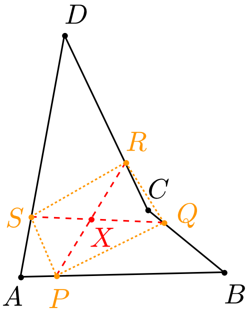
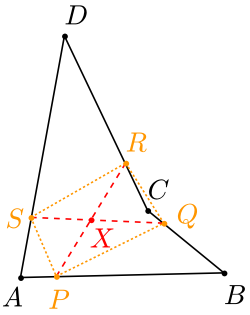
Příklad 3

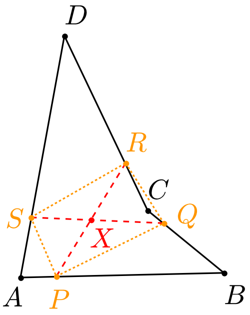
Nechť A, B, C, D jsou čtyři *nekomplanární* body v prostoru. Najděte množinu středů všech rovnoběžníků, jejichž vrcholy leží postupně na úsečkách AB, BC, CD, DA.





$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1 \rangle)$$

$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1 \rangle)$$



$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1\rangle)$$
$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1\rangle)$$

$$PQRS \text{ je rovnoběžník} \quad \Leftrightarrow \quad X = \tfrac{1}{2}(P+R) = \tfrac{1}{2}(Q+S)$$

$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1\rangle)$$
$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1\rangle)$$

$PQRS$ je rovnoběžník $\quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2}(P+R) = \frac{1}{2}(Q+S)$

$$\frac{1}{2}(tA+(1-t)B+vC+(1-v)D) = \frac{1}{2}(uB+(1-u)C+wD+(1-w)A)$$

$$P = tA + (1-t)B, \quad Q = uB + (1-u)C, \qquad (t, u \in \langle 0, 1 \rangle)$$
$$R = vC + (1-v)D, \quad S = wD + (1-w)A \qquad (v, w \in \langle 0, 1 \rangle)$$

$PQRS$ je rovnoběžník $\quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{1}{2}(P + R) = \frac{1}{2}(Q + S)$

$$\frac{1}{2}(tA+(1-t)B+vC+(1-v)D) = \frac{1}{2}(uB+(1-u)C+wD+(1-w)A)$$

Odtud díky nekomplanárnosti bodů A, B, C, D plyne

$$t = 1 - w, \quad 1 - t = u, \quad v = 1 - u, \quad 1 - v = w.$$

$$\begin{aligned} P &= tA + (1-t)B, & Q &= uB + (1-u)C, & (t, u \in \langle 0, 1\rangle) \\ R &= vC + (1-v)D, & S &= wD + (1-w)A & (v, w \in \langle 0, 1\rangle) \end{aligned}$$

$PQRS$ je rovnoběžník $\quad\Leftrightarrow\quad X = \frac{1}{2}(P+R) = \frac{1}{2}(Q+S)$

$$\frac{1}{2}(tA+(1-t)B+vC+(1-v)D) = \frac{1}{2}(uB+(1-u)C+wD+(1-w)A)$$

Odtud díky nekomplanárnosti bodů A, B, C, D plyne

$$t = 1-w, \quad 1-t = u, \quad v = 1-u, \quad 1-v = w.$$

Řešením je $u = w = 1-t$ a $v = t$, takže hledané středy X jsou

$$X = \frac{1}{2}(tA+(1-t)B+tC+(1-t)D) = t\cdot\frac{A+C}{2} + (1-t)\cdot\frac{B+D}{2},$$

což je pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ rovnice jisté úsečky. $\quad\square$