VEKTORY VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

Jaromír Šimša, PřF MU Brno

Velké Meziříčí, 21. srpna 2012

Osnova přednášky

(1) Vektory v učebnicích M pro G
(2) Od bodů k vektorům nebo naopak?
(3) Co je vektor?
(4) Proč sčítáme vektory jak sčítáme?
(5) Proč násobíme vektor číslem jak násobíme?
(6) Proč a jak násobíme vektor vektorem?
    a) Skalární součin dvou vektorů
    b) Vektorový součin dvou vektorů
    c) Smíšený součin tří vektorů
(7) Vektorová algebra v příkladech

1 VEKTORY V UČEBNICÍCH

1 VEKTORY V UČEBNICÍCH

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Planimetrie

1 VEKTORY V UČEBNICÍCH

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Planimetrie

3 Zobrazení v rovině

3.4 *Posunutí*

Definice:

Je dána nenulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. *Posunutí* neboli *translace* je shodné zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.

1 VEKTORY V UČEBNICÍCH

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Planimetrie

3 Zobrazení v rovině

3.4 *Posunutí*
Definice:
Je dána nenulová orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. *Posunutí* neboli *translace* je shodné zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{XX'}$ a $\overrightarrow{AB}$ mají stejnou délku a stejný směr.

3.6 *Skládání shodných zobrazení*
Úvodní příklad:
Složením dvou posunutí dostaneme opět posunutí.

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Analytická geometrie

2 Vektory

2.1 *Orientované úsečky*
2.2 *Co je vektor*
2.3 *Sčítání vektorů*
2.4 *Násobení vektorů číslem*
2.5 *Posunutí soustavy souřadnic*
2.6 *Skalární součin vektorů*
2.7 *Otočení kartézské soustavy souřadnic*
2.8 *Pravotočivá a levotočivá báze*
2.9 *Vektorový a smíšený součin*

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Analytická geometrie

3 Geometrie v rovině

Směrový vektor přímky a její parametrická rovnice.
Normálový vektor přímky a její obecná rovnice.
Odchylka dvou přímek.

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Analytická geometrie

3 Geometrie v rovině

Směrový vektor přímky a její parametrická rovnice.
Normálový vektor přímky a její obecná rovnice.
Odchylka dvou přímek.

4 Geometrie v prostoru

Směrový vektor přímky a její parametrická rovnice.
Normálový vektor a obecná rovnice roviny.
Odchylky přímek a rovin.

Řada učebnic matematiky pro gymnázia (nakl. Prometheus)

Komplexní čísla

2 Geometrické znázornění komplexních čísel

2.5 *Komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině*
Komplexně-číselný význam součtu dvou vektorů
a násobení vektoru reálným číslem.
Vektorový význam násobení komplexního čísla
s komplexní jednotkou.

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

Teprve poté do těchto prostorů „vkládáme“ vektory a tvoříme vektorovou algebru s pragmatickým cílem – získat základní prostředek výpočtů analytické geometrie.

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

Teprve poté do těchto prostorů „vkládáme“ vektory a tvoříme vektorovou algebru s pragmatickým cílem – získat základní prostředek výpočtů analytické geometrie.

Možný je však i opačný postup, který předkládáme studentům učitelství M na fakultách.

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

Teprve poté do těchto prostorů „vkládáme“ vektory a tvoříme vektorovou algebru s pragmatickým cílem – získat základní prostředek výpočtů analytické geometrie.

Možný je však i opačný postup, který předkládáme studentům učitelství M na fakultách. Jeho výchozí stavební kámen, pojem *vektorového prostoru*, má v matematice obrovský význam, zdaleka přesahující oblast pouhé geometrie.

2 OD BODŮ K VEKTORŮM NEBO NAOPAK?

Ve škole synteticky nejprve (po celá léta) budujeme geometrické prostory bodů (přímku, rovinu, třírozměrný prostor).

Teprve poté do těchto prostorů „vkládáme“ vektory a tvoříme vektorovou algebru s pragmatickým cílem – získat základní prostředek výpočtů analytické geometrie.

Možný je však i opačný postup, který předkládáme studentům učitelství M na fakultách. Jeho výchozí stavební kámen, pojem *vektorového prostoru*, má v matematice obrovský význam, zdaleka přesahující oblast pouhé geometrie.

Podívejme se proto nyní, jaké vlastnosti geometrických vektorů byly abstrahovány do definice *obecného vektorového prostoru*.

