.

f je ryze konvexní na $I \Rightarrow (\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta))$

f je ryze konvexní na $I \Rightarrow (\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta))$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

$$f \text{ je ryze konvexní na } I \Rightarrow (\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta))$$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

Odtud limitními přechody $y \rightarrow \xi+$, resp. $y \rightarrow \eta-$ dostaneme

$$f'(\xi) \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq f'(\eta).$$

$$f \text{ je ryze konvexní na } I \Rightarrow (\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta))$$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

Odtud limitními přechody $y \rightarrow \xi+$, resp. $y \rightarrow \eta-$ dostaneme

$$f'(\xi) \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq f'(\eta).$$

Funkce f' je tak neklesající na I .

$$f \text{ je ryze konvexní na } I \Rightarrow \left(\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta) \right)$$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

Odtud limitními přechody $y \rightarrow \xi+$, resp. $y \rightarrow \eta-$ dostaneme

$$f'(\xi) \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq f'(\eta).$$

Funkce f' je tak neklesající na I .

Proč nemůže být $f'(\xi) = f'(\eta)$ pro nějaká $\xi < \eta$?

$$f \text{ je ryze konvexní na } I \Rightarrow \left(\forall \xi, \eta \in I: \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta) \right)$$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

Odtud limitními přechody $y \rightarrow \xi+$, resp. $y \rightarrow \eta-$ dostaneme

$$f'(\xi) \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq f'(\eta).$$

Funkce f' je tak neklesající na I .

Proč nemůže být $f'(\xi) = f'(\eta)$ pro nějaká $\xi < \eta$?

Ano, máte pravdu.

$$f \text{ je ryze konvexní na } I \Rightarrow \left(\forall \xi, \eta \in I : \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta) \right)$$

Důkaz: Pro pevná $\xi < \eta$ a proměnné y ($\xi < y < \eta$) máme

$$\frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} < \frac{f(\eta) - f(y)}{\eta - y}.$$

Odtud limitními přechody $y \rightarrow \xi+$, resp. $y \rightarrow \eta-$ dostaneme

$$f'(\xi) \leq \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} \leq f'(\eta).$$

Funkce f' je tak neklesající na I .

Proč nemůže být $f'(\xi) = f'(\eta)$ pro nějaká $\xi < \eta$?

Ano, máte pravdu.

Jistě něco víte i o tečnách ke grafu konvexní funkce.

- *Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.*

- *Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.*

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0 : x \neq x_0)$$

- *Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.*

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0 : x \neq x_0), \\ f(x) - f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0 : x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$$

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0 : x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \quad / : (x - x_0)$$

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0: x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \quad /:(x - x_0)$$

$$f'(\xi) < f'(x_0) \quad (x < \xi < x_0),$$

$$\text{resp. } f'(\xi) > f'(x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0: x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \quad /:(x - x_0)$$

$$f'(\xi) < f'(x_0) \quad (x < \xi < x_0),$$

$$\text{resp. } f'(\xi) > f'(x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

Protože předpokládáme, že f' je rostoucí, je důkaz hotov.

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0: x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \quad /:(x - x_0)$$

$$f'(\xi) < f'(x_0) \quad (x < \xi < x_0),$$

$$\text{resp. } f'(\xi) > f'(x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

Protože předpokládáme, že f' je rostoucí, je důkaz hotov.

Platí pro diferencovatelnou funkci i opačná implikace?

- Je-li derivace f' rostoucí funkce, leží graf původní funkce f „nad“ každou svou tečnou.

Napišme a upravujme (ekvivalentně) potřebný závěr:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\forall x, x_0: x \neq x_0),$$

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0), \quad /:(x - x_0)$$

$$f'(\xi) < f'(x_0) \quad (x < \xi < x_0),$$

$$\text{resp. } f'(\xi) > f'(x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

Protože předpokládáme, že f' je rostoucí, je důkaz hotov.

Platí pro diferencovatelnou funkci i opačná implikace?

Ano, máte pravdu.

