Tucet užití vektorů v geometrii

Příklad 1

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany AB a CD nejsou rovnoběžné, označíme E střed strany AB a F střed strany CD. Dokažte, že středy úseček AF, CE, BF, DE jsou vrcholy rovnoběžníku. (2.2.1)

Příklad 2

V šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 po řadě těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Dokažte, že vzniklý šestiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ má každé dvě protilehlé strany rovnoběžné a stejně dlouhé. (2.2.8)

Příklad 3

Nechť A, B, C, D jsou čtyři nekomplanární body v prostoru. Najděte množinu středů všech rovnoběžníků, jejichž vrcholy leží postupně na úsečkách AB, BC, CD, DA. (2.2.34)

Příklad 4

V prostoru jsou dány dva pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E$ a $A_2B_2C_2D_2E$ se společným vrcholem E, které neleží v téže rovině. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 jsou rovnoběžné s některou rovinou. (2.2.37)

Příklad 5

Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Dokažte. (3.1.7)

Příklad 6

Dokažte Thaletovu větu: *Je-li bod O střed úsečky AB o délce $2r$, pak pro každý bod X různý od bodů A, B je úhel AXB pravý právě tehdy, když $|OX| = r$.* (3.1.13)

Příklad 7

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB a CD jsou shodné. Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy stran AD a BC. (3.2.44)

Příklad 8

V prostoru jsou dány tři různé polopřímky OA, OB, OC se stejným počátkem O, přičemž žádné dvě z nich nejsou navzájem opačné. Ukažte, že všechny tři úhly tvořené osami úhlů AOB, BOC a COA jsou buď ostré, nebo tupé, nebo pravé. (3.2.45)

Příklad 9

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X, při kterém je minimální hodnota součtu

$$S = |AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|\,. \qquad (3.2.49)$$

Příklad 10

Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů obecného trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}\,. \qquad (3.2.51)$$

Příklad 11

Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník. Označme M, N, P, Q, R po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA. Dokažte, že pokud se úsečky AP, BQ, CR a DM protínají v jednom bodě, pak tento bod leží také na úsečce EN. (4.2.1)

Příklad 12

Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah. (4.2.7)