

Leonhard Euler trochu jinak ...

Jiří Veselý

Seminář "O filozofických otázkách matematiky a fyziky",
(23. srpna 2012)

Leonhard Euler r. 1756



(15.4.1707–18.9.1783)

1707	narozen v Basileji
1720	Universita v Basileji (13 let)
1726	ukončil studia matematiky
1727	Petrohrad
1741	Berlín
1766	Petrohrad (zpět)
1783	umírá

**vzděláván doma, otec evangelický pastor
vzdělaný i v matematice**

1720 vstup na Univerzitu v Basileji (13 let)

1723 ukončil přípravná studia (filosofie), Mgr.

1726-27 první matematické práce

1727 příjezd do Petrohradu

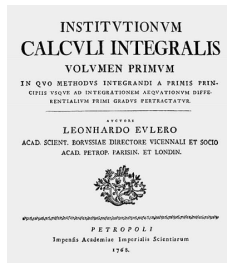
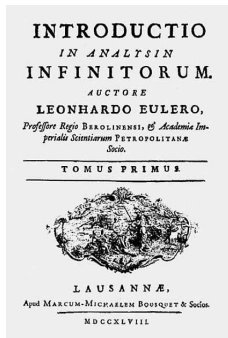
Přispěl významně k rozvoji mnoha oborů :

- matematika, aplikovaná matematika
- fyzika
- astronomie
- filosofie
- teologie
- balistika
- stavba lodí
- geografie
- teorie hudby

Přispěl významně k rozvoji mnoha oborů :

- matematika, aplikovaná matematika
- fyzika
- astronomie
- filosofie
- teologie
- balistika
- stavba lodí
- **geografie**
- **teorie hudby**

Matemtická analýza



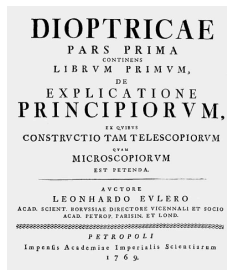
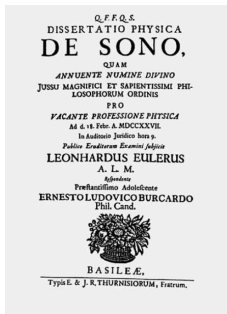
[E101], 1748

[E342], 1762

[E366], 1769

[E385], 1770

Disertace (o zvuku), Optika

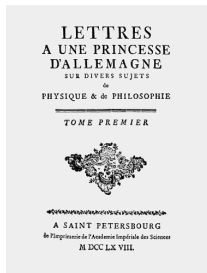


[E002], 1727

[E363], 1765, (1768)

[E844], 1862 (1765?)

Pell-mell, Algebra



[E343], 1768

[E344], 1768

[E417], 1772

[E387], 1770

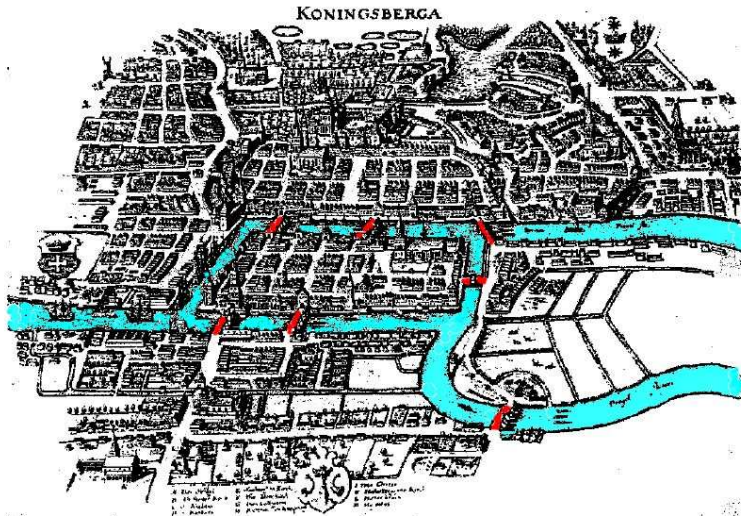
[E388], 1770

Problém mostů v Königsbergu :

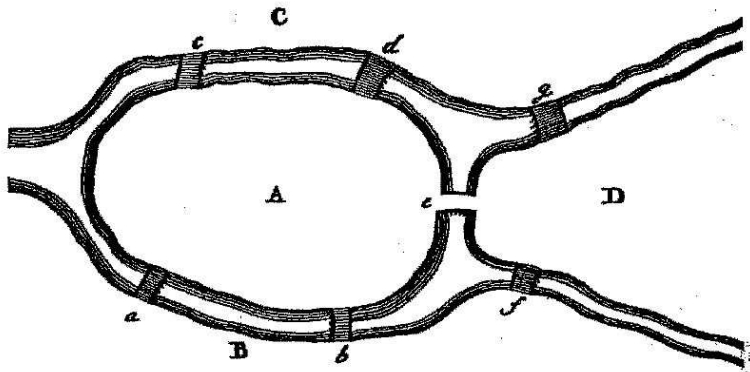
SOLVTIO PROBLĚMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonb. Eulero.

[E053], 1741 (1735)

Königsberg (Kaliningrad, Královec)



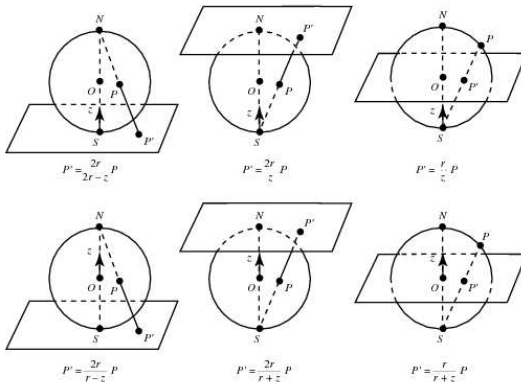
Královecké mosty



Euler a mapy

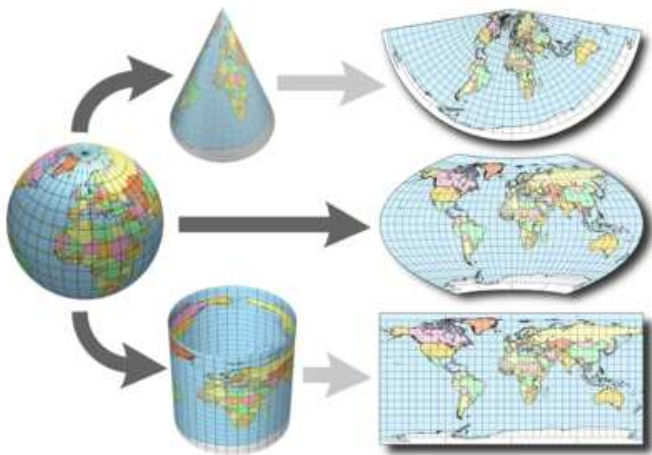
Trocha historie :

Projekce – Starý Egypt (?) :

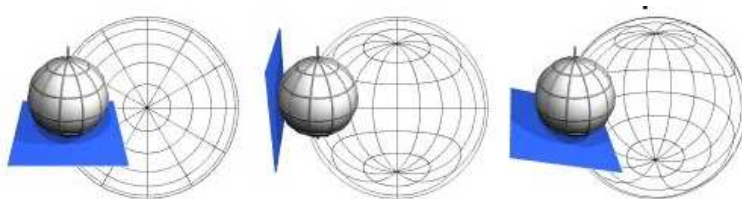


Pozitivně: Claudius Ptolemaios (c. 90 – c. 168)
(v souvislosti s astronomií)

Principy mapových projekcí:

