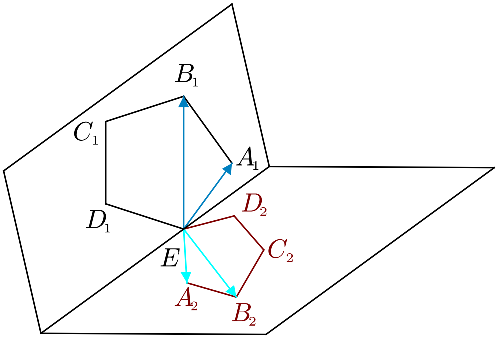
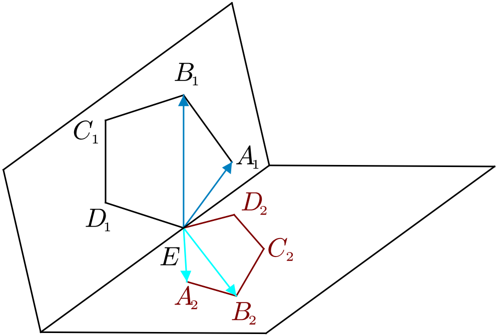
Příklad 4

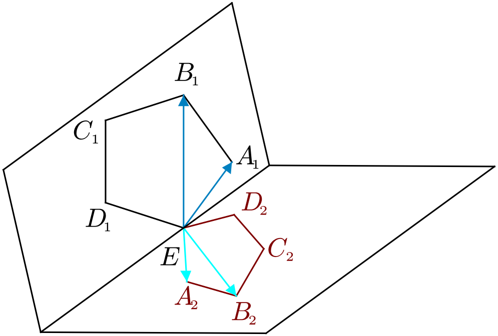
V prostoru jsou dány dva pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E$ a $A_2B_2C_2D_2E$ se společným vrcholem E, které neleží v téže rovině. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 a D_1D_2 jsou rovnoběžné s některou rovinou.





Pro vhodná $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ platí

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1}.$$



Pro vhodná $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ platí

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$

stejně jako

$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}, \qquad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$
$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}, \qquad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}, \qquad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$
$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}, \qquad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

Proto vektory $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$ mají vyjádření:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{EC_2} - \overrightarrow{EC_1} = (p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}) - (p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= p(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + q(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = p\overrightarrow{A_1A_2} + q\overrightarrow{B_1B_2}, \\
\overrightarrow{D_1D_2} &= \overrightarrow{ED_2} - \overrightarrow{ED_1} = (r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}) - (r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= r(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + s(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = r\overrightarrow{A_1A_2} + s\overrightarrow{B_1B_2}
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}, \qquad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1},$$
$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}, \qquad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}.$$

Proto vektory $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$ mají vyjádření:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{EC_2} - \overrightarrow{EC_1} = (p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}) - (p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= p(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + q(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = p\overrightarrow{A_1A_2} + q\overrightarrow{B_1B_2}, \\
\overrightarrow{D_1D_2} &= \overrightarrow{ED_2} - \overrightarrow{ED_1} = (r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}) - (r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1}) = \\
&= r(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + s(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = r\overrightarrow{A_1A_2} + s\overrightarrow{B_1B_2}
\end{aligned}$$

Všechny čtyři přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 a D_1D_2 jsou tak rovnoběžné s rovinou určenou vektory $\overrightarrow{A_1A_2}$ a $\overrightarrow{B_1B_2}$. $\square$