Definice vektorového prostoru

Nechť V je množina (jejím prvkům budeme říkat vektory) s binární operací $V \times V \to V$ značenou jako $+$. Kromě toho je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které libovolným $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{v} \in V$ přiřadí prvek z V značený jako $t \cdot \vec{v}$. Předpokládejme, že:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon\ \vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$,

(iii) $\exists \vec{o} \in V,\ \forall \vec{u} \in V\colon\ \vec{u}+\vec{o} = \vec{u}$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V,\ \exists -\vec{u} \in V\colon\ \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{o}$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}\colon\ t \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$,

(vi) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (t+s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$,

(vii) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s \cdot \vec{u})$,

(viii) $\forall \vec{u} \in V\colon\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Definice vektorového prostoru

Nechť V je množina (jejím prvkům budeme říkat vektory) s binární operací $V \times V \to V$ značenou jako $+$. Kromě toho je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které libovolným $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{v} \in V$ přiřadí prvek z V značený jako $t \cdot \vec{v}$. Předpokládejme, že:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

(iii) $\exists \vec{o} \in V,\ \forall \vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V,\ \exists -\vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}\colon\ t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$,

(vi) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$,

(vii) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s \cdot \vec{u})$,

(viii) $\forall \vec{u} \in V\colon\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Čtveřice $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ se pak nazývá *vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$, $\vec{o}$ – *nulový* vektor, $-\vec{u}$ – *opačný* vektor k vektoru $\vec{u}$.

Definice vektorového prostoru

Nechť V je množina (jejím prvkům budeme říkat vektory) s binární operací $V \times V \to V$ značenou jako $+$. Kromě toho je dáno zobrazení $\mathbb{R} \times V \to V$, které libovolným $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{v} \in V$ přiřadí prvek z V značený jako $t \cdot \vec{v}$. Předpokládejme, že:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,

(iii) $\exists \vec{o} \in V,\ \forall \vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V,\ \exists -\vec{u} \in V\colon\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}\colon\ t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$,

(vi) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$,

(vii) $\forall \vec{u} \in V,\ \forall t, s \in \mathbb{R}\colon\ (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s \cdot \vec{u})$,

(viii) $\forall \vec{u} \in V\colon\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Čtveřice $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ se pak nazývá *vektorový prostor nad* $\mathbb{R}$, $\vec{o}$ – *nulový* vektor, $-\vec{u}$ – *opačný* vektor k vektoru $\vec{u}$.

Model n-rozměrného vektorového prostoru: $\mathbb{R}^n$

Definice bodového (afinního) prostoru

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A, B) = \vec{u}$,

(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.

Definice bodového (afinního) prostoru

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A, B) = \vec{u}$,

(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.

Pak trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ se nazývá *afinní prostor*, prvky množiny $\mathcal{A}$ – *body* a vektorový prostor V – *zaměření afinního prostoru.*

Definice bodového (afinního) prostoru

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A, B) = \vec{u}$,

(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.

Pak trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ se nazývá *afinní prostor*, prvky množiny $\mathcal{A}$ – *body* a vektorový prostor V – *zaměření afinního prostoru.*

Ke každému vektorovému prostoru V můžeme snadno body pro afinní prostor se zaměřením V z jeho vektorů „vyrobit“:

$$\vec{o} \leftrightarrow O, \quad \forall \vec{u} \in V : \vec{u} \leftrightarrow U, \quad f(U, V) = \vec{v} - \vec{u}$$

Definice bodového (afinního) prostoru

Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s vlastnostmi:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A, B) = \vec{u}$,

(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$.

Pak trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ se nazývá *afinní prostor*, prvky množiny $\mathcal{A}$ – *body* a vektorový prostor V – *zaměření afinního prostoru.*

Ke každému vektorovému prostoru V můžeme snadno body pro afinní prostor se zaměřením V z jeho vektorů „vyrobit“:

$$\vec{o} \leftrightarrow O, \quad \forall \vec{u} \in V\colon \vec{u} \leftrightarrow U, \quad f(U, V) = \vec{v} - \vec{u}$$

Obvyklá praxe: množinu $\mathbb{R}^n$ považujeme za prostor vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i za prostor bodů $U = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*.

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami*.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami*.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

O *vnitřních* bodech orientované úsečky zpravidla nemluvíme, proč je tedy kreslíme? Ze dvou či tří důvodů ...

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami.*

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

O *vnitřních* bodech orientované úsečky zpravidla nemluvíme, proč je tedy kreslíme? Ze dvou či tří důvodů ...

orientovaná úsečka $\sim$ *vázaný vektor*

Volný vektor – množina všech orientovaných úseček téže délky a téhož směru (jednotlivých umístění $\overrightarrow{AA'}$ volného vektoru $\vec{u}$):

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$$

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami*.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

O *vnitřních* bodech orientované úsečky zpravidla nemluvíme, proč je tedy kreslíme? Ze dvou či tří důvodů ...

orientovaná úsečka $\sim$ *vázaný vektor*

Volný vektor – množina všech orientovaných úseček téže délky a téhož směru (jednotlivých umístění $\overrightarrow{AA'}$ volného vektoru $\vec{u}$):

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$$

O – počátek, $\overrightarrow{OX}$ – *polohový vektor* bodu X

3 CO JE VEKTOR?

Veličiny dvojího druhu: skalární a vektorové.

