Příklady z disertace Jarmily Elbelové „Vektorové metody v eukleidovské geometrii“

2 Výpočty afinních vztahů

V této kapitole nejsou příklady roztříděny do menších skupin, nýbrž jsou seřazeny ve dvou celcích (podkapitolách 2.1 a 2.2) podle složitosti námětů a s ohledem na hloubku uplatnění vektorové metody potřebné k jejich řešení. Přesto je možné i zde najít několik skupin tématicky příbuzných úloh, které nyní přehledně vymezíme výčtem jejich pořadových čísel.

- Důkazy rovnoběžnosti: 2.1.1, 2.1.4, 2.1.5, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.15, 2.2.24, 2.2.25, 2.2.29, 2.2.30, 2.2.37, 2.2.40.
- Důkazy kolinearity nebo komplanárnosti: 2.1.9 část 1, 2.2.18, 2.2.35, 2.2.38.
- Důkazy incidence přímek[1]: 2.1.2, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9 část 2, 2.2.6, 2.2.23.
- Výpočty dělících poměrů: 2.1.2, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9, 2.1.10, 2.2.15, 2.2.20, 2.2.21, 2.2.22, 2.2.26, 2.2.27, 2.2.28, 2.2.31, 2.2.32, 2.2.33.
- Srovnání délek rovnoběžných úseček: 2.1.1, 2.2.2, 2.2.15, 2.2.32.
- Středová souměrnost a stejnolehlost: 2.2.3, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.9, 2.2.19, 2.2.36.
- O těžnicích a těžišti trojúhelníku: 2.1.2, 2.1.3, 2.1.8, 2.2.12, 2.2.38, 2.2.41.
- O splynutí těžišť dvou trojúhelníků: 2.2.14, 2.2.16, 2.2.17, 2.2.28, 2.2.29.
- O těžištích mnoha trojúhelníků: 2.2.8, 2.2.9, 2.2.36.

2.1 Příklady teoretického významu

2.1.1

Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se stranou trojúhelníku, jejímž středem neprochází, a má ve srovnání s ní poloviční délku. Dokažte. (Střední příčkou rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy středy dvou stran trojúhelníku.)

2.1.2

Těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě, který nazýváme těžiště daného trojúhelníku. Těžiště dělí každou těžnici v poměru 1 : 2 (počítáno od strany trojúhelníku). Dokažte obě tvrzení. (Těžnicí rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy vrchol trojúhelníku se středem protější strany.)

2.1.3

Dokažte, že pro těžnice AA_0, BB_0, CC_0 obecného trojúhelníku ABC platí vektorová rovnost $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} = \vec{o}$.

2.1.4

Středy stran každého (ať už rovinného či prostorového) čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku. Dokažte. (Jde o tzv. *Varignonův rovnoběžník* daného čtyřúhelníku.)

2.1.5

V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ označme M střed strany BC a N střed strany AD. Dokažte, že tři následující podmínky

$$MN \parallel AB\,, \quad MN \parallel CD \quad \text{a} \quad AB \parallel CD$$

jsou navzájem ekvivalentní.

[1] Tímto termínem zde označujeme situaci, kdy tři nebo více daných přímek prochází jedním bodem.

Z uvedeného tvrzení plyne známý poznatek o střední příčce lichoběžníku: *Spojnice středů ramen libovolného lichoběžníku je rovnoběžná s jeho základnami a její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.* Stačí si totiž uvědomit, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD jsou vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ souhlasně rovnoběžné a vektor $\overrightarrow{MN}$ je podle výsledku příkladu jejich „aritmetickým průměrem".

2.1.6

Těžnice čtyřstěnu se protínají v jediném bodě, kterému říkáme těžiště daného čtyřstěnu. Toto těžiště dělí každou těžnici v poměru $1 : 3$ (počítáno od stěny čtyřstěnu). Dokažte obě tvrzení. (Těžnicí rozumíme každou ze čtyř úseček spojujících vždy vrchol čtyřstěnu s těžištěm protější stěny.)

2.1.7

Dokažte, že těžiště čtyřstěnu je středem úsečky, která spojuje středy libovolných dvou jeho protilehlých hran.

2.1.8

Uvnitř stran BC, CA a AB libovolného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1 a C_1 tak, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí jedním bodem, který označíme O. Podmínka, že body A_1, B_1, C_1 jsou středy příslušných stran, neboli že bod O je těžištěm trojúhelníku ABC, je ekvivalentní s každou z vektorových rovností

(1) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{o}$,
(2) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{o}$,
(3) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{o}$.

Dokažte.

2.1.9

Je dán trojúhelník ABC. Označme K, L, M libovolné body, které leží po řadě na přímkách AB, BC, CA a které jsou různé od vrcholů A, B, C. Dokažte

(1) Menelaovu větu: *Body K, L, M leží v jedné přímce právě tehdy, když platí rovnost*

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = -1\,; \tag{1}$$

(2) Cévovu větu: *Přímky AL, BM, CK procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí rovnost*

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = 1; \tag{2}$$

přitom levou stranu (1) i (2) chápeme jako součin tří nenulových reálných čísel κ, λ, μ z rovností

$$\overrightarrow{AK} = \kappa\overrightarrow{KB}\,,\ \overrightarrow{BL} = \lambda\overrightarrow{LC}\,,\ \overrightarrow{CM} = \mu\overrightarrow{MA}\,.$$

2.1.10

Dokažte tzv. druhou Van Aubelovu větu: *Uvnitř trojúhelníku ABC zvolíme libovolný bod P a označíme K, L, M průsečíky polopřímek CP, AP, BP po řadě se stranami AB, BC, CA. Pak platí rovnost*

$$\frac{|AP|}{|PL|} = \frac{|AK|}{|KB|} + \frac{|AM|}{|MC|}\,.$$

(Podobné rovnosti platí i pro poměry $|BP| : |PM|$ a $|CP| : |PK|$.)

2.2 Další řešené příklady

2.2.1

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany AB a CD nejsou rovnoběžné, označíme E střed strany AB a K střed strany CD. Dokažte, že středy úseček AK, CE, BK, DE jsou vrcholy rovnoběžníku.

2.2.2

V rovině je dáno pět různých bodů A, B, C, D, E. Spojíme dvěma úsečkami středy úseček AB, CD a středy úseček BC, DE. Pak středy těchto dvou úseček spojíme třetí úsečkou. Dokažte, že poslední úsečka je rovnoběžná s úsečkou AE a má ve srovnání s ní čtvrtinovou délku.

2.2.3

Na tabuli jsou nakresleny čtyři body A, B, C, D. Sestrojme body A', B', C', D' následujícím způsobem: A' je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem B, B' je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem C, C' je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem D, D' je obrazem bodu D ve středové souměrnosti se středem A. Nyní smažeme body A, B, C, D. Můžeme zpětně najít polohu bodů A, B, C, D, když známe polohu bodů A', B', C', D'?

2.2.4

Řekneme, že množina A nenulových vektorů v rovině má vlastnost $\mathcal{S}$, jestliže obsahuje nejméně tři prvky a pro každý vektor $\vec{u} \in A$ existují vektory $\vec{v}, \vec{w} \in A$ takové, že $\vec{v} \neq \vec{w}$ a $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Zjistěte nejmenší možný počet prvků konečné množiny vektorů s vlastností $\mathcal{S}$.

2.2.5

(1) Máme dány středy stran obecného n-úhelníku v pořadí, v jakém leží na jeho hranici. Je možné tento n-úhelník rekonstruovat?
(2) Sestrojte pětiúhelník podle pětice středů jeho stran zadaných v pořadí, v jakém leží na jeho hranici.

2.2.6

Je dán trojúhelník ABC. Označme postupně X_a, X_b, X_c obrazy libovolného bodu X v souměrnostech podle středů stran BC, AC, AB. Dokažte, že přímky AX_a, BX_b, CX_c mají společný bod.

2.2.7

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ body T_1, T_2, T_3, T_4 označují postupně těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC. Nechť body A_1, B_1, C_1, D_1 jsou body souměrně sdružené s body A, B, C, D po řadě podle středů T_1, T_2, T_3, T_4. Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když $A_1B_1C_1D_1$ je rovnoběžník.

2.2.8

Mějme libovolný šestiúhelník $ABCDEF$ a nechť A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Dokažte, že vzniklý šestiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ má rovnoběžné a stejně dlouhé protilehlé strany.

2.2.9

K danému čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojme čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ s vrcholy tvořenými po řadě těžišti trojúhelníků BCD, CDA, DAB, ABC. Ukažte, že čtyřúhelník $ABCD$ můžeme zobrazit na čtyřúhelník $A_1B_1C_1D_1$ ve vhodné stejnolehlosti. Najděte její střed a koeficient.

2.2.10

V trojúhelníku ABC označme P střed střední příčky rovnoběžné se stranou BC. Dokažte, že pro libovolný bod X platí vektorová rovnost $2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 4\overrightarrow{XP}$.

2.2.11

Řešte vektorovou rovnici $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XE}$, kde A, B, C, D, E jsou dané body v rovině a X je její neznámý bod. Popište konstrukci všech řešení a jejich počet.

2.2.12

Dokažte, že je možné sestrojit trojúhelník, jehož každá strana je shodná a rovnoběžná s jednou těžnicí téhož předem daného trojúhelníku.

2.2.13

Nechť $M_1, M_2, \ldots M_6$ jsou v přirozeném pořadí středy stran libovolného konvexního šestiúhelníku $A_1A_2 \ldots A_6$. Dokažte, že existuje trojúhelník, jehož strany jsou shodné a rovnoběžné s úsečkami M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

2.2.14

V trojúhelníku ABC rozdělují body D, E, F po řadě strany BC, CA, AB na třetiny tak, že $|BC| = 3|BD|$, $|CA| = 3|CE|$, $|AB| = 3|AF|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají společné těžiště.

2.2.15

Body D, E, F rozdělují strany trojúhelníku ABC tak, že platí $|BC| = 3|BD|$, $|CA| = 3|CE|$ a $|AB| = 3|AF|$, podobně body G, H, I rozdělují strany trojúhelníku DEF tak, že $|EF| = 3|EG|$, $|FD| = 3|FH|$ a $|DE| = 3|DI|$. Dokažte, že strany trojúhelníku GHI jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC a že každá strana trojúhelníku GHI má třetinovou délku v porovnání s odpovídající rovnoběžnou stranou trojúhelníku ABC.

2.2.16

Nechť D, E, F jsou body zvolené po řadě uvnitř stran BC, AC, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají společné těžiště právě tehdy, když platí rovnosti

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|}\,.$$

2.2.17

Nechť ABC je trojúhelník, bod T je jeho těžiště a M, N, P jsou body zvolené postupně na stranách AB, BC, CA tak, že

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = k\,.$$

Dále nechť T_1, T_2, T_3 jsou postupně těžiště trojúhelníků AMP, BNM, CPN. Dokažte, že trojúhelníky ABC a $T_1T_2T_3$ mají společné těžiště.

2.2.18

Uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1, C_1. Nechť T, T_a, T_b, T_c jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, konečně T_1 a T_2 jsou po řadě těžiště trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $T_aT_bT_c$. Dokažte, že body T, T_1 a T_2 leží v jedné přímce.

2.2.19

Je dán trojúhelník ABC, body M, N, P postupně na stranách AB, BC, CA a body R, S, T na úsečkách MN, NP, PM tak, že platí

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = \lambda, \quad \frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|NS|}{|SP|} = \frac{|PT|}{|TM|} = 1 - \lambda, \quad \text{kde} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Dokažte, že trojúhelníky STR a ABC jsou stejnolehlé a že střed jejich stejnolehlosti nezávisí na hodnotě parametru λ. Jakou roli hraje tento střed v trojúhelníku ABC?

2.2.20

Je dán trojúhelník ABC. Nechť D a E jsou body, které rozdělují stranu BC na třetiny, přičemž bod D leží mezi body B a E. Nechť F je střed strany AC, G střed strany AB a H průsečík úseček EG a DF. Najděte poměr $|EH| : |HG|$.

2.2.21

V trojúhelníku ABC jsou strany BC a AC rozděleny body D a E tak, že platí rovnosti $|BD| : |DC| = 3 : 1$ a $|AE| : |EC| = 3 : 2$. Najděte poměr $|BP| : |PE|$, kde P je průsečík AD a BE.

2.2.22

V trojúhelníku ABC jsou strany AC a AB rozděleny body E a F tak, že platí rovnosti $|AE| : |EC| = 4 : 1$ a $|AF| : |FB| = 1 : 1$. Nechť D je bod na straně BC a G je průsečík AD a EF. Předpokládejme, že bod D je umístěn tak, že $|AG| : |GD| = 3 : 2$. Najděte poměr $|BD| : |DC|$.

2.2.23

Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L tak, že $|AB| : |AK| = |CL| : |AL| = p : 1$. Dokažte, že přímka KL prochází jedním a týmž bodem bez ohledu na konkrétní hodnotu parametru p.

2.2.24

Body E, F, G, H leží po řadě uvnitř stran AB, BC, CD, DA daného čtyřúhelníku $ABCD$ tak, že platí

$$|AE| : |EB| = |BF| : |FC| = |CG| : |GD| = |DH| : |HA|\,.$$

Zjistěte, kdy je $EFGH$ rovnoběžník.

2.2.25

Strany AD, AB, CB, CD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rozděleny body E, F, G, H tak, že $|AE| : |ED| = |AF| : |FB| = |CG| : |GB| = |CH| : |HD|$. Dokažte, že $EFGH$ je rovnoběžník.

2.2.26

Označme F střed strany CD daného rovnoběžníku $ABCD$. V jakém poměru úsečka AF rozdělí úhlopříčku BD?

2.2.27

Mějme trojúhelník ABC. Tři rovnoběžné přímky jdoucí body A, B, C protínají stranu BC a přímky CA, AB postupně v bodech D, E a F. Body P, Q a R jsou kolineární a rozdělují úsečky AD, BE a CF ve stejném poměru. Najděte tento poměr.

2.2.28

Na stranách AB, AC, BC daného trojúhelníku ABC jsou dány dvojice různých bodů označených po řadě C_1 a C_2, B_1 a B_2, A_1 a A_2. Dokažte, že trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ mají společné těžiště právě tehdy, když platí rovnosti

$$\frac{|C_1C_2|}{|AB|} = \frac{|B_1B_2|}{|AC|} = \frac{|A_1A_2|}{|BC|}$$

a zároveň dané body leží na hranici trojúhelníku v jednom z pořadí A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2, resp. A, C_2, C_1, B, A_2, A_1, C, B_2, B_1.

2.2.29

V konvexním čtyřúheníku $ABCD$ označme I průsečík úhlopříček AC, BD a předpokládejme, že přímky AD a BC se protínají v bodě E. Dokažte, že trojúhelníky EDC a IAB mají společné těžiště právě tehdy, když $AB \parallel CD$ a zároveň $|IC|^2 = |IA| \cdot |AC|$.

2.2.30

V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ a $AE \parallel BD$. Dokažte, že rovněž $AB \parallel CE$.

2.2.31

Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník. Přímky AB a EF, EF a CD, CD a AB se protínají postupně v bodech P, Q, R. Přímky BC a DE, DE a FA, FA a BC se protínají postupně v bodech S, T, U. Dokažte ekvivalenci

$$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|CD|}{|RQ|} = \frac{|EF|}{|QP|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|BC|}{|US|} = \frac{|DE|}{|ST|} = \frac{|FA|}{|TU|}.$$

2.2.32

Na úhlopříčkách AB_1 a CA_1 bočních stěn trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$ jsou vybrány po řadě body E a F tak, že přímky EF a BC_1 jsou rovnoběžné. Vypočtěte poměr délek úseček EF a BC_1.

2.2.33

Na hranách DA, DB čtyřstěnu $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1, na úsečkách BA_1, CB_1 pak po řadě body M, N, přičemž úsečka MN je rovnoběžná s rovinou ACD. Z rovností

$$|DB_1| = m|DB|, \qquad |CN| = p|CB_1|, \qquad |BM| = q|BA_1|$$

vyjádřete číslo q pomocí čísel m a p.

2.2.34

Nechť A, B, C, D jsou čtyři nekomplanární body v prostoru. Najděte množinu středů všech rovnoběžníků, jejichž vrcholy leží postupně na úsečkách AB, BC, CD, DA.

2.2.35

Je dán nerovinný šestiúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že středy všech šesti jeho stran leží v jedné rovině.

2.2.36

V rovině nebo prostoru je dáno šest bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 takových, že existuje šest trojúhelníků $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_6$, $A_5A_6A_1$, $A_6A_1A_2$. Víme navíc, že jejich těžiště tvoří v uvedeném pořadí vrcholy šestiúhelníku. Dokažte, že tento šestiúhelník je středově souměrný, a pak rozhodněte, zda je nutně rovinný (nebo může být i prostorový). (Rovinný je pouze tehdy, když jsou vektory $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$ komplanární.)

2.2.37

V prostoru jsou dány dva pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E$ a $A_2B_2C_2D_2E$ se společným vrcholem E, které neleží v téže rovině. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 jsou rovnoběžné s některou rovinou.

2.2.38

Nechť $ABCD$ je kosočtverec a M, N, P jsou vnitřní body stran AB, BC, CD. Ukažte, že těžiště trojúhelníku MNP leží na přímce AC, právě když $|AM| + |DP| = |BN|$.

2.2.39

Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

2.2.40

Nechť D a E jsou body zvolené po řadě na stranách AC a AB trojúhelníku ABC tak, že úsečka DE není rovnoběžná se stranou BC. Nechť F a G jsou body zvolené po řadě na úsečkách BC a ED tak, že

$$\frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|EG|}{|GD|} = \frac{|BE|}{|CD|}\,.$$

Dokažte, že přímka GF je rovnoběžná s osou úhlu BAC.

2.2.41

Nechť T je těžiště trojúhelníku ABC a nechť d je přímka protínající strany AB a AC v bodech B_1 a C_1 tak, že body A a T nejsou touto přímkou odděleny. Dokažte, že pro obsahy čtyřúhelníků BB_1TC_1, CC_1TB_1 a obsah trojúhelníku ABC platí

$$S_{BB_1TC_1} + S_{CC_1TB_1} \geq \frac{4}{9} S_{ABC}\,.$$

Dále určete, kdy v dané nerovnosti nastane rovnost.

2.2.42

Nechť M je vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte vektorovou rovnost

$$V_{MBCD} \cdot \overrightarrow{MA} + V_{MACD} \cdot \overrightarrow{MB} + V_{MABD} \cdot \overrightarrow{MC} + V_{MABC} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{o},$$

kde V_{XYZW} označuje objem čtyřstěnu $XYZW$.

2.2.43

Nechť daná rovina protíná boční hrany VA, VB, VC, VD pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ ve vnitřních bodech, které označíme postupně M, N, P, Q. Dokažte rovnost

$$\frac{1}{|VM|} + \frac{1}{|VP|} = \frac{1}{|VN|} + \frac{1}{|VQ|}\,.$$

3 Aplikace skalárního součinu

3.1 Příklady teoretického významu

Obecná tvrzení o vektorech

3.1.1

Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ právě tehdy, když $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$. Dokažte.

3.1.2

Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ právě tehdy, když $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$. Dokažte.

3.1.3

Dokažte, že pro libovolné čtyři body A, B, C, D v rovině či prostoru vždy platí

$$|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |AD|^2 = 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle .$$

Dokázané tvrzení má následující důsledky.

(1) V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$, jakož i ve čtyřstěnu $ABCD$ platí:

$$AC \perp BD \ \Leftrightarrow\ |AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2 .$$

(2) Pro délky stran a úhlopříček libovolného lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí rovnost $e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$, kterou dostaneme z odvozené rovnosti záměnou bodů B a C:

$$e^2 + f^2 - b^2 - d^2 = |AC|^2 + |BD|^2 - |CB|^2 - |AD|^2 = 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \rangle = 2ac ,$$

neboť vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ jsou souhlasně rovnoběžné.

(3) „Rovnoběžníková“ rovnost $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ (viz též 3.1.5 níže), která se odvodí stejně jako předchozí „lichoběžníková“ rovnost, když se položí $d = b$ a $c = a$.

(4) Vyjádření délky těžnice trojúhelníku pomocí délek jeho stran. K tomu účelu doplníme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$ s úhlopříčkami a a $2t_a$. Podle rovnoběžníkové rovnosti platí

$$a^2 + 4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 , \quad \text{odtud} \quad t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) .$$

3.1.4

Dokažte, že pro libovolné čtyři body A, B, C, X v rovině nebo prostoru platí

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CX} \rangle + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BX} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AX} \rangle = 0 .$$

Rovnoběžnost a kolmost ve čtyřúhelníku

3.1.5

Dokažte „rovnoběžníkovou“ rovnost $2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$, kde a, b jsou délky sousedních stran libovolného rovnoběžníku a e, f jsou délky jeho úhlopříček.

3.1.6

Nechť P, Q jsou středy úhlopříček libovolného čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte Eulerovu rovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4|PQ|^2\,,$$

kde a, b, c, d jsou délky stran dotyčného čtyřúhelníku a e, f jsou délky jeho úhlopříček. Protože některý čtyřúhelník je rovnoběžník, právě když středy jeho úhlopříček splývají, má Eulerova rovnost tento důsledek: Délky stran a úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ splňují vztah $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, pouze tehdy, jde-li o rovnoběžník.

3.1.7

Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Dokažte.

3.1.8

Úhlopříčky čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé, právě když spojnice středů jeho protilehlých stran mají shodné délky. Dokažte.

3.1.9

Dokažte Eulerovu větu: *V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ platí*

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2)\,,$$

kde MN a PQ jsou spojnice středů jeho protilehlých stran.

3.1.10

O libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ dokažte: Rovnost $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$ platí pro libovolný bod X právě tehdy, když $ABCD$ je pravoúhelník.

3.1.11

Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když pro libovolný bod X se skalární součin $\langle \overrightarrow{XA}, \overrightarrow{XC} \rangle$ liší od skalárního součinu $\langle \overrightarrow{XB}, \overrightarrow{XD} \rangle$ o stejnou hodnotu, která na volbě bodu X nezávisí. Dále ukažte, že v případě rovnoběžníku $ABCD$ je tato hodnota rozdílu skalárních součinů rovna nule, právě když je $ABCD$ pravoúhelník.

3.1.12

Pro libovolný tětivový čtyřúhelník (tj. čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici) dokažte: Šest přímek vedených vždy středem jedné strany kolmo k protilehlé straně prochází jedním bodem M. Úhlopříčky jsou zde rovněž považovány za dvě protilehlé strany. (Bod M se nazývá *Mongeovým bodem* daného tětivového čtyřúhelníku.)

Vlastnosti obecného trojúhelníku

3.1.13

Dokažte Thaletovu větu: *Je-li bod O střed úsečky AB o délce $2r$, pak pro každý bod X různý od bodů A, B je úhel AXB pravý právě tehdy, když $|OX| = r$.*

3.1.14

Jako doplněk k Thaletově větě z Příkladu 3.1.13 dokažte následující tvrzení: Všechny body X dané roviny ABC, které vyhovují podmínce rovnosti dvou skalárních součinů

$$\left\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{CX} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AX} \right\rangle,$$

tvoří Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem AB.

3.1.15

Dokažte, že výšky obecného trojúhelníku leží na třech přímkách, které procházejí jedním bodem (zvaným *ortocentrum* daného trojúhelníku). (Výškou trojúhelníku rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy vrchol trojúhelníku s jeho kolmým průmětem na přímku protější strany.)

3.1.16

Tvrzení z Příkladu 3.1.15 o existenci ortocentra V obecného trojúhelníku ABC dokažte znovu společně s vektorovými rovnostmi

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,,$$
$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\,.$$

kde O je střed kružnice opsané dotyčnému trojúhelníku. Ze vzorce pro polohový vektor $\overrightarrow{OV}$ ortocentra V spolu se vzorcem pro polohový vektor $\overrightarrow{OT}$ těžiště T trojúhelníku ABC, tedy z rovností

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{a} \quad \overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

okamžitě plyne vztah $\overrightarrow{OV} = 3\overrightarrow{OT}$, který znamená, že buď platí $O = T = V$ (trojúhelník ABC je pak rovnostranný), nebo O, T, V jsou tři různé body, které leží v uvedeném pořadí na jedné přímce, a to tak, že $|OT| : |TV| = 1 : 2$. Říká se jí *Eulerova přímka* daného trojúhelníku ABC (libovolného trojúhelníku, který není rovnostranný).

3.1.17

Po příkladech 3.1.15 a 3.1.16 podejte třetí důkaz existence ortocentra V obecného trojúhelníku ABC, tentokrát společně s poznatkem, že bod V je jediný bod roviny trojúhelníku ABC, který splňuje rovnost tří skalárních součinů

$$\left\langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{CV} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV} \right\rangle.$$

3.1.18

Dokažte, že pro vzdálenost ortocentra V od středu O kružnice opsané trojúhelníku ABC platí vzorec

$$|OV| = \sqrt{9r^2 - a^2 - b^2 - c^2}\,,$$

kde a, b, c jsou délky jeho stran a r je poloměr zmíněné kružnice.

3.1.19

Nechť $k = (O, r)$ je kružnice opsaná trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Středy stran, paty výšek a středy úseček AV, BV, CV leží vždy na jediné (tzv. Feuerbachově) kružnici $k_1 = (F, \frac{r}{2})$, přičemž střed F leží na Eulerově přímce (přímce OV) a půlí úsečku OV. Dokažte. Feuerbachově kružnici se také běžně říká *kružnice devíti bodů* (bodů, o kterých je řeč právě v zadání příkladu).

3.1.20

Dokažte, že na kružnici opsané obecnému trojúhelníku ABC leží body souměrně sdružené s jeho ortocentrem V

(1) podle středů stran AB, BC, AC,
(2) podle os, kterými jsou přímky AB, BC, AC.

3.1.21

(1) Dokažte vektorovou rovnost $S_{BXC} \cdot \overrightarrow{XA} + S_{AXC} \cdot \overrightarrow{XB} + S_{AXB} \cdot \overrightarrow{XC} = \vec{o}$, kde X je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC a kde S_{KLM} značí obsah trojúhelníku KLM.
(2) Dokažte vektorovou rovnost $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{o}$, kde I značí střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC o stranách délek $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.
(3) Dokažte vektorovou rovnost $d_a \cdot \overrightarrow{XA} + d_b \cdot \overrightarrow{XB} + d_c \cdot \overrightarrow{XC} = \vec{o}$, kde d_a, d_b, d_c značí vzdálenosti libovolného bodu X rovnostranného trojúhelníku ABC od přímek jeho stran v pořadí BC, AC, AB.

Základní vlastnosti čtyřstěnu

3.1.22

Jestliže v daném čtyřstěnu jsou dvě dvojice protilehlých hran navzájem kolmé, pak je i třetí dvojice protilehlých hran navzájem kolmá. Dokažte.

3.1.23

V rovnostranném trojúhelníku střed O kružnice opsané, střed I kružnice vepsané a těžiště T jak známo splývají. Pokud naopak nějaké dva z bodů O, I, T splývají, je příslušný trojúhelník rovnostranný. Podobně v pravidelném čtyřstěnu body O, I, T s analogickým významem zřejmě splývají, platí i v této situaci obrácené tvrzení?

3.1.24

Středem každé hrany libovolného čtyřstěnu veďme rovinu kolmou k protější (mimoběžné) hraně. Dostaneme tak šest navzájem různoběžných rovin procházejících jedním bodem, dokažte. (Zmíněný bod se nazývá *Mongeův bod* daného čtyřstěnu.)

3.1.25

Dokažte, že pro libovolný čtyřstěn $ABCD$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) Tělesové výšky čtyřstěnu $ABCD$ leží na čtyřech přímkách, které procházejí jedním bodem. (Takový čtyřstěn se nazývá *ortocentrický* a zmíněnému společnému bodu všech čtyř přímek tělesových výšek (který některé čtyřstěny nemají) se říká *ortocentrum* příslušného čtyřstěnu.)
(2) Platí současně $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$.
(3) Platí $|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.
(4) Spojnice středů protilehlých hran čtyřstěnu $ABCD$ jsou tři úsečky téže délky.

3.1.26

Dokažte, že čtyři přímky, které procházejí těžišti stěn čtyřstěnu a jsou na příslušnou stěnu kolmé, procházejí jedním bodem právě tehdy, když procházejí jedním bodem čtyři přímky, na kterých leží tělesové výšky čtyřstěnu.

3.1.27

Dokažte, že v každém čtyřstěnu, ve kterém protilehlé hrany svírají tři úhly téže velikosti, jsou tyto úhly pravé. Jsou-li navíc každé dvě jeho protilehlé hrany stejně dlouhé, je takový čtyřstěn pravidelný, zdůvodněte.

3.2 Další řešené příklady

Kolmost součtu a rozdílu dvou vektorů

Podle Příkladu 3.1.1 platí $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$, právě když $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

3.2.1

Na kružnici je dáno pět různých bodů. Každé tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku, jehož těžištěm vedeme přímku kolmou na tětivu spojující zbylé dva dané body. Takto dostaneme celkem 10 přímek; dokažte, že všechny procházejí jedním bodem.

3.2.2

Nechť O je střed jednotkové kružnice procházející body A_1, A_2 a A_3, dále nechť P_1 je střed druhé z obou jednotkových kružnic, které procházejí body A_2, A_3. Středy P_2 a P_3 jsou definovány podobně. Dokažte, že body P_1, P_2 a P_3 leží na jednotkové kružnici, jejíž střed označíme Q_4. Nyní přidejme čtvrtý bod A_4 na původní kružnici a zopakujme celý výše uvedený postup s každou skupinou tří bodů z A_1, A_2, A_3, A_4. Tak dostaneme čtyři kružnice se středy Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Dokažte, že body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 leží na jednotkové kružnici a najděte její střed v závislosti na bodech A_1, A_2, A_3, A_4.

3.2.3

Uvnitř stran BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body D, E, F. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a DEF jsou soustředné právě tehdy, když platí rovnost

$$|DB| \cdot |DC| = |EC| \cdot |EA| = |FA| \cdot |FB| \,.$$

Důkazy incidence přímek

3.2.4

Vně nad stranami trojúhelníku ABC jsou sestrojeny libovolné (třeba i navzájem ne podobné) pravoúhelníky $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$. Ukažte, že osy úseček HE, DG a FI procházejí jedním bodem.

3.2.5

V rovině jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ takové, že kolmice z bodů A, B, C po řadě na přímky $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ se protínají v jednom bodě. Ukažte, že rovněž kolmice vedené z bodů A', B', C' po řadě na přímky BC, AC, AB se protínají v jednom bodě.

3.2.6

Ke kružnici opsané danému trojúhelníku sestrojme tečny v jeho vrcholech. Ke každé z nich veďme kolmici středem strany protilehlé k vrcholu, kterým tečna prochází. Dokažte, že tyto tři kolmice se protínají v jednom bodě.

3.2.7

Nechť O je střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Uvažujme její průměry AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Nechť A_0, B_0, C_0, D_0 jsou postupně těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC. Ukažte, že přímky A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 se protínají v jednom bodě.

Ověřování kolmosti

3.2.8

V rovnoramenném trojúhelníku ABC označme D střed základny BC, E patu kolmice vedené z bodu D na stranu AC a F střed úsečky DE. Dokažte, že úsečky AF a BE jsou navzájem kolmé.

3.2.9

Pro těžiště T libovolného trojúhelníku ABC platí: $AT \perp BT \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$, kde a, b, c jsou obvykle značené délky jeho stran. Dokažte.

3.2.10

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, D střed strany AB a E těžiště trojúhelníku ADC. Dokažte ekvivalenci

$$CD \perp OE \;\Leftrightarrow\; |AB| = |AC|.$$

3.2.11

V šestiúhelníku $ABCDEF$ označme M, N, P, Q, R, S po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dokažte, že rovnost

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2$$

nastane, právě když $MQ \perp PS$.

3.2.12

Označme E, F, G, H po řadě středy stran daného čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou navzájem kolmé právě tehdy, když platí rovnost

$$|AD|^2 + |BC|^2 = 2\big(|EG|^2 + |FH|^2\big)\,.$$

3.2.13

Nechť $KLMN$ a $K'L'M'N'$ jsou dva čtyřúhelníky, pro jejichž strany platí vztahy $KL \perp$ $\perp K'L'$, $LM \perp L'M'$, $MN \perp M'N'$, $NK \perp N'K'$. Platí-li navíc $KM \perp L'N'$, pak také platí $LN \perp K'M'$. Dokažte.

3.2.14

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Předpokládejme, že přímky rovnoběžné s AD a CD procházející ortocentrem V trojúhelníku ABC protnou strany AB a BC v bodech, které označíme po řadě P a Q. Dokažte, že kolmice vedená z bodu V na přímku PQ prochází ortocentrem V' trojúhelníku ACD.

3.2.15

Dokažte, že každé dvě protilehlé strany nerovinného čtyřúhelníku jsou shodné právě tehdy, když přímka spojující středy obou jeho úhlopříček je na tyto úhlopříčky kolmá.

3.2.16

Uvažujme všechny čtyřstěny $ABCD$ vepsané do dané kulové plochy. Ukažte, že součet

$$S = |AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 - |BC|^2 - |CD|^2 - |DB|^2$$

má minimální hodnotu právě tehdy, když všechny úhly mezi hranami dotyčného čtyřstěnu u jeho vrcholu A jsou pravé.

3.2.17

Nechť A je libovolný bod vnitřní oblasti kružnice k různý od jejího středu. Pro libovolnou tětivu kružnice k procházející bodem A uvažme průsečík dvou tečen, které se dotýkají kružnice k v koncových bodech této tětivy. Najděte množinu průsečíků všech takových dvojic tečen.

3.2.18

Nechť P je daný bod ve vnitřní oblasti dané kružnice $k(O, r)$. Dvě navzájem kolmé polopřímky vycházející z bodu P protínají kružnici k v bodech A, B. Trojúhelník PAB doplňme bodem Q na pravoúhelník $PAQB$. Jakou množinu vyplní všechny body Q, když pro pevný bod P uvážíme všechny dvojice kolmých polopřímek PA, PB?

Výpočty délek a vzdáleností

3.2.19

Pro tři dané body A, B, C platí $|AC|^2 + |BC|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2$. Jaká je vzájemná poloha těchto tří bodů?

3.2.20

Pro libovolné tři body $A \neq B$, M dokažte tvrzení, že rovnost

$$|XA|^2 + |XB|^2 = 2|XM|^2 + \frac{1}{2}|AB|^2$$

platí pro libovolný bod X právě tehdy, když je bod M střed úsečky AB.

3.2.21

Najděte bod X s minimálním součtem čtverců vzdáleností od daných bodů A, B, C, které neleží v jedné přímce.

3.2.22

Pravidelný n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ je vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem r. Nechť X je libovolný bod, pro který platí $|OX| = d$. Dokažte rovnost

$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = n\left(r^2 + d^2\right) .$$

3.2.23

Dokažte, že pro každý trojúhelník ABC existuje v rovině ABC právě jeden bod X takový, že součty čtverců stran trojúhelníků XAB, XBC, XCA se navzájem rovnají. Podejte geometrickou interpretaci takového bodu X.

3.2.24

Úhlopříčky AC a BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě O. Ukažte, že rovnost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2(|AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 + |DO|^2)$$

platí právě tehdy, když úhlopříčky jsou navzájem kolmé nebo když bod O je středem alespoň jedné z nich.

3.2.25

V prostoru jsou dány libovolné dva trojúhelníky ABC a KLM. Přemístíme-li je tak, aby splynula jejich těžiště, pak součet všech devíti hodnot $|XY|^2$, kde $X \in \{A, B, C\}$ a $Y \in \{K, L, M\}$, nebude záviset na tom, v jaké vzájemné poloze přitom přemístěné trojúhelníky budou. Dokažte.

3.2.26

Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, ve kterém těžnice vycházející z bodu A v trojúhelnících ABC, ABD, ACD jsou navzájem kolmé. Dokažte, že všechny tři hrany dotyčného čtyřstěnu vycházející z bodu A jsou stejně dlouhé.

3.2.27

Nechť M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AB, CD, AC, BD čtyřstěnu $ABCD$. Nechť úsečka MN je kolmá na AB i CD a úsečka PQ je kolmá na AC i BD. Dokažte, že pak platí $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$ i $|AC| = |BD|$.

3.2.28

Těžiště čtyřstěnu $ABCD$ má stejnou vzdálenost od jeho vrcholů A a B. Dokažte rovnost

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2 .$$

3.2.29

Vyjádřete vzdálenost hlavního vrcholu V trojbokého jehlanu $ABCV$ od těžiště T jeho základny ABC pomocí součtů

$$P = |AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 \quad \text{a} \quad Q = |AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 ,$$

pro něž pak dokažte nerovnost $P < 3Q$.

3.2.30

Kulová plocha vepsaná do čtyřstěnu se dotýká všech čtyř stěn v jejich těžištích. Dokažte, že čtyřstěn je pravidelný.

3.2.31

Určete poloměr té kulové plochy k, která prochází těžišti všech stěn obecného čtyřstěnu vepsaného do jednotkové koule se středem O. Určete také vzdálenost středu O od středu kulové plochy k v závislosti na délkách hran daného čtyřstěnu.

3.2.32

Ve vnitřní oblasti kulové plochy $k(O, r)$ je dán bod P. Tři navzájem kolmé polopřímky vedené z bodu P protínají kulovou plochu k v bodech A, B, C. Označme Q ten vrchol kvádru s hranami PA, PB, PC, který s bodem P leží na téže tělesové úhlopříčce. Dokažte, že pro všechny uvažované trojice navzájem kolmých polopřímek PA, PB, PC má bod Q od středu O tutéž vzdálenost.

3.2.33

Dvě protilehlé strany daného konvexního čtyřúhelníku mají délky a, c a úhel mezi různoběžnými přímkami těchto dvou stran, v němž tento čtyřúhelník leží, má velikost φ. Vypočtěte vzdálenost středů dvou zbývajících stran tohoto čtyřúhelníku.

3.2.34

Pro délky hran čtyřstěnu $ABCD$ platí $|AD| = |BC| = a$, $|BD| = |AC| = b$ a $|CD| = {}$ $= |AB| = c$. Nechť D_1, B_1 jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC a ADC. Dokažte implikaci $DD_1 \perp BB_1 \Rightarrow a^2 + c^2 = 3b^2$.

3.2.35

Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC má součet

$$|XA|^n + |XB|^n + |XC|^n$$

tutéž hodnotu, je-li přitom a) $n = 2$, b) $n = 4$.

3.2.36

Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice opsané čtverci $ABCD$ má součet

$$|XA|^n + |XB|^n + |XC|^n + |XD|^n$$

tutéž hodnotu, je-li přitom a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 6$.

3.2.37

Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice vepsané trojúhelníku ABC o stranách a, b, c má součet $a|XA|^2 + b|XB|^2 + c|XC|^2$ tutéž hodnotu.

3.2.38

Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť bod F je průsečík přímek AC a BD a bod E průsečík přímek AD a BC. Dokažte, že pro vzdálenost středů M, N stran AB, CD platí vzorec

$$|MN| = \frac{|EF|}{2} \cdot \left| \frac{|AB|}{|CD|} - \frac{|CD|}{|AB|} \right| .$$

3.2.39

Nechť k_1, k_2 jsou dvě kružnice, které leží ve vnitřní oblasti kružnice k tak, že se jí dotýkají po řadě v bodech M a N. Kromě toho kružnice k_1 prochází středem kružnice k_2. Přímka procházející dvěma průsečíky kružnic k_1 a k_2 protne kružnici k v bodech A a B. Přímky MA a MB protnou kružnici k_1 po řadě v bodech C a D. Dokažte, že přímka CD je tečna ke kružnici k_2.

Výpočty velikostí úhlů

3.2.40

Pro čtyři různé body O, A, B, C platí $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{o}$ a $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$. Dokažte, že ABC je rovnostranný trojúhelník.

3.2.41

V prostoru jsou dány čtyři polopřímky, které neleží v rovině, mají však společný počátek. Každé dvě z nich přitom svírají stejně velký úhel. Vypočtěte ho.

3.2.42

V prostoru je dána přímka l, která svírá stejný úhel se třemi danými navzájem různoběžnými přímkami ležícími v dané rovině π. Dokažte, že přímka l je na rovinu π kolmá.

3.2.43

Přímka p, jež je rovnoběžná se stranou AC rovnostranného trojúhelníku ABC, protíná strany AB a BC po řadě v bodech M a P. Označme D těžiště trojúhelníku PMB a E střed úsečky AP. Určete vnitřní úhly trojúhelníku DEC.

3.2.44

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB a CD jsou shodné.

(1) Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy stran AD a BC.

(2) Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy úhlopříček AC a BD.

3.2.45

V prostoru jsou dány tři různé polopřímky OA, OB, OC se stejným počátkem O, přičemž žádné dvě z nich nejsou navzájem opačné. Ukažte, že všechny tři úhly tvořené osami úhlů AOB, BOC a COA jsou buď ostré, nebo tupé, nebo pravé.

3.2.46

V prostoru jsou dány čtyři polopřímky PA, PB, PC, PD tak, že žádné tři z nich neleží v jedné rovině a že pro úhly jimi sevřené platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DPA| = \varphi\,.$$

Určete největší možnou hodnotu $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle BPD|$ v závislosti na parametru $\varphi \in (0, \pi)$.

Důkazy nerovností

3.2.47

Dokažte, že pro libovolný trojúhelník ABC a každý bod X platí nerovnost

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 3(|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2)\,.$$

3.2.48

Pro libovolné body $P_1, P_2, \ldots, P_n$ na jednotkové kulové ploše platí

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |P_i P_j|^2 \leq n^2\,.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.

3.2.49

V rovině daného trojúhelníku ABC s těžištěm T určete ten bod X, při kterém je minimální hodnota součtu

$$|AT| \cdot |AX| + |BT| \cdot |BX| + |CT| \cdot |CX|\,.$$

3.2.50

Nechť A, B, C, D jsou libovolné čtyři body v rovině či prostoru. Dokažte nerovnost

$$2|AB| \cdot |CD| + |AD|^2 + |BC|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. Jako důsledek tohoto výsledku dostáváme, že pro délky stran a úhlopříček libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ při obvyklém označení platí

$$2ac + b^2 + d^2 \geq e^2 + f^2\,,$$

přitom rovnost nastane, právě když $AB \parallel CD$ (právě tehdy jsou totiž vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ souhlasně rovnoběžné, což je podmínka rovnosti v dokazované nerovnosti).

3.2.51

Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů obecného trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}\,.$$

3.2.52

Dokažte, že pro kosiny dvojnásobků vnitřních úhlů obecného trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}\,.$$

3.2.53

Jsou dány dva trojúhelníky s vnitřními úhly α, β, γ a α_1, β_1, γ_1. Dokažte, že platí

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma} \leq \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma\,,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.

3.2.54

Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = a_1$, $|BD| = b_1$, $|CD| = c_1$.

(1) Dokažte, že existuje právě jeden bod P, který splňuje podmínku

$$|PA|^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = |PB|^2 + a^2 + b_1^2 + c^2 = |PC|^2 + a^2 + b^2 + c_1^2 = |PD|^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2.$$

(2) Pro bod P z části 1 dokažte nerovnost

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \geq 4r^2\,,$$

kde r je poloměr kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Dále najděte nutnou a dostačující podmínku, aby zapsaná nerovnost přešla v rovnost.

3.2.55

V kruhu se středem O a poloměrem r je dáno n bodů $A_1, \ldots, A_n$. Dokažte, že v součtu $\vec{u} = \pm\overrightarrow{OA_1} \pm \overrightarrow{OA_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{OA_n}$ je možné vybrat znaménka tak, aby platilo $|\vec{u}| \leq r\sqrt{2}$.

3.2.56

Dokažte, že z pěti vektorů v prostoru lze vždy vybrat dva vektory tak, aby velikost jejich součtu byla menší nebo rovna velikosti součtu ostatních tří vektorů.

3.2.57

Na polokružnici se středem O a poloměrem 1 je dán lichý počet bodů $P_1, \ldots, P_{2n+1}$. Dokažte nerovnost $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.

3.2.58

V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme MN a PQ spojnice středů protilehlých stran. Dokažte, že pokud platí

$$|MN| + |PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|)\,,$$

pak $ABCD$ je rovnoběžník.

3.2.59

Dokažte, že pro délky stran a, b, c, d a úhlopříček e, f libovolného rovinného (konvexního či nekonvexního) nebo prostorového čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$(a+c)^2 + (b+d)^2 \geq 2(e^2 + f^2)\,,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.

3.2.60

Nechť ABC je trojúhelník, bod T je jeho těžiště a M, N, P jsou body zvolené postupně na stranách AB, BC, CA tak, že platí

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = k\,.$$

Dále nechť T_1, T_2, T_3 jsou postupně těžiště trojúhelníků APM, BMN, CNP. Dokažte, že pro každý bod D roviny trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$3|DT| < |DT_1| + |DT_2| + |DT_3| < |DA| + |DB| + |DC|\,.$$

3.2.61

Předpokládejme, že pro daný rovinný (konvexní či nekonvexní) nebo prostorový šestiúhelník $ABCDEF$ jsou splněny rovnosti

$$|AD| = |BC| + |EF|\,,\ |BE| = |AF| + |CD|\,,\ |CF| = |DE| + |AB|\,.$$

Dokažte, že pak rovněž platí rovnosti

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{|EF|}{|BC|}\,.$$

3.2.62

Mějme posloupnost pětiúhelníků $M, M_1, M_2, \ldots$ sestrojených tak, že vrcholy každého následujícího pětiúhelníku leží ve středech stran předchozího pětiúhelníku. Dokažte, že součet obvodů všech těchto pětiúhelníků nepřevyšuje osminásobek obvodu prvního z nich.

3.2.63

Pro každý rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ ($AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$) dokažte nerovnost

$$|AF| + |AH| + |AC| < |AB| + |AD| + |AE| + |AG|\,.$$

3.2.64

Nechť dva různé body P, Q leží uvnitř pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že platí nerovnost $|\sphericalangle PAQ| < \frac{\pi}{3}$.

Užití vzorce pro ortocentrum

V Příkladu 3.1.16 byl uveden užitečný vzorec $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ pro obecný trojúhelník ABC s ortocentrem V a středem O opsané kružnice.

3.2.65

V rovině jsou dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Nechť body V_1 a V_2 jsou ortocentra trojúhelníků ABC a ABD. Dokažte, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když V_1V_2DC je rovnoběžník.

3.2.66

Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice a M je její libovolný bod různý od A, B, C, D. Nechť V_1, V_2, V_3, V_4 jsou postupně ortocentra trojúhelníků MAB, MBC, MCD, MDA. Dokažte, že

(1) $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník,
(2) $|V_1V_3| = 2|RS|$, kde R a S jsou středy stran AB a CD.

3.2.67

Vrchol A ostroúhlého trojúhelníku ABC má stejnou vzdálenost od středu O kružnice opsané a od ortocentra V. Určete všechny možné hodnoty úhlu α u vrcholu A.

3.2.68

Mějme trojúhelník ABC, který není pravoúhlý. Nechť V je jeho ortocentrum a body M_1, M_2, M_3 po řadě středy stran BC, AC, AB. Sestrojme postupně A_1, B_1, C_1 obrazy bodu V v souměrnostech podle středů M_1, M_2, M_3 a označme pak A_2, B_2, C_2 po řadě ortocentra trojúhelníků BA_1C, CB_1A, AC_1B. Dokažte, že

(1) trojúhelníky ABC a $A_2B_2C_2$ mají společné těžiště,
(2) těžiště trojúhelníků AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 tvoří trojúhelník podobný trojúhelníku ABC.

3.2.69

Uvnitř stran AB, BC, CA daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L, M tak, že platí rovnosti

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|}\,.$$

Dokažte, že trojúhelníky ABC a KLM mají společné ortocentrum, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

3.2.70

Označme K kolmý průmět ortocentra daného ostroúhlého trojúhelníku ABC na tečnu ve vrcholu B ke kružnici tomuto trojúhelníku opsané. Dokažte, že trojúhelník BKL, kde L je střed strany AC, je rovnoramenný.

3.2.71

Označme V ortocentrum daného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem V protíná přímku BC v bodech A_1, A_2. Podobně kružnice se středem ve středu strany CA procházející bodem V protíná přímku CA v bodech B_1, B_2 a kružnice se středem ve středu strany AB procházející bodem V protíná přímku AB v bodech C_1, C_2. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.

3.2.72

Nechť P je libovolný vnitřní bod delšího oblouku AB kružnice opsané danému ostroúhlému trojúhelníku ABC. Označme V jeho otrocentrum a E patu výšky z vrcholu B. Předpokládejme, že $PAQB$ a $PARC$ jsou rovnoběžníky a že přímka AQ protíná přímku VR v bodě X. Dokažte, že pak platí $EX \parallel AP$.

3.2.73

Najděte všechny trojice čísel $k\,,l\,,m \in \langle 0,1)$ s vlastností: Zvolíme-li na stranách BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC po řadě body D, E, F tak, aby platilo

$$|DC| = k|BC|\,,\ |EA| = l|CA|\,,\ |FB| = m|AB|\,,$$

budou mít trojúhelníky ABC a DEF společné ortocentrum.

3.2.74

Najděte všechny trojice čísel $k\,,l\,,m \in \langle 0,1)$ s vlastností (i), resp. (ii): Zvolíme-li na stranách BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC po řadě body D, E, F tak, aby platilo

$$|DC| = k|BC|\,,\ |EA| = l|CA|\,,\ |FB| = m|AB|\,,$$

(i) bude střed kružnice opsané trojúhelníku ABC ortocentrem trojúhelníku DEF;
(ii) bude ortocentrum trojúhelníku ABC středem kružnice opsané trojúhelníku DEF.

Eulerova přímka a Feuerbachova kružnice

Potřebné poznatky o Eulerově přímce a Feuerbachově kružnici byly uvedeny dříve v Příkladech 3.1.16 a 3.1.19.

3.2.75

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a K, L, M jsou postupně obrazy bodu O v souměrnostech podle přímek BC, AC a AB. Dokažte, že přímky AK, BL a CM se protínají v jednom bodě a určete jeho roli v trojúhelníku ABC.

3.2.76

Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Pro čtveřici trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC dokažte následující tvrzení.

(1) Těžiště těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník podobný čtyřúhelníku $ABCD$.
(2) Středy Feuerbachových kružnic těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník podobný čtyřúhelníku $ABCD$.
(3) Ortocentra těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník shodný s čtyřúhelníkem $ABCD$, přitom oba čtyřúhelníky jsou souměrně sdružené podle některého středu.

3.2.77

Je dán různostranný trojúhelník ABC. Nechť T, I a V jsou postupně těžiště, střed kružnice vepsané a ortocentrum tohoto trojúhelníku. Dokažte nerovnost $|\sphericalangle TIV| > \frac{\pi}{2}$.

Užití kolmých průmětů

3.2.78

Dokažte, že když se všechny vnitřní úhly daného konvexního n-úhelníku rovnají a délky po sobě jdoucích stran $a_1, a_2, \dots, a_n$ splňují podmínku $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, pak žádná z těchto nerovností není ostrá, tj. platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ (a jde tak o pravidelný n-úhelník).

3.2.79

Je dán konvexní k-úhelník. Dokažte, že každý jeho vnitřní bod má týž součet vzdáleností od k přímek, na kterých leží strany daného k-úhelníku, právě když součet všech k jednotkových vektorů vnějších normál k těmto stranám je roven nulovému vektoru.

3.2.80

Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je dán bod M. Označme M_a, M_b, M_c paty kolmic z bodu M po řadě na strany BC, AC, AB. Dokažte rovnost

$$|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b|\,.$$

3.2.81

Dokažte, že konvexní čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy mají stejný součet vzdáleností od čtyř přímek, na kterých leží jeho strany, je rovnoběžník.

3.2.82

V prostoru je dáno 10 vektorů tak, že součet libovolných devíti z nich má velikost menší, než je velikost součtu všech 10 vektorů. Dokažte, že existuje osa, na kterou má každý z daných 10 vektorů kladný kolmý průmět.

3.2.83

Žák měl překreslit konvexní mnohoúhelník ležící v kruhu o poloměru 1 z jednoho listu papíru na druhý. Přenesl první stranu, pak úhel, který svírá tato strana s druhou stranou, kterou přenesl poté atd. Úhly žák přenášel přesně, avšak délky přenášel s relativní chybou p, což znamená, že úsečku délky a zakreslil jako úsečku délky b, kde $|\frac{b}{a}-1| \leq p$. Po přenesení poslední strany zjistil, že její koncový bod má od počátečního bodu první strany nenulovou vzdálenost d. Dokažte, že platí $d \leq 4p$ (nezávisle na počtu stran mnohoúhelníku).

3.2.84

Dokažte, že pro libovolný konečný soubor vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ležících v rovině s kartézskou soustavou souřadnic O_{xy} a jednotkové vektory $\vec{e}_\varphi$ svírající úhel φ s kladnou poloosou x platí

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\langle \vec{a}_i, \vec{e}_\varphi \rangle| d\varphi = 2 \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \,,$$

kde $\vec{a}_i(\varphi)$ značí kolmý průmět vektoru $\vec{a}_i$ do směru vektoru $\vec{e}_\varphi$.

3.2.85

Dva konečné soubory vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ a $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ ležící v jedné rovině mají tu vlastnost, že součet velikostí kolmých průmětů vektorů prvního souboru na libovolnou přímku je nejvýše roven součtu velikostí kolmých průmětů vektorů druhého souboru na tutéž přímku. Dokažte, že součet velikostí vektorů prvního souboru je nejvýše roven součtu velikostí vektorů druhého souboru.

3.2.86

Leží-li jeden konvexní mnohoúhelník uvnitř druhého, pak obvod prvního z nich nepřevyšuje obvod druhého z nich. Dokažte.

3.2.87

Součet velikostí několika komplanárních vektorů je roven L. Dokažte, že z těchto vektorů lze vybrat několik (případně i jeden) tak, aby jejich součet byl vektor o velikosti alespoň $\frac{L}{\pi}$.

3.2.88

Má-li některý konvexní mnohoúhelník všechny strany i úhlopříčky kratší než d, pak jeho obvod je kratší než πd. Dokažte.

3.2.89

Je-li součet komplanárních vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ roven nulovému vektoru, pak platí nerovnost $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|$. Dokažte.

3.2.90

Uvnitř libovolného konvexního n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$ je vybrán bod O určený vektorovou rovností $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{o}$. Dokažte, že obvod tohoto n-úhelníku není menší než číslo $\frac{4}{n}(|OA_1| + |OA_2| + \cdots + |OA_n|)$. (Dotyčný bod $O = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ se často nazývá *těžištěm* n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$.)

4 Aplikace vektorového a smíšeného součinu

4.1 Příklady teoretického významu

4.1.1

Mějme dány libovolné tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ v prostoru. Dokažte vzorec

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b}\,\rangle = -\langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b}\,\rangle = -\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}\,\rangle = -\langle \vec{c} \times \vec{b}, \vec{a}\rangle\,.$$

4.1.2

Mějme dány libovolné tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ v prostoru. Dokažte vzorec

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle\vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle\vec{c}.$$

4.1.3

Mějme dány libovolné čtyři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v prostoru. Dokažte vzorec

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times (\vec{c} \times \vec{d}\,) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{d}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\,\rangle\vec{d}.$$

4.1.4

Mějme dány libovolné čtyři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v prostoru. Dokažte vzorec

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}\,\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d}\,\rangle - \langle \vec{a}, \vec{d}\,\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c}\,\rangle\,.$$

4.1.5

Pro každý trojúhelník ABC v prostoru ukažte, že tři vektory

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA})\,,\ \vec{v} = \overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB})\,,\ \vec{w} = \overrightarrow{CA} \times (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})$$

jsou vektory stran některého trojúhelníku, který je s původním trojúhelníkem podobný.

4.2 Další řešené příklady

Ověřování kolinearity

4.2.1

Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník. Označme M, N, P, Q, R po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA. Dokažte, že pokud se úsečky AP, BQ, CR a DM protínají v jednom bodě, pak tento bod leží také na úsečce EN.

4.2.2

Tři kosmické sondy letí stálými rychlostmi po třech přímých dráhách, přitom ve výchozím čase $t = 0$ jejich pozice neležely v jedné přímce. Dokažte, že později se tak může stát nejvýše dvakrát.

Vyjadřování obsahů

4.2.3

Dokažte, že trojúhelník, jehož délky stran se rovnají délkám těžnic trojúhelníku ABC, existuje a má obsah rovný $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníku ABC.

4.2.4

Uvnitř stran AC, AB daného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body D, E. Označme M a N po řadě středy úseček BD a CE. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $BCDE$ je roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku AMN.

4.2.5

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, v němž neplatí $AB \parallel CD$, zvolme body M, N na straně AD a body P, Q na straně BC tak, aby platilo

$$|AM| = |MN| = |ND| \quad \text{a} \quad |BP| = |PQ| = |QC|\,.$$

Dokažte, že trojúhelníky MOP a NOQ, kde O je průsečík přímek AB a CD, mají stejný obsah.

4.2.6

Označme P, Q, R, S, T, U po řadě středy úhlopříček AC, BD, CE, DF, EA, FB konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$. Dokažte, že obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ je čtyřikrát větší než obsah šestiúhelníku $PQRSTU$.

4.2.7

Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah.

4.2.8

Tři běžci běží stálými rychlostmi po třech rovnoběžných cestách ležících v jedné rovině. Pozice běžců v ní určují pohyblivé body A, