VEKTORY VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Velké Meziříčí, 21. srpna 2012

Osnova přednášky

(1) Vektory v učebnicích M pro G
(2) Od bodů k vektorům nebo naopak?
(3) Co je vektor?
(4) Proč sčítáme vektory jak sčítáme?
(5) Proč násobíme vektor číslem jak násobíme?
(6) Proč a jak násobíme vektor vektorem?
   a) Skalární součin dvou vektorů
   b) Vektorový součin dvou vektorů
   c) Smíšený součin tří vektorů
(7) Vektorová algebra v příkladech

1 VEKTORY V UČEBNICÍCH

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Planimetrie

3 Zobrazení v rovině

3.4 *Posunutí*
Definice:
Je dána nenulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. *Posunutí* neboli *translace* je shodné zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.

3.6 *Skládání shodných zobrazení*
Úvodní příklad:
Složením dvou posunutí dostaneme opět posunutí.

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Analytická geometrie

2 Vektory

2.1 *Orientované úsečky*
2.2 *Co je vektor*
2.3 *Sčítání vektorů*
2.4 *Násobení vektorů číslem*
2.5 *Posunutí soustavy souřadnic*
2.6 *Skalární součin vektorů*
2.7 *Otočení kartézské soustavy souřadnic*
2.8 *Pravotočivá a levotočivá báze*
2.9 *Vektorový a smíšený součin*

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Analytická geometrie

3 Geometrie v rovině

Směrový vektor přímky a její parametrická rovnice.
Normálový vektor přímky a její obecná rovnice.
Odchylka dvou přímek.

4 Geometrie v prostoru

Směrový vektor přímky a její parametrická rovnice.
Normálový vektor a obecná rovnice roviny.
Odchylky přímek a rovin.

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Komplexní čísla

2 Geometrické znázornění komplexních čísel

2.5 *Komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině*
Komplexně-číselný význam součtu dvou vektorů a násobení vektoru reálným číslem.
Vektorový význam násobení komplexního čísla s komplexní jednotkou.

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

Teprve poté do těchto prostorů „vkládáme“ vektory a tvoříme vektorovou algebru s pragmatickým cílem – získat základní prostředek výpočtů analytické geometrie.

Možný je však i opačný postup, který předkládáme studentům učitelství M na fakultách. Jeho výchozí stavební kámen, pojem *vektorového prostoru*, má v matematice obrovský význam, zdaleka přesahující oblast pouhé geometrie.

Podívejme se proto nyní, jaké vlastnosti geometrických vektorů byly abstrahovány do definice *obecného vektorového prostoru*.

Definice vektorového prostoru

Nechť V je množina (jejím prvkům budeme říkat vektory) s binární operací $V \times V \to V$ značenou jako $+$. Kromě toho je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které libovolným $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{v} \in V$ přiřadí prvek z V značený jako $t \cdot \vec{v}$. Předpokládejme, že:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

(iii) $\exists \vec{o} \in V,\ \forall \vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V,\ \exists -\vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}\colon\ t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$,

(vi) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$,

(vii) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s \cdot \vec{u})$,

(viii) $\forall \vec{u} \in V\colon\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Čtveřice $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ se pak nazývá *vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$, $\vec{o}$ – *nulový* vektor, $-\vec{u}$ – *opačný* vektor k vektoru $\vec{u}$.

Model n-rozměrného vektorového prostoru: $\mathbb{R}^n$

Definice bodového (afinního) prostoru

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A, B) = \vec{u}$,

(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.

Pak trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ se nazývá *afinní prostor*, prvky množiny $\mathcal{A}$ – *body* a vektorový prostor V – *zaměření afinního prostoru.*

Ke každému vektorovému prostoru V můžeme snadno body pro afinní prostor se zaměřením V z jeho vektorů „vyrobit“:

$$\vec{o} \leftrightarrow O, \quad \forall \vec{u} \in V\colon \vec{u} \leftrightarrow U, \quad f(U, V) = \vec{v} - \vec{u}$$

Obvyklá praxe: množinu $\mathbb{R}^n$ považujeme za prostor vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i za prostor bodů $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami.*

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

O *vnitřních* bodech orientované úsečky zpravidla nemluvíme, proč je tedy kreslíme? Ze dvou či tří důvodů ...

orientovaná úsečka $\sim$ *vázaný vektor*
Volný vektor – množina všech orientovaných úseček téže délky a téhož směru (jednotlivých umístění $\overrightarrow{AA'}$ volného vektoru $\vec{u}$):

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$$

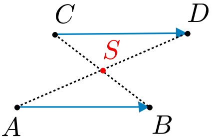
O – počátek, $\overrightarrow{OX}$ – *polohový vektor* bodu X

Volnost bez omezení?

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$



$S(A, D) = S(B, C) \;\Leftrightarrow\; AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

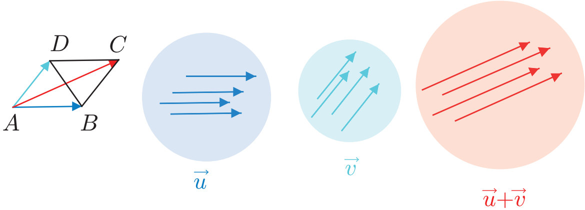
$S = S(X, Y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}), \quad S(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C) \;\Leftrightarrow\; B - A = D - C$

Konvence $\overrightarrow{XY} = Y - X$ je podložena rovností $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$.

4 PROČ SČÍTÁME VEKTORY JAK SČÍTÁME?

Fyzika: skládání sil pomocí vektorového rovnoběžníku



Geometrie: Vektorem $\vec{u} + \vec{v}$ míníme vektor toho posunutí, jež je výsledkem složení posunutí určených vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Takové sčítání splňuje axiomy z definice vektorového prostoru.

$\vec{o} = \overrightarrow{AA}$ (posunutí – identita), $\quad -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (inverzní posunutí)

Vektory tedy sčítáme „skládáním za sebe“: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Opora pro zápis vektoru jako *rozdílu dvou bodů*: $\overrightarrow{XY} = Y - X$
$\big[\,(Y - X) + (Z - Y) = Z - X\,\big]$
a pro zavedení *součtu bodu a vektoru*: $X + \vec{u} = Y \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \overrightarrow{XY}$

Věta. Binární operace $\circ$ na množině všech vektorů roviny nebo prostoru je obvyklý vektorový součet (tj. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$), jestliže:

(1) $\circ$ je komutativní a asociativní operace,

(2) rovnost $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$ platí pro libovolné dva lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$,

(3) pro každou rotaci $\mathcal{R}$ roviny nebo prostoru platí rovnost $\mathcal{R}(\vec{u}) \circ \mathcal{R}(\vec{v}) = \mathcal{R}(\vec{u} \circ \vec{v})$,

(4) pro každé dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ téže konstantní délky vektor $\vec{u} \circ \vec{v}$ spojitě závisí na úhlu, který vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ svírají.

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\ldots$, $n \cdot \vec{u} = \ldots$,

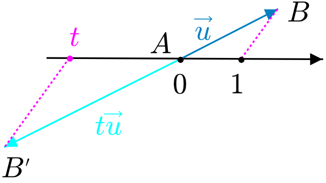
Vše je podřízeno jedinému požadavku: $(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

Tak dostaneme $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$, $(-n) \cdot \vec{u} = -(n \cdot \vec{u})$,

$$\vec{v} = \frac{m}{n} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow n \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{u}$$

a ze spojitosti i vektor $t \cdot \vec{u}$ pro iracionální t.

Geometrická konstrukce t-násobku vektoru $\vec{u}$:



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB'} = t \cdot \vec{u}$$

Takové násobení splňuje i zbývající axiomy z definice vektorového prostoru: $\quad t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s\vec{u})\,.$

6 PROČ A JAK NÁSOBÍME VEKTOR VEKTOREM?

Pro praktickou geometrii mají od nepaměti základní význam dvě skalární veličiny: vzdálenosti bodů (délky úseček) a velikosti (rovinných) úhlů.

S těmito dvěma veličinami lze (k užitku) počítat i v bodových prostorech vyšších dimenzí, máme-li na jejich zaměření další operaci – *skalární součin* dvou vektorů. Popišme jeho obecné vlastnosti nejprve axiomaticky.

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\ f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Dvojice (V, f) se pak nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně hovoříme o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ píšeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo (častěji) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Axiomu (ii) říkáme distributivní zákon: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

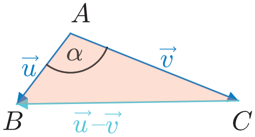
Obvyklý skalární součin v „souřadnicovém“ prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Jak obecná definice nad čarou souvisí se vzdálenostmi a úhly?