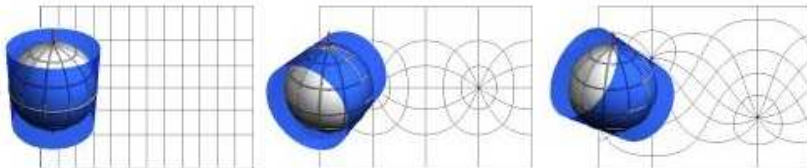


Principy mapových projekcí :



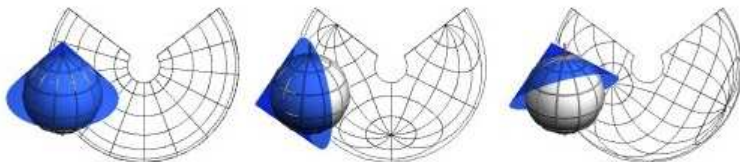
na tangenciální rovinu

Principy mapových projekcí :



na tangenciální válcovou plochu :

Principy mapových projekcí :



na tangenciální kuželovou plochu

Principy mapových projekcí :



**umístění bodu(-ů), ze kterého promítáme,
obecnější poloha než „tečná“**

Nejstarší mapy Čech :

Klaudyán (1518), Criginger (1568), Aretino (1619), Vogt (1712), Müller (1720) – první měřená, dodnes největší mapa nakreslená jednotlivcem (20 desek)

Nejstarší mapy Ruska (cizí) :

např. : Ortelius (1602), Merian (1640), Mercator (1548), **Kirilov** (1734), Hasius (1739)

Nejstarší mapy Čech :

Klaudyán (1518), Criginger (1568), Aretino (1619), Vogt (1712), Müller (1720) – první měřená, dodnes největší mapa nakreslená jednotlivcem (20 desek)

Nejstarší mapy Ruska (cizí) :

např. : Ortelius (1602), Merian (1640), Mercator (1548), **Kirilov** (1734), Hasius (1739)

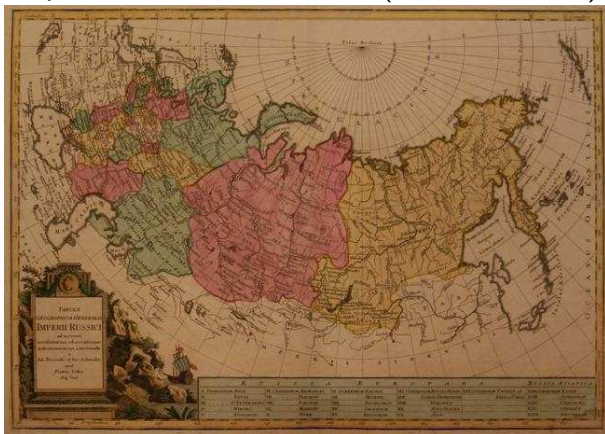
Ivan Kirilovič Kirilov (1689 – 1737)

**Projekt atlasu o 360 mapách, pouze torzo
(cca 10 map, je to první mapa ruského původu z r. 1734)
"Atlas Vserossiskoj imperii"**



Johann Matthias Hasius (1684 – 1742)

Imperii Russici et Tatariae ... (Norimberk 1739)



Johann Matthias Hasius

Imperii Russici et Tatariae ... (Norimberg 1739)



Petr I. Veliký (1672–1725):

Cesta do Evropy 1697-8 (18 měsíců)
Amsterdam, Londýn, Paříž, Vídeň, ...

Henry Farquharson (1675–1739)

Škola matematiky a navigace (Moskva)



Guillaume Delisle (1675 – 1726)

Paříž 1717, setkání
s **Guillaume de L'Isle (1675 – 1726)**
první královský geograf,
známý tvůrce mnoho map,
mj. roku 1700 vytvořil mapu Asie

doporučení bratra na
zamýšlené práce



Guillaume Delisle (1675 – 1726):

Guillaume Delisle, Asie (1700)



R. 1725 pozval Petr I. z Francie
jeho bratra

Joseph-Nicolas Delisle (1688 – 1768)

(spolu s bratrem

Louis Delisle de la Croyere (1687 – 1741))



