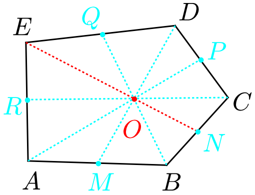
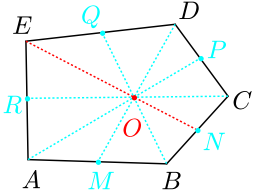
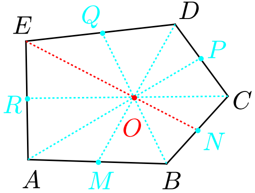
Příklad 11

V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ značí M, N, P, Q, R po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA. Dokažte, že pokud se úsečky AP, BQ, CR a DM protínají v jednom bodě, pak tento bod leží také na úsečce EN.





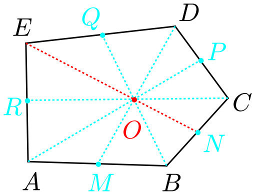
O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.



O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$.

$$\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{p} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{q} = \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{r} = \frac{\vec{a}+\vec{e}}{2}.$$



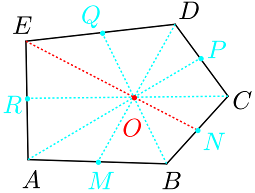
O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$.

$$\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{p} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{q} = \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{r} = \frac{\vec{a}+\vec{e}}{2}.$$

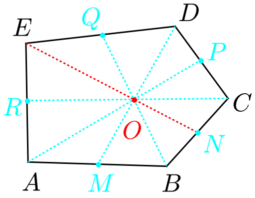
A, P a O jsou kolineární $\quad\Rightarrow$

$$\vec{o} = \vec{p}\times\vec{a} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\times\vec{a} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}+\vec{d}\times\vec{a}}{2} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\times\vec{c} = \vec{d}\times\vec{a}$$



O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.

$$
\begin{aligned}
A,\ P,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}\times\vec{a},\\
B,\ Q,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{d}=\vec{e}\times\vec{b},\\
C,\ R,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{c}\times\vec{e}=\vec{a}\times\vec{c},\\
D,\ M,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{d}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{d}.
\end{aligned}
$$



O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.

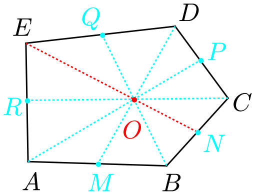
$$A,\ P,\ O \text{ jsou kolineární} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{c} = \vec{d}\times\vec{a},$$

$$B,\ Q,\ O \text{ jsou kolineární} \quad \Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{d} = \vec{e}\times\vec{b},$$

$$C,\ R,\ O \text{ jsou kolineární} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\times\vec{e} = \vec{a}\times\vec{c},$$

$$D,\ M,\ O \text{ jsou kolineární} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{d}.$$

Dohromady $\quad \vec{e}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{d} = \vec{d}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{e}.$



O – společný bod úseček AP, BQ, CR a DM.

$$\begin{aligned}
A,\ P,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}\times\vec{a},\\
B,\ Q,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{d}=\vec{e}\times\vec{b},\\
C,\ R,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{c}\times\vec{e}=\vec{a}\times\vec{c},\\
D,\ M,\ O \text{ jsou kolineární} \quad &\Rightarrow \quad \vec{d}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{d}.
\end{aligned}$$

Dohromady $\quad \vec{e}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{d}=\vec{d}\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{e}.$

$\vec{o}=\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})=2\cdot\vec{e}\times\vec{n} \quad \Rightarrow \quad E, N, O$ jsou kolineární. $\quad\Box$