Tři navzájem různé body A, B, C:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

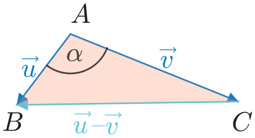


Kosinová věta:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$$

kde $\alpha = |\sphericalangle BAC| \in \langle 0, \pi \rangle$ je také *odchylka* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Přepišme kosinovou větu ve *velikostech* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{u} - \vec{v}$ (užitím značky obvyklé pro absolutní hodnotu):



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Zaveďme „novou“ komutativní operaci: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
(a pro úplnost $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} 0$, je-li $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$).

$\forall \vec{w}\colon |\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} \quad \Rightarrow \quad$ kosinová věta získává zápis

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Když ukážeme, že nová operace $\cdot$ je nejen komutativní, ale i distributivní vzhledem k vektorovému sčítání, odhalíme tím nejen všechny její vlastnosti abstrahované do obecné definice skalárního součinu, nýbrž se nám naskytne i nový důkaz …

Popsaná (elementárně-geometrická) zkušenost s operací

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

napovídá, jak zavést vzdálenosti bodů a velikosti úhlů v prostoru obecné dimenze, máme-li na jeho zaměření k užitku skalární součin.

Nejprve zavedeme velikosti a odchylky (nenulových) vektorů

$$|\vec{u}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}, \quad \cos|\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{v})| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\,.$$

To druhé má smysl díky Cauchyově-Schwarzově nerovnosti

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|,$$

jež plyne z axiomů skalárního součinu.

Pak přejdeme od prostoru vektorů k prostoru bodů

$$d(A, B) = |AB| \stackrel{\text{def}}{=} |B - A|, \quad |\sphericalangle BAC| \stackrel{\text{def}}{=} |\sphericalangle(B - A, C - A)|.$$

Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

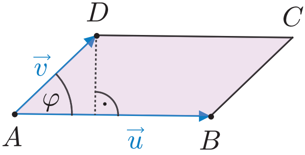
Fyzika: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Geometrie – Řešení dvou úkolů:

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů

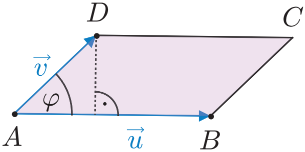
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Obsah rovnoběžníku „nad“ danými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$



$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$ (a $S = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$)

Jak hodnotu S počítat?



$$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}} =$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

Můžeme vedle obvyklého skalární součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zavést ještě „druhý skalární" součin $\vec{u} * \vec{v}$ tak, abychom měli $S = |\vec{u} * \vec{v}|$?

To bude jistě zaručeno, pokud bude platit

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \,.$$

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$$

Co by takový nový součin měl ještě splňovat (kromě distributivity vzhledem k vektorovému součtu)?

Jistě $\vec{u} * \vec{v} = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (případ $S = 0$).

Tehdy ovšem z rovnosti (s třemi nulovými součiny)

$$(\vec{u} + \vec{v}) * (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} * \vec{u} + \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{u} + \vec{v} * \vec{v}$$

plyne $\vec{v} * \vec{u} = -\vec{u} * \vec{v}$.
Operace $*$ tedy musí být *antikomutativní*!

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u}\cdot\vec{v}$) existuje zobrazení $V\times V\to\mathbb{R}$ s hodnotami značenými $\vec{u}*\vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall \vec{u},\vec{v}\in V:\quad \vec{v}*\vec{u}=-\vec{u}*\vec{v}$,
(ii) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V:\quad (\vec{u}+\vec{v})*\vec{w}=\vec{u}*\vec{w}+\vec{v}*\vec{w}$,
(iii) $\forall \vec{u},\vec{v}\in V,\ \forall t\in\mathbb{R}:\quad (t\cdot\vec{u})*\vec{v}=t\cdot(\vec{u}*\vec{v})$,
(iv) $\forall \vec{u},\vec{v}\in V:\quad (\vec{u}\cdot\vec{v})^2+(\vec{u}*\vec{v})^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$.

Potom $\dim V=2$ a na prostoru $V=\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2$ existují jen dvě popsaná zobrazení a jsou dána předpisem

$$(u_1,u_2)*(v_1,v_2)=\pm\big(u_1v_2-u_2v_1\big)=\pm\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{bmatrix}$$

vždy s jednou volbou znaménka pro všechny hodnoty $*$.

Poznámka: Kruciální vlastnost (iv) je splněna díky identitě

$$(u_1v_1+u_2v_2)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2=(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2)\,.$$

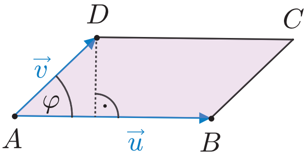
Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Úlohu o obsahu rovnoběžníku nad dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsme řešili koncepcí „druhého skalárního“ součinu $\vec{u} * \vec{v}$. Uspěli jsme pouze v eukleidovském prostoru dimenze 2, tedy v rovině, což je pro praktické účely zcela postačující.

Nyní stejnou úlohu spojíme s úlohou (2) a budeme hledat společné řešení obou úloh pomocí nového *vektorového součinu*. (Uspějeme ovšem pouze v eukleidovském prostoru dimenze 3).

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

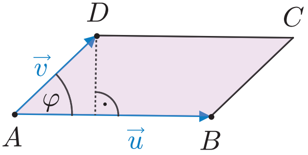


Úloha. K daným dvěma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určete vektor $\vec{w}$, tak aby současně platilo

$$|\vec{w}| = S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$$

(ovšem že $\vec{w} = \vec{o}$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

Lze vektor-řešení $\vec{w}$ najít jako $w = \vec{u} \times \vec{v}$ s novou vektorovou operací $\times$, jež je distributivní vzhledem k vektorovému sčítání?



Úloha. K daným dvěma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určete vektor $\vec{w}$, tak aby současně platilo

$$|\vec{w}| = S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$$

(ovšem že $\vec{w} = \vec{o}$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

Lze vektor-řešení $\vec{w}$ najít jako $w = \vec{u} \times \vec{v}$ s novou vektorovou operací $\times$, jež je distributivní vzhledem k vektorovému sčítání?

Je jasné, že $|\vec{u} \times \vec{v}| = S \;\Leftrightarrow\; (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$
a že operace $\times$ musí být antisymetrická: $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$.

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u} \cdot \vec{v}$) existuje zobrazení $V \times V \to V$ s hodnotami značenými $\vec{u} \times \vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}: \quad (t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$.

Potom $\dim V = 3$ a na prostoru $V = \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ existují jen dvě popsaná zobrazení a jsou dána předpisem

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \pm \det \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

kde $\vec{\mathrm{e}}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\mathrm{e}}_2 = (0, 1, 0)$ a $\vec{\mathrm{e}}_3 = (0, 0, 1)$.

Poznámka: Podmínka $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$ je splněna díky méně zřejmé identitě

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 =$$
$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2.$$

Co je smíšený součin tří vektorů?

Dosud jsme neposoudili otázku vektorových výpočtů objemů. Kvůli nim zavedeme následující pojem.

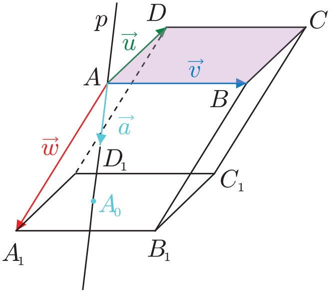
Definice. Smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je číslo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w},$$

kde $\times$ a $\cdot$ značí vektorový, resp. skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru V.

Význam takového součinu teď objasníme.

Objem rovnoběžnostěnu „nad“ danými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$



Věta. Objem takového rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě z čísla $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w}$, tedy ze smíšeného součinu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Důkaz:

$$|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{w}| = S_{ABCD}\cdot|AA_1|\cdot|\cos\sphericalangle(\vec{a},\overrightarrow{w})| = S_{ABCD}\cdot|AA_0| = V$$

7 VEKTOROVÁ ALGEBRA V PŘÍKLADECH

„Algebraickou gramotnost“ žáků chápeme jako jejich dovednost pracovat s algebraickými výrazy, v nichž různá písmena zastupují výlučně číselné konstanty či proměnné skalární veličiny. Na počítání s vektorovými výrazy se ve škole nedostává času …

Při řešení příkladů, v nichž chceme uplatnit vektory, je často důležité vhodně zvolit označení $\left[\,\vec{u},\ \overrightarrow{AB}\ \text{či}\ B-A\,?\right]$.

Užitečný kalkulus lineárních kombinací bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ s koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$, tedy výrazů

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k,$$

které považujeme za body či vektory, podle toho, zda součet $s = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ se rovná jedné nebo nule.