Plán :

triangulace (tvar země), poloha velkých měst,
mapa Ruska (dohoda o zdrojích)

s Eulerem 1735-65 (43 dopisů)

R. 1725 pozval Petr I. z Francie
jeho bratra

Joseph-Nicolas Delisle (1688 – 1768)

(spolu s bratrem

Louis Delisle de la Croyere (1687 – 1741))



Plán :

triangulace (tvar země), poloha velkých měst,
mapa Ruska (dohoda o zdrojích)

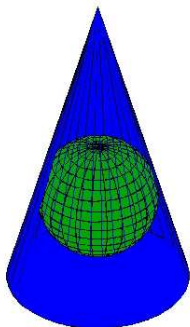
s Eulerem 1735-65 (43 dopisů)

(pobyt v Rusku 1726 – 1747, triangulace, . . . ,
potíže s financováním)

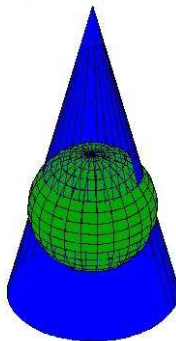
plánován velký atlas (> 30 map) – nedošlo k dohodě
o zdrojích,

1745 – Ruská akademie věd – „*Atlas Rossijskoj*“ 31 map
Euler vedl od r. 1739 Oddělení geografie

„projekce na kužel“ – tečný a sečný případ

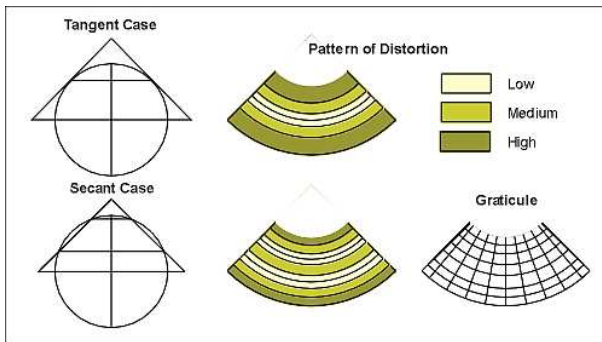


Conical Projection Surface



Secant Conic Projection

Znázornění chyb:



**Atlas geographicus omnes orbis terrarum regiones
in XLI tabulis (1753) – školní atlas
mědirytiny : Nicolaus Friedrich Sauerbrey, latina a němčina,
Johann Christoph Rhode (1713-1786), geograf**

(1760) 2. vydání, 44 map, latina, němčina a francouzština

(1777) 3. vydání

**(nedat) 4. vydání, modernizované (cca r. 1783)
Eulerova předmluva, jméno neuvedeno**

geomagnetismus – speciální mapa

Amerika



Evropa



Evropa – detail



Evropa – detail



Bylo známo, že

válcová projekce je konformním zobrazením :

1541 Gerhard Mercator (graficky),

1569 (mapa – aplikace),

stereografická projekce je konformní :

Edmund Halley publikoval,

1614 Thomas Harriot (rukopis)

Euler po návratu do Ruska :

Euler dokázal :

„perfektní“ mapová projekce neexistuje

Tři podmínky :

Zachovávání úhlů (konformnost)

Zachování obsahů („plochojevnost“)

*„poledníky“ a „rovnoběžky“ se zobrazí na systémy
vzájemně ortogonálních přímek
(jako u válcové projekce)*

*Podmínky vyjádřeny analyticky ve formě diferenciálních
rovnic*

Euler po návratu do Ruska :

Euler dokázal :

„perfektní“ mapová projekce neexistuje

Tři podmínky :

Zachovávání úhlů (konformnost)

Zachování obsahů („plochojevnost“)

*„poledníky“ a „rovnoběžky“ se zobrazí na systémy
vzájemně ortogonálních přímek
(jako u válcové projekce)*

*Podmínky vyjádřeny analyticky ve formě diferenciálních
rovníc*

Euler po návratu do Ruska :

