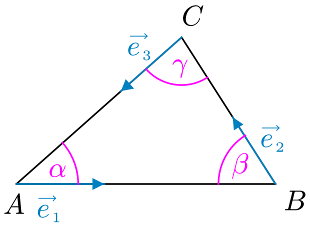
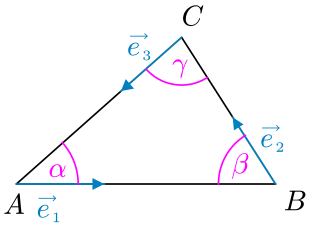
Příklad 10

Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů obecného trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

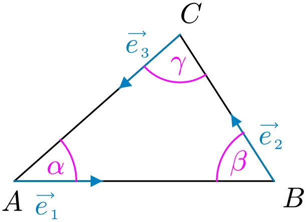


$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ $\quad\Rightarrow$



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ $\quad\Rightarrow$

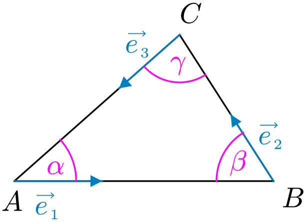
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\cos\beta, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\alpha, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\gamma.$$



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ $\quad\Rightarrow$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = -\cos\beta,\quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = -\cos\alpha,\quad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = -\cos\gamma.$$

$$0 \le \left|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\right|^2 = 1+1+1+2(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3) =$$
$$= 3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma).$$



$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$ $\quad\Rightarrow$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -\cos\beta, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\alpha, \quad \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = -\cos\gamma.$$

$$0 \le \left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right|^2 = 1 + 1 + 1 + 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) =$$
$$= 3 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Odtud již plyne $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$. $\quad\square$