Skalární veličiny mají pouze *velikost* (vyjádřenou číslem v určitých jednotkách), vektorové veličiny má kromě velikosti i jistý *směr*. Znázorňujeme je proto *orientovanými úsečkami*.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$: A – *počáteční* bod, B – *koncový* bod

O *vnitřních* bodech orientované úsečky zpravidla nemluvíme, proč je tedy kreslíme? Ze dvou či tří důvodů ...

orientovaná úsečka $\sim$ *vázaný vektor*

Volný vektor – množina všech orientovaných úseček téže délky a téhož směru (jednotlivých umístění $\overrightarrow{AA'}$ volného vektoru $\vec{u}$):

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \ldots$$

O – počátek, $\overrightarrow{OX}$ – *polohový vektor* bodu X

Volnost bez omezení?

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

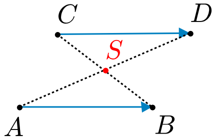
Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

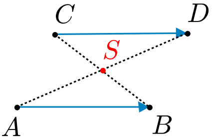
Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$



Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$

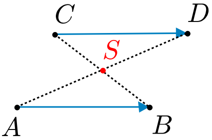


$S(A, D) = S(B, C) \;\Leftrightarrow\; AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow S(A, D) = S(B, C)$



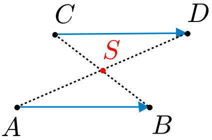
$S(A, D) = S(B, C) \Leftrightarrow AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

$S = S(X, Y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY})$

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$



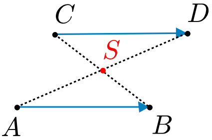
$S(A, D) = S(B, C) \;\Leftrightarrow\; AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

$S = S(X, Y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}), \quad S(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y)$

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$



$S(A, D) = S(B, C) \;\Leftrightarrow\; AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

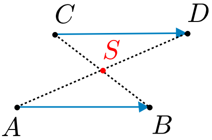
$S = S(X, Y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}), \quad S(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C) \;\Leftrightarrow\; B - A = D - C$

Trocha formalismu: $\overrightarrow{AB}$ je uspořádaná dvojice bodů (A, B).

Rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ neboli relaci $(A, B) \sim (C, D)$ lze zavést bez užití pojmu vzdálenosti bodů!

Relace ekvipolence: $(A, B) \sim (C, D) \;\Leftrightarrow\; S(A, D) = S(B, C)$



$S(A, D) = S(B, C) \;\Leftrightarrow\; AB \parallel CD \wedge AC \parallel BD$

$S = S(X, Y) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}), \quad S(X, Y) = \frac{1}{2}(X + Y)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C) \;\Leftrightarrow\; B - A = D - C$

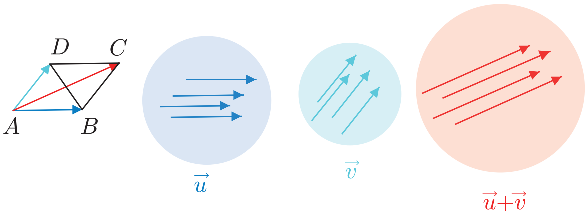
Konvence $\overrightarrow{XY} = Y - X$ je podložena rovností $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$.

4 PROČ SČÍTÁME VEKTORY JAK SČÍTÁME?

Fyzika: skládání sil pomocí vektorového rovnoběžníku

4 PROČ SČÍTÁME VEKTORY JAK SČÍTÁME?

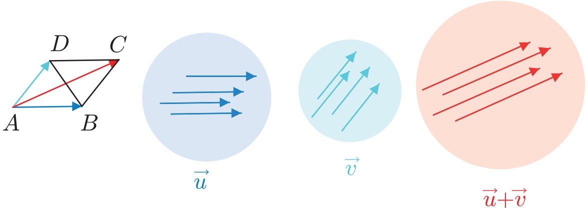
Fyzika: skládání sil pomocí vektorového rovnoběžníku



Geometrie: Vektorem $\vec{u}+\vec{v}$ míníme vektor toho posunutí, jež je výsledkem složení posunutí určených vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

4 PROČ SČÍTÁME VEKTORY JAK SČÍTÁME?

Fyzika: skládání sil pomocí vektorového rovnoběžníku



Geometrie: Vektorem $\vec{u} + \vec{v}$ míníme vektor toho posunutí, jež je výsledkem složení posunutí určených vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Takové sčítání splňuje axiomy z definice vektorového prostoru.

$\vec{o} = \overrightarrow{AA}$ (posunutí – identita), $\quad -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (inverzní posunutí)

Vektory tedy sčítáme „skládáním za sebe“: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Vektory tedy sčítáme „skládáním za sebe“: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Opora pro zápis vektoru jako *rozdílu dvou bodů*: $\overrightarrow{XY} = Y - X$
$\big[\,(Y - X) + (Z - Y) = Z - X\,\big]$

Vektory tedy sčítáme „skládáním za sebe“: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Opora pro zápis vektoru jako *rozdílu dvou bodů*: $\overrightarrow{XY} = Y - X$
$\big[\,(Y - X) + (Z - Y) = Z - X\,\big]$
a pro zavedení *součtu bodu a vektoru*: $X + \vec{u} = Y \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \overrightarrow{XY}$

Vektory tedy sčítáme „skládáním za sebe“: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$.

Opora pro zápis vektoru jako *rozdílu dvou bodů*: $\overrightarrow{XY} = Y - X$
$\big[\,(Y - X) + (Z - Y) = Z - X\,\big]$
a pro zavedení *součtu bodu a vektoru*: $X + \vec{u} = Y \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \overrightarrow{XY}$

Věta. Binární operace $\circ$ na množině všech vektorů roviny nebo prostoru je obvyklý vektorový součet (tj. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$), jestliže:

(1) $\circ$ je komutativní a asociativní operace,

(2) rovnost $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$ platí pro libovolné dva lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$,

(3) pro každou rotaci $\mathcal{R}$ roviny nebo prostoru platí rovnost $\mathcal{R}(\vec{u}) \circ \mathcal{R}(\vec{v}) = \mathcal{R}(\vec{u} \circ \vec{v})$,

(4) pro každé dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ téže konstantní délky vektor $\vec{u} \circ \vec{v}$ spojitě závisí na úhlu, který vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ svírají.

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\ldots$, $n \cdot \vec{u} = \ldots$,

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\ldots$, $n \cdot \vec{u} = \ldots$,

Vše je podřízeno jedinému požadavku: $(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\dots$, $n \cdot \vec{u} = \dots$,

Vše je podřízeno jedinému požadavku: $(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

Tak dostaneme $\quad 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}, \quad (-n) \cdot \vec{u} = -(n \cdot \vec{u})$

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\ldots$, $n \cdot \vec{u} = \ldots$,

Vše je podřízeno jedinému požadavku: $(t+s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

Tak dostaneme $\quad 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}, \quad (-n) \cdot \vec{u} = -(n \cdot \vec{u})$,

$$\vec{v} = \frac{m}{n} \cdot \vec{u} \;\Leftrightarrow\; n \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{u}$$

5 PROČ NÁSOBÍME VEKTOR ČÍSLEM JAK NÁSOBÍME?

Násobení vektoru číslem je *odvozeno* od operace vektorového součtu (podobně jako tomu je skalárních veličin, například obsahu či objemu).

Základ: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $2 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3 \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$, $\ldots$, $n \cdot \vec{u} = \ldots$,

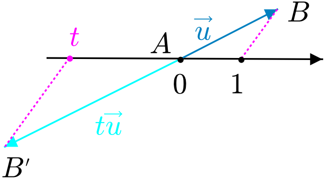
Vše je podřízeno jedinému požadavku: $(t + s) \cdot \vec{u} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}$

Tak dostaneme $0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$, $(-n) \cdot \vec{u} = -(n \cdot \vec{u})$,

$$\vec{v} = \frac{m}{n} \cdot \vec{u} \iff n \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{u}$$

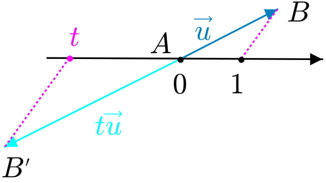
a ze spojitosti i vektor $t \cdot \vec{u}$ pro iracionální t.

Geometrická konstrukce t-násobku vektoru $\vec{u}$:



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB'} = t \cdot \vec{u}$$

Geometrická konstrukce t-násobku vektoru $\vec{u}$:



$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB'} = t \cdot \vec{u}$$

Takové násobení splňuje i zbývající axiomy z definice vektorového prostoru: $\quad t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad (ts) \cdot \vec{u} = t \cdot (s\vec{u})\,.$

6 PROČ A JAK NÁSOBÍME VEKTOR VEKTOREM?

Pro praktickou geometrii mají od nepaměti základní význam dvě skalární veličiny: vzdálenosti bodů (délky úseček) a velikosti (rovinných) úhlů.

6 PROČ A JAK NÁSOBÍME VEKTOR VEKTOREM?

Pro praktickou geometrii mají od nepaměti základní význam dvě skalární veličiny: vzdálenosti bodů (délky úseček) a velikosti (rovinných) úhlů.

S těmito dvěma veličinami lze (k užitku) počítat i v bodových prostorech vyšších dimenzí, máme-li na jejich zaměření další operaci – *skalární součin* dvou vektorů. Popišme jeho obecné vlastnosti nejprve axiomaticky.