- *Leží-li graf diferencovatelné funkce f nad každou svou tečnou, je derivace f' rostoucí funkce.*

- *Leží-li graf diferencovatelné funkce f nad každou svou tečnou, je derivace f' rostoucí funkce.*

K jednořádkovému důkazu implikace

$$\forall \xi, \eta : \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta)$$

využijeme pro pevná $\xi < \eta$ tečny v bodech $[\xi, f(\xi)]$ a $[\eta, f(\eta)]$.

- *Leží-li graf diferencovatelné funkce f nad každou svou tečnou, je derivace f' rostoucí funkce.*

K jednořádkovému důkazu implikace

$$\forall \xi, \eta : \xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) < f'(\eta)$$

využijeme pro pevná $\xi < \eta$ tečny v bodech $[\xi, f(\xi)]$ a $[\eta, f(\eta)]$:

$$f'(\xi) < \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi} < f'(\eta).$$

6. Co cenného je ještě pod střechou

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Příklady:

- $f(x) = e^x$ na \mathbb{R}

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Příklady:

- $f(x) = e^x$ na \mathbb{R} ,
- $f(x) = -1/x$ na \mathbb{R}^-

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Příklady:

- $f(x) = e^x$ na \mathbb{R} ,
- $f(x) = -1/x$ na \mathbb{R}^- ,
- $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ na \mathbb{R}_0^+ , pokud $a_j \geq 0$ ($\forall j$).

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Příklady:

- $f(x) = e^x$ na \mathbb{R} ,
- $f(x) = -1/x$ na \mathbb{R}^- ,
- $f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ na \mathbb{R}_0^+ , pokud $a_j \geq 0$ ($\forall j$).

Motivace:

- Má-li mocninná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$ s nezápornými koeficienty a_j poloměr konvergence $r > 0$, pak její součet je funkce, jež je na intervalu $\langle x_0, x_0 + r \rangle$ absolutně monotonní.

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

- Má-li mocninná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ s nezápornými koeficienty a_j poloměr konvergence $r > 0$, pak její součet je funkce, jež je na intervalu $\langle x_0, x_0 + r \rangle$ absolutně monotonní.

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

- Má-li mocninná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ s nezápornými koeficienty a_j poloměr konvergence $r > 0$, pak její součet je funkce, jež je na intervalu $\langle x_0, x_0 + r \rangle$ absolutně monotonní.

Bernstein dokázal (překvapivě) obrácené tvrzení (m. B. v.):

6. Co cenného je ještě pod střechou

Sergej Natanovič Bernstein (1914):

Funkce f se nazývá *absolutně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0.$$

- Má-li mocninná řada $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x - x_0)^j$ s nezápornými koeficienty a_j poloměr konvergence $r > 0$, pak její součet je funkce, jež je na intervalu $\langle x_0, x_0 + r \rangle$ absolutně monotonní.

Bernstein dokázal (překvapivě) obrácené tvrzení (m. B. v.):

- Je-li funkce f absolutně monotonní na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\forall x \in \langle a, b \rangle: f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)(x - a)^j}{j!}.$$

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff (1921):

Funkce f se nazývá *úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff (1921):

Funkce f se nazývá *úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Příklady:

- $f(x) = e^{-ax}$ na \mathbb{R} , pokud $a \geq 0$;
- $f(x) = 1/(ax + b)^c$ na \mathbb{R}^+ , pokud $a, b, c > 0$;
- $f(x) = \ln(a + b/x)$ na \mathbb{R}^+ , pokud $a \geq 1$ a $b > 0$;
- $f(x) = e^{a/x}$ na \mathbb{R}^+ , pokud $a > 0$;
- $f(x) = e - (1 + 1/x)^x$ na \mathbb{R}^+ .

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff (1921):

Funkce f se nazývá *úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Motivace:

- Je-li $f : \langle 0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff (1921):

Funkce f se nazývá *úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Motivace:

- Je-li $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

Proč zrovna písmeno L ?

6. Co cenného je ještě pod střechou

Felix Hausdorff (1921):

Funkce f se nazývá *úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Motivace:

- Je-li $f: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

Proč zrovna písmeno L ?

Správně, funkce L je Laplaceova transformace funkce f !

- Je-li $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

- Je-li $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

Hausdorff dokázal obrácené tvrzení:

- Každá funkce L úplně monotonní na \mathbb{R}^+ má reprezentaci

$$\forall x > 0: L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\mu(t)$$

s vhodnou mírou μ (Laplaceův-Stieltjesův integrál).

- Je-li $f : \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ a konverguje-li integrál

$$L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt$$

pro každé $x > a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta, pak funkce L je úplně monotonní na intervalu (a, ∞) .

Hausdorff dokázal obrácené tvrzení:

- Každá funkce L úplně monotonní na \mathbb{R}^+ má reprezentaci

$$\forall x > 0: L(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} d\mu(t)$$

s vhodnou mírou μ (Laplaceův-Stieltjesův integrál).

V případě spojité míry je $d\mu(t) = f(t)dt$ s nezápornou funkcí f .

6. Co cenného je ještě pod střechou

Bernstein: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0$

Hausdorff: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$

6. Co cenného je ještě pod střechou

Bernstein: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0$

Hausdorff: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall x \in I: (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$

Funkce $f(x)$ je absolutně monotonní na I , právě když
funkce $f(-x)$ je úplně monotonní na $-I = \{-x \mid x \in I\}$.

6. Co cenného je ještě pod střechou

Bernstein: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0$

Hausdorff: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$

Funkce $f(x)$ je absolutně monotonní na I , právě když
funkce $f(-x)$ je úplně monotonní na $-I = \{-x \mid x \in I\}$.

O čem je velká Bernsteinova věta z roku 1928?

6. Co cenného je ještě pod střechou

Bernstein: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) \geq 0$

Hausdorff: $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$

Funkce $f(x)$ je absolutně monotonní na I , právě když
funkce $f(-x)$ je úplně monotonní na $-I = \{-x \mid x \in I\}$.

O čem je velká Bernsteinova věta z roku 1928?

O integrální reprezentaci

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 e^{xt} d\mu(t)$$

každé funkce f absolutně monotonní na \mathbb{R}_0^- .

6. Co cenného je ještě pod střechou

Integrační transformace, které zobrazují *nezáporné* funkce na funkce *úplně monotonní*:

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt \quad (\text{Laplace})$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) dt}{x+t} \quad (\text{Stieltjes})$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) dt}{e^{xt} - 1} \quad (\text{Lambert})$$

6. Co cenného je ještě pod střechou

Integrační transformace, které zobrazují *nezáporné* funkce na funkce *úplně monotonní*:

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} f(t) dt \quad (\text{Laplace})$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) dt}{x+t} \quad (\text{Stieltjes})$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) dt}{e^{xt} - 1} \quad (\text{Lambert})$$

Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika, numerická matematika, statistická fyzika, zpracování signálů, fyzikální chemie, ...

7. Co (se) patří na závěr

7. Co (se) patří na závěr

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se nazývá *logaritmicky úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k (\ln f)^{(k)}(x) \geq 0.$$

7. Co (se) patří na závěr

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se nazývá *logaritmicky úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k (\ln f)^{(k)}(x) \geq 0.$$

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *absolutně konvexní* na intervalu I , pokud ...

7. Co (se) patří na závěr

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se nazývá *logaritmicky úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k (\ln f)^{(k)}(x) \geq 0.$$

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *absolutně konvexní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

7. Co (se) patří na závěr

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se nazývá *logaritmicky úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k (\ln f)^{(k)}(x) \geq 0.$$

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *absolutně konvexní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Například funkce sinus je absolutně konvexní na $\langle 0, \pi \rangle$.

7. Co (se) patří na závěr

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ se nazývá *logaritmicky úplně monotonní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad (-1)^k (\ln f)^{(k)}(x) \geq 0.$$

Nekonečně diferencovatelná funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *absolutně konvexní* na intervalu I , pokud

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in I: \quad f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Například funkce sinus je absolutně konvexní na $\langle 0, \pi \rangle$.

Domácí úkol: Rozhodněte, zda pro každou posloupnost $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ sestavenou z čísel $+1$ a -1 existuje nekonečně diferencovatelná funkce $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastností

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x \in (0, 1): \quad \varepsilon_k f^{(k)}(x) > 0.$$