Euler dokázal :

„perfektní“ mapová projekce neexistuje

Tři podmínky :

Zachovávání úhlů (konformnost)

Zachování obsahů („plochojevnost“)

*„poledníky“ a „rovnoběžky“ se zobrazí na systémy
vzájemně ortogonálních přímek
(jako u válcové projekce)*

**Podmínky vyjádřeny analyticky ve formě diferenciálních
rovnic**

Návrat k mapám (1778 a,b,c):

[E490] *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*

[E491] *De proiectione geographica superficiei sphaericae*

[E492] *De proiectione geographica Delislana in
mappa generali Imperii Russici usitata*

neboli

[E490] *O reprezentaci sférické plochy v rovině*

[E491] *O geografické projekci sférické plochy*

[E492] *O Delisleově geografické projekci a jejím použití pro
celkovou mapu Ruského Impéria*

Návrat k mapám (1778 a,b,c):

- [E490] *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*
- [E491] *De proiectione geographica superficiei sphaericae*
- [E492] *De proiectione geographica Delislana in
mappa generali Imperii Russici usitata*

neboli

- [E490] *O reprezentaci sférické plochy v rovině*
- [E491] *O geografické projekci sférické plochy*
- [E492] *O Delisleově geografické projekci a jejím použití pro
celkovou mapu Ruského Impéria*

Hlavička první práce :

DE
REPRÆSENTATIONE
SVPERFICIEI SPHAERICAE
SVPER PLANO.

Auctore
L. E V L E R O.

[E490]-[E492] :
práce napsány 1775, do tisku 1777,
vyšly v Acta Academiae Scientiarum
Imperialis Petropolitinae 1778
str. 107-132, 133-142, 143-153



**Euler analyzoval lokální i globální přesnost
„delisovské kuželové projekce“ v [E492]**

Sečný případ s optimální volbou rovnoběžek

$43^{\circ} 59' 20''$ a $65^{\circ} 4' 11''$

Chyba jeho mapy ? Dosažená přesnost

cca 1 versta ($\approx 1067\text{m}$)/stupeň zeměpisné šířky

**Euler analyzoval lokální i globální přesnost
„delisovské kuželové projekce“ v [E492]**

**Sečný případ s optimální volbou rovnoběžek
 $43^{\circ} 59' 20''$ a $65^{\circ} 4' 11''$**

Chyba jeho mapy ? Dosažená přesnost

cca 1 versta (=1067m)/stupeň zeměpisné šířky

**Euler analyzoval lokální i globální přesnost
„delisovské kuželové projekce“ v [E492]**

**Sečný případ s optimální volbou rovnoběžek
 $43^{\circ} 59' 20''$ a $65^{\circ} 4' 11''$**

Chyba jeho mapy ? Dosažená přesnost

cca 1 versta (=1067m)/stupeň zeměpisné šířky

Euler a hudba

Atributy matematiky: *abstraktní, racionální, chladná, nemá duši, vzdálená od reality, má vnitřní řád hudbě vzdálený*

Atributy hudby: *živá, plná emocí a citů, prostupuje denní život, nesporně obsahuje matematické aspekty*

Dnes akceptovaný názor o souvislosti lze dokumentovat, těžko lze vyčerpávajícím způsobem postihnout – dva citáty

Atributy matematiky : *abstraktní, racionální, chladná, nemá duši, vzdálená od reality, má vnitřní řád hudbě vzdálený*

Atributy hudby : *živá, plná emocí a citů, prostupuje denní život, nesporně obsahuje matematické aspekty*

Dnes akceptovaný názor o souvislosti lze dokumentovat, těžko lze vyčerpávajícím způsobem postihnout – dva citáty

Atributy matematiky : *abstraktní, racionální, chladná, nemá duši, vzdálená od reality, má vnitřní řád hudbě vzdálený*

Atributy hudby : *živá, plná emocí a citů, prostupuje denní život, nesporně obsahuje matematické aspekty*

Dnes akceptovaný názor o souvislosti lze dokumentovat, těžko lze vyčerpávajícím způsobem postihnout – dva citáty

Leibniz (1734) :

*Hudba je vnímané počítání u něhož
si neuvědomujete, že počítáte.*



Rameau (1722) :

Musím přiznat, že teprve pomocí matematiky se staly moje myšlenky srozumitelné.



S čím pracujeme :

- zvuk → tón
- tóny → intervaly
→ stupnice
→ akordy

tón : Intenzita, výška, trvání (délka), zbarvení

S čím pracujeme :

- zvuk → tón
- tóny → intervaly
→ stupnice
→ akordy

tón : Intenzita, **výška**, trvání (délka), zbarvení
– **fyzikální pozadí**

Akceptace dvojic tónů :

Historie :

konsonance (souzvuk, souznění) a disonance (nelibozvuk)
– fyzikální pozadí, frekvence

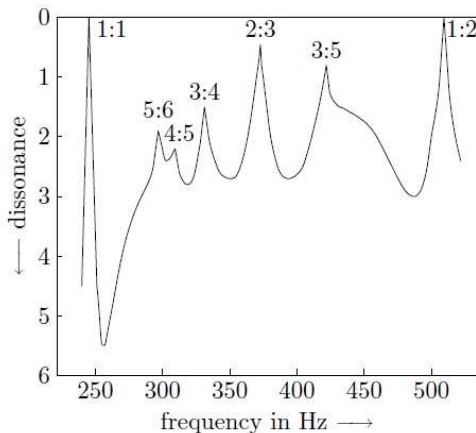
Obecně : *Souzvuk dvou tónů je konsonantní, jsou-li jejich frekvence ve správném poměru*

Využití tohoto principu bylo v různých dobách a v různých civilizacích/společenstvích různé

Příklady (intervalů) :

Konsonance a disonance :

Oktáva	1 : 2
Kvinta	2 : 3
Malá tercie	5 : 6
Velká tercie	4 : 5
Kvarta	3 : 4
Velká sexta	3 : 5
...	



**Je jich opravdu mnoho ! – proto jen ukázka
pytagorejská stupnice :**

	prima	sekunda	tercie	kvarta	kvinta	sexta	septima	oktáva
C dur	C – C	C – D	C – E	C – F	C – G	C – A	C – H	C – C

Odpovídající poměry frekvencí :

1:1 9:8 81:64 4:3 3:2 27:16 243:128 2:1

generování pomocí kvinty (poměry 1:1 a 2:1 triviální)

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad (\text{G})$$

$$\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) : 2 = \frac{9}{8} \quad (\text{D})$$

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16} \quad (\text{A})$$

$$\left(\frac{27}{16} \cdot \frac{3}{2}\right) : 2 = \frac{81}{64} \quad (\text{E})$$

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{243}{128} \quad (\text{H})$$

Pozor : $2 \times \text{půlton} \neq (\text{celý}) \text{ tón}$

dvanáctitónová stupnice :

Tón	Poměr frekvencí k předchozímu tónu	Poměr frekvencí k základnímu tónu	Kvocient
c	16 : 15	1 : 1	1
des	16 : 15	16 : 15	1,0666...
d	135 : 128	9 : 8	1,125
es	16 : 15	6 : 5	1,2
e	25 : 24	5 : 4	1,25
f	16 : 15	4 : 3	1,333...
fis	135 : 128	45 : 32	1,40625
g	16 : 15	3 : 2	1,5
as	16 : 15	8 : 5	1,6
a	25 : 24	5 : 3	1,666...
b	16 : 15	16 : 9	1,777...
h	135 : 128	15 : 8	1,875
c	16 : 15	2 : 1	2

Celoživotní zájem („od dizertace“)

- [E033] *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*
- [E303] *Tentamen de sono campanarum*
- [E314] *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement recues dans la musique*
- [E457] *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis*

*Exposition de quelques nouvelles vues mathématiques
dans la théorie de la musique,
Amsterdam, 1760*

- [E033] *Pokus o novou teorii hudby, vyložený co nejsrozumitelněji v souladu s elementárními principy harmonie*
- [E303] *Pokus o vysvětlení zvuku zvonů*
- [E314] *Domněnka o důvodu proč jsou posunuté tóny obecně součástí hudby*
- [E457] *Základní principy harmonie v zrcadle hudby*

Leibniz :

V hudbě počítáme jen do pěti tak jako lidé, jejichž aritmetika končí u tří ... Kdybychom byli důvtipnější, mohli bychom pokračovat k číslu sedm (1734)

Euler :

Protože je na jedné straně těžké určit hranici mezi konsonancí a disonancí, a také na druhé straně proto, že je to v souladu s naším postupem (...), budeme nazývat konsonance [souzvuk] jakýkoli zvuk vyvolaný současným zněním několika tónů (1739)

Leibniz :

V hudbě počítáme jen do pěti tak jako lidé, jejichž aritmetika končí u tří ... Kdybychom byli důvtipnější, mohli bychom pokračovat k číslu sedm (1734)

Euler :

Protože je na jedné straně těžké určit hranici mezi konsonancí a disonancí, a také na druhé straně proto, že je to v souladu s naším postupem (...), budeme nazývat konsonance [souzvuk] jakýkoli zvuk vyvolaný současným zněním několika tónů (1739)

Definice (funkce) stupně akceptace $d(n)$ (na \mathbb{N}) :

Má-li $n \in \mathbb{N}$ prvočíselný rozklad

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

položíme $d(1) = 1$ a dále

$$d(n) = \alpha_1(p_1 - 1) + \alpha_2(p_2 - 1) + \cdots + \alpha_m(p_m - 1) + 1.$$

Pro intervaly dává výsledky shodné s tehdy soudobou zkušeností

Definice stupně akceptace $d(r)$ (pro $r = p/q$) :

$$d(r) = d(NSN(p, q)) .$$

Tak např. pro (velkou) tercii (poměr 5:4) dostaneme

$$NCM(4, 5) = 20, \quad d(20) = 2(2 - 1) + 1(5 - 1) + 1 = 7 .$$

Podobně lze pracovat s akordy : Frekvence odpovídající akordu c-e-h jsou v poměru 8:10:15 ,

$$NSN(8, 10, 15) = 120, \\ d(120) = 3(2 - 1) + (3 - 1) + (5 - 1) + 1 = 10 .$$

Je tu však „**ALE**“ :

(a) Pro prvočíslo p je $d(p) = 1 \cdot (p - 1) + 1 = p$, tedy $d(5) = 5$,

$$12 = 2^2 \cdot 3^1, \quad \text{tedy} \quad d(5) = 2(2 - 1) + 1(3 - 1) = 5,$$

takže funkce d není prostá !

(b) Interval c-h a akordy c-e-h, c-g-h, c-e-g-h by měly stejnou konsonanci, totéž platí pro

g-h-d-f a také g-a-h-c-d-e-f

(stupeň akceptance = 17)

(c) Ignoruje inverze a opakování

(a) Rozlišuje oktávy :

$$d(1,1) = 1, \quad d(2,1) = 2, \quad d(4,1) = 2(2 - 1) + 1 = 3.$$

(b) Nejsou vyloučena žádná čísla - vyrovnává se septakordy

Euler :

Tyto důvody nás opravňují k přístupu k prvočíslu 7 a také vysvětlují oblibu septakordů (...) a z toho důvodu lze s ohledem na zesnulého pana Leibnize říci, že hudba se tak naučila nyní počítat do sedmi

Euler byl hluboce přesvědčen o schopnostech matematiky řešit problémy. Případnou nedostatečnost přičítal tehdy málo rozvinuté teorii.

Eduard Fueter (1941) :

For where mathematical reason did not suffice, for Euler began the kingdom of God

**Děkuji Vám za laskavé přijetí
přednášky**