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\ f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\; f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Dvojice (V, f) se pak nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně hovoříme o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ píšeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo (častěji) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\ f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Dvojice (V, f) se pak nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně hovoříme o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ píšeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo (častěji) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Axiomu (ii) říkáme distributivní zákon: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\ f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Dvojice (V, f) se pak nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně hovoříme o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ píšeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo (častěji) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Axiomu (ii) říkáme distributivní zákon: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Obvyklý skalární součin v „souřadnicovém“ prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Definice skalárního součinu

Nechť V je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem* na V nazveme každé zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, které splňuje:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}\colon\ f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Dvojice (V, f) se pak nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně hovoříme o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ píšeme $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nebo (častěji) $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Axiomu (ii) říkáme distributivní zákon: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

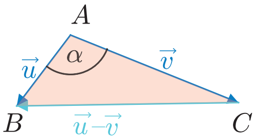
Obvyklý skalární součin v „souřadnicovém“ prostoru $\mathbb{R}^n$:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Jak obecná definice nad čarou souvisí se vzdálenostmi a úhly?

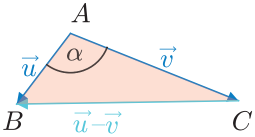
Tři navzájem různé body A, B, C:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$



Tři navzájem různé body A, B, C:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$



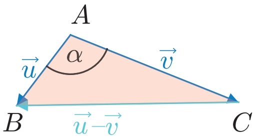
Kosinová věta:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$$

kde $\alpha = |\sphericalangle BAC| \in \langle 0, \pi \rangle$ je také *odchylka* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Tři navzájem různé body A, B, C:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{BC} = \vec{u} - \vec{v}$

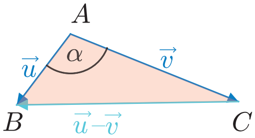


Kosinová věta:

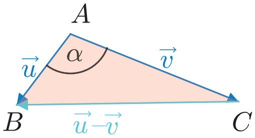
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha$$

kde $\alpha = |\sphericalangle BAC| \in \langle 0, \pi \rangle$ je také *odchylka* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Přepišme kosinovou větu ve *velikostech* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{u} - \vec{v}$ (užitím značky obvyklé pro absolutní hodnotu):



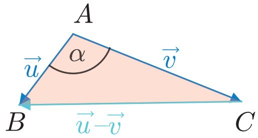
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Zaveďme „novou“ komutativní operaci: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

(a pro úplnost $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} 0$, je-li $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$).



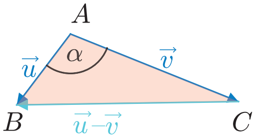
$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Zaveďme „novou“ komutativní operaci: $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$

(a pro úplnost $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, je-li $\vec{u}=\vec{o}$ nebo $\vec{v}=\vec{o}$).

$\forall\vec{w}\colon\ |\vec{w}|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w}$



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$

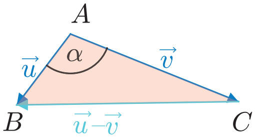
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Zaveďme „novou“ komutativní operaci: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$

(a pro úplnost $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} 0$, je-li $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$).

$\forall \vec{w}\colon |\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} \quad \Rightarrow \quad$ kosinová věta získává zápis

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$
$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Zaveďme „novou“ komutativní operaci: $\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$
(a pro úplnost $\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, je-li $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$).

$\forall \vec{w}\colon |\vec{w}|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} \quad \Rightarrow$ kosinová věta získává zápis

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Když ukážeme, že nová operace $\cdot$ je nejen komutativní, ale i distributivní vzhledem k vektorovému sčítání, odhalíme tím nejen všechny její vlastnosti abstrahované do obecné definice skalárního součinu, nýbrž se nám naskytne i nový důkaz …

Popsaná (elementárně-geometrická) zkušenost s operací

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

napovídá, jak zavést vzdálenosti bodů a velikosti úhlů v prostoru obecné dimenze, máme-li na jeho zaměření k užitku skalární součin.

Popsaná (elementárně-geometrická) zkušenost s operací

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

napovídá, jak zavést vzdálenosti bodů a velikosti úhlů v prostoru obecné dimenze, máme-li na jeho zaměření k užitku skalární součin.

Nejprve zavedeme velikosti a odchylky (nenulových) vektorů

$$|\vec{u}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}, \quad \cos |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{v})| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \, .$$

Popsaná (elementárně-geometrická) zkušenost s operací

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

napovídá, jak zavést vzdálenosti bodů a velikosti úhlů v prostoru obecné dimenze, máme-li na jeho zaměření k užitku skalární součin.

Nejprve zavedeme velikosti a odchylky (nenulových) vektorů

$$|\vec{u}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}, \quad \cos|\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{v})| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\,.$$

To druhé má smysl díky Cauchyově-Schwarzově nerovnosti

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|,$$

jež plyne z axiomů skalárního součinu.

Popsaná (elementárně-geometrická) zkušenost s operací

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

napovídá, jak zavést vzdálenosti bodů a velikosti úhlů v prostoru obecné dimenze, máme-li na jeho zaměření k užitku skalární součin.

Nejprve zavedeme velikosti a odchylky (nenulových) vektorů

$$|\vec{u}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|}, \quad \cos |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{v})| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\,.$$

To druhé má smysl díky Cauchyově-Schwarzově nerovnosti

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|,$$

jež plyne z axiomů skalárního součinu.

Pak přejdeme od prostoru vektorů k prostoru bodů

$$d(A, B) = |AB| \stackrel{\text{def}}{=} |B - A|, \quad |\sphericalangle BAC| \stackrel{\text{def}}{=} |\sphericalangle(B - A, C - A)|.$$

Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

Fyzika: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

Fyzika: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Geometrie – Řešení dvou úkolů:

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

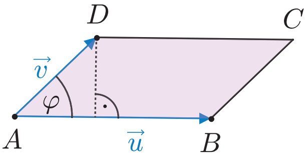
Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

Fyzika: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Geometrie – Řešení dvou úkolů:

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Obsah rovnoběžníku „nad“ danými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$



$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$ (a $S = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$)

Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

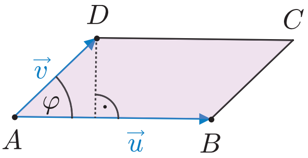
Fyzika: moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Geometrie – Řešení dvou úkolů:

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů

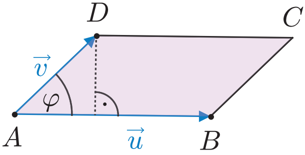
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Obsah rovnoběžníku „nad“ danými vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$



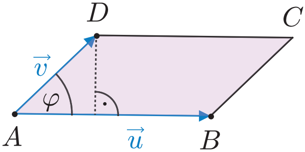
$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi$ (a $S = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$)

Jak hodnotu S počítat?



$$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}} =$$

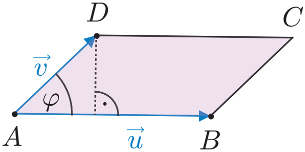
$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$



$$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}} =$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

Můžeme vedle obvyklého skalární součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zavést ještě „druhý skalární“ součin $\vec{u} * \vec{v}$ tak, abychom měli $S = |\vec{u} * \vec{v}|$?



$$S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}} =$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

Můžeme vedle obvyklého skalární součinu $\vec{u} \cdot \vec{v}$ zavést ještě „druhý skalární“ součin $\vec{u} * \vec{v}$ tak, abychom měli $S = |\vec{u} * \vec{v}|$?

To bude jistě zaručeno, pokud bude platit

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \,.$$

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$$

$$\boxed{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$$

Co by takový nový součin měl ještě splňovat (kromě distributivity vzhledem k vektorovému součtu)?

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$$

Co by takový nový součin měl ještě splňovat (kromě distributivity vzhledem k vektorovému součtu)?

Jistě $\vec{u} * \vec{v} = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (případ $S = 0$).

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}$$

Co by takový nový součin měl ještě splňovat (kromě distributivity vzhledem k vektorovému součtu)?

Jistě $\vec{u} * \vec{v} = 0$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (případ $S = 0$).

Tehdy ovšem z rovnosti (s třemi nulovými součiny)

$$(\vec{u} + \vec{v}) * (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} * \vec{u} + \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{u} + \vec{v} * \vec{v}$$

plyne $\vec{v} * \vec{u} = -\vec{u} * \vec{v}$.
Operace $*$ tedy musí být *antikomutativní*!

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u}\cdot\vec{v}$) existuje zobrazení $V\times V\to\mathbb{R}$ s hodnotami značenými $\vec{u}*\vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V\colon\quad \vec{v}*\vec{u}=-\vec{u}*\vec{v}$,

(ii) $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V\colon\quad (\vec{u}+\vec{v})*\vec{w}=\vec{u}*\vec{w}+\vec{v}*\vec{w}$,

(iii) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V,\ \forall t\in\mathbb{R}\colon\quad (t\cdot\vec{u})*\vec{v}=t\cdot(\vec{u}*\vec{v})$,

(iv) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V:\quad (\vec{u}\cdot\vec{v})^2+(\vec{u}*\vec{v})^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\,.$

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u}\cdot\vec{v}$) existuje zobrazení $V\times V\to\mathbb{R}$ s hodnotami značenými $\vec{u}*\vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V: \quad \vec{v}*\vec{u}=-\vec{u}*\vec{v}$,
(ii) $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V: \quad (\vec{u}+\vec{v})*\vec{w}=\vec{u}*\vec{w}+\vec{v}*\vec{w}$,
(iii) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V,\ \forall t\in\mathbb{R}: \quad (t\cdot\vec{u})*\vec{v}=t\cdot(\vec{u}*\vec{v})$,
(iv) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V: \quad (\vec{u}\cdot\vec{v})^2+(\vec{u}*\vec{v})^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$.

Potom $\dim V=2$ a na prostoru $V=\mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $(u_1,u_2)\cdot(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2$ existují jen dvě popsaná zobrazení a jsou dána předpisem

$$(u_1,u_2)*(v_1,v_2)=\pm\big(u_1v_2-u_2v_1\big)=\pm\det\begin{bmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{bmatrix}$$

vždy s jednou volbou znaménka pro všechny hodnoty $*$.

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u} \cdot \vec{v}$) existuje zobrazení $V \times V \to \mathbb{R}$ s hodnotami značenými $\vec{u} * \vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad \vec{v} * \vec{u} = -\vec{u} * \vec{v}$,
(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad (\vec{u} + \vec{v}) * \vec{w} = \vec{u} * \vec{w} + \vec{v} * \vec{w}$,
(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}: \quad (t \cdot \vec{u}) * \vec{v} = t \cdot (\vec{u} * \vec{v})$,
(iv) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} * \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$.

Potom $\dim V = 2$ a na prostoru $V = \mathbb{R}^2$ se skalárním součinem $(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$ existují jen dvě popsaná zobrazení a jsou dána předpisem

$$(u_1, u_2) * (v_1, v_2) = \pm\big(u_1 v_2 - u_2 v_1\big) = \pm \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

vždy s jednou volbou znaménka pro všechny hodnoty $*$.

Poznámka: Kruciální vlastnost (iv) je splněna díky identitě

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 = (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2).$$

Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Úlohu o obsahu rovnoběžníku nad dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsme řešili koncepcí „druhého skalárního“ součinu $\vec{u} * \vec{v}$. Uspěli jsme pouze v eukleidovském prostoru dimenze 2, tedy v rovině, což je pro praktické účely zcela postačující.

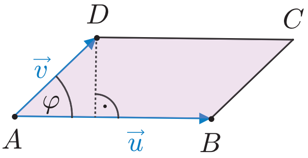
Proč vektory násobíme mezi sebou i jinak?

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

Úlohu o obsahu rovnoběžníku nad dvěma vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsme řešili koncepcí „druhého skalárního“ součinu $\vec{u} * \vec{v}$. Uspěli jsme pouze v eukleidovském prostoru dimenze 2, tedy v rovině, což je pro praktické účely zcela postačující.

Nyní stejnou úlohu spojíme s úlohou (2) a budeme hledat společné řešení obou úloh pomocí nového *vektorového součinu*. (Uspějeme ovšem pouze v eukleidovském prostoru dimenze 3).

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

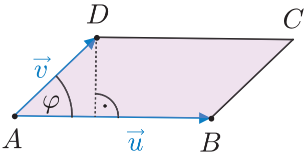


Úloha. K daným dvěma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určete vektor $\vec{w}$, tak aby současně platilo

$$|\vec{w}| = S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$$

(ovšem že $\vec{w} = \vec{o}$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

(1) Vektorové výpočty obsahů a objemů
(2) Určení vektoru kolmého ke dvěma daným vektorům

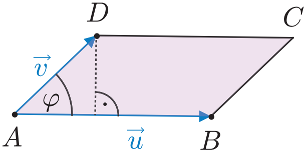


Úloha. K daným dvěma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určete vektor $\vec{w}$, tak aby současně platilo

$$|\vec{w}| = S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \quad \vec{w}\cdot\vec{u} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{w}\cdot\vec{u} = 0$$

(ovšem že $\vec{w} = \vec{o}$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

Lze vektor-řešení $\vec{w}$ najít jako $w = \vec{u} \times \vec{v}$ s novou vektorovou operací $\times$, jež je distributivní vzhledem k vektorovému sčítání?



Úloha. K daným dvěma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ určete vektor $\vec{w}$, tak aby současně platilo

$$|\vec{w}| = S = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi, \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{a} \quad \vec{w} \cdot \vec{u} = 0$$

(ovšem že $\vec{w} = \vec{o}$ pro lineárně závislé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$).

Lze vektor-řešení $\vec{w}$ najít jako $w = \vec{u} \times \vec{v}$ s novou vektorovou operací $\times$, jež je distributivní vzhledem k vektorovému sčítání?

Je jasné, že $|\vec{u} \times \vec{v}| = S \;\Leftrightarrow\; (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$
a že operace $\times$ musí být antisymetrická: $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$.

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u} \cdot \vec{v}$) existuje zobrazení $V \times V \to V$ s hodnotami značenými $\vec{u} \times \vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \quad \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : \quad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R} : \quad (t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \quad (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$.

Věta. Předpokládejme, že na vektorovém prostoru V se skalárním součinem (o hodnotách značených $\vec{u} \cdot \vec{v}$) existuje zobrazení $V \times V \to V$ s hodnotami značenými $\vec{u} \times \vec{v}$, jež splňuje podmínky:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad \vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$,
(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$,
(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbb{R}: \quad (t \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = t \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$,
(iv) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,
(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$.

Potom $\dim V = 3$ a na prostoru $V = \mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $(u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ existují jen dvě popsaná zobrazení a jsou dána předpisem

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \pm \det \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{e}}_1 & \vec{\mathrm{e}}_2 & \vec{\mathrm{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

kde $\vec{\mathrm{e}}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{\mathrm{e}}_2 = (0, 1, 0)$ a $\vec{\mathrm{e}}_3 = (0, 0, 1)$.

Poznámka: Podmínka $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$ je splněna díky méně zřejmé identitě

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 =$$
$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2.$$

Co je smíšený součin tří vektorů?

Dosud jsme neposoudili otázku vektorových výpočtů objemů. Kvůli nim zavedeme následující pojem.

Co je smíšený součin tří vektorů?

Dosud jsme neposoudili otázku vektorových výpočtů objemů. Kvůli nim zavedeme následující pojem.

Definice. Smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je číslo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w},$$

kde $\times$ a $\cdot$ značí vektorový, resp. skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru V.

Co je smíšený součin tří vektorů?

Dosud jsme neposoudili otázku vektorových výpočtů objemů. Kvůli nim zavedeme následující pojem.

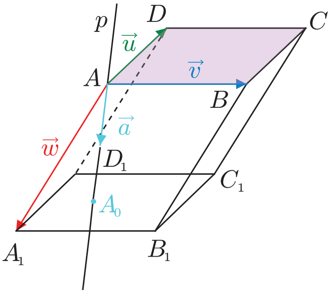
Definice. Smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je číslo

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w},$$

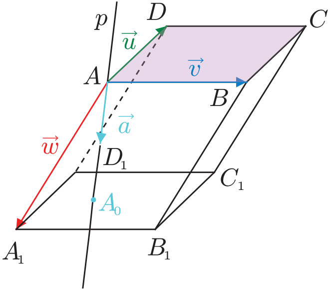
kde $\times$ a $\cdot$ značí vektorový, resp. skalární součin v trojrozměrném eukleidovském prostoru V.

Význam takového součinu teď objasníme.

Objem rovnoběžnostěnu „nad“ danými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$

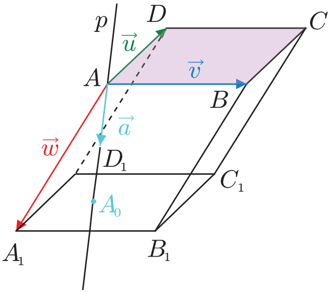


Objem rovnoběžnostěnu „nad“ danými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$



Věta. Objem takového rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě z čísla $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w}$, tedy ze smíšeného součinu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Objem rovnoběžnostěnu „nad“ danými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$



Věta. Objem takového rovnoběžnostěnu je roven absolutní hodnotě z čísla $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \overrightarrow{w}$, tedy ze smíšeného součinu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

Důkaz:

$$|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{w}| = S_{ABCD}\cdot|AA_1|\cdot|\cos\sphericalangle(\vec{a},\overrightarrow{w})| = S_{ABCD}\cdot|AA_0| = V$$

7 VEKTOROVÁ ALGEBRA V PŘÍKLADECH

„Algebraickou gramotnost“ žáků chápeme jako jejich dovednost pracovat s algebraickými výrazy, v nichž různá písmena zastupují výlučně číselné konstanty či proměnné skalární veličiny. Na počítání s vektorovými výrazy se ve škole nedostává času …

7 VEKTOROVÁ ALGEBRA V PŘÍKLADECH

„Algebraickou gramotnost“ žáků chápeme jako jejich dovednost pracovat s algebraickými výrazy, v nichž různá písmena zastupují výlučně číselné konstanty či proměnné skalární veličiny. Na počítání s vektorovými výrazy se ve škole nedostává času …

Při řešení příkladů, v nichž chceme uplatnit vektory, je často důležité vhodně zvolit označení $\left[\vec{u}, \overrightarrow{AB} \text{ či } B-A\,?\right]$.

7 VEKTOROVÁ ALGEBRA V PŘÍKLADECH

„Algebraickou gramotnost“ žáků chápeme jako jejich dovednost pracovat s algebraickými výrazy, v nichž různá písmena zastupují výlučně číselné konstanty či proměnné skalární veličiny. Na počítání s vektorovými výrazy se ve škole nedostává času ...

Při řešení příkladů, v nichž chceme uplatnit vektory, je často důležité vhodně zvolit označení $\left[\,\vec{u},\ \overrightarrow{AB}\ \text{či}\ B-A\,?\right]$.

Užitečný kalkulus lineárních kombinací bodů $A_1, A_2, \ldots, A_k$ s koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_k$, tedy výrazů

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k,$$

které považujeme za body či vektory, podle toho, zda součet $s = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ se rovná jedné nebo nule.