

Příklad 9

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X , při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|.$$

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X , při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|.$$

$$|AP| \cdot |AT| \geq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{AT} = |\overrightarrow{AT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{AT},$$

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X , při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|.$$

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |AT| &\geq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{AT} = |\overrightarrow{AT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{AT}, \\ |BP| \cdot |BT| &\geq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BT} = (\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{BT} = |\overrightarrow{BT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{BT}, \\ |CP| \cdot |CT| &\geq \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{CT} = |\overrightarrow{CT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{CT}. \end{aligned}$$

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X , při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|.$$

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |AT| &\geq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{AT} = |\overrightarrow{AT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{AT}, \\ |BP| \cdot |BT| &\geq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BT} = (\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{BT} = |\overrightarrow{BT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{BT}, \\ |CP| \cdot |CT| &\geq \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{CT} = |\overrightarrow{CT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{CT}. \end{aligned}$$

Sečtením

$$S \geq |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}).$$

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X , při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|.$$

$$\begin{aligned} |AP| \cdot |AT| &\geq \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AT} = (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{AT} = |\overrightarrow{AT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{AT}, \\ |BP| \cdot |BT| &\geq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BT} = (\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{BT} = |\overrightarrow{BT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{BT}, \\ |CP| \cdot |CT| &\geq \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TP}) \cdot \overrightarrow{CT} = |\overrightarrow{CT}|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{CT}. \end{aligned}$$

Sečtením

$$S \geq |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + \overrightarrow{TP} \cdot (\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT}).$$

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \min S = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 \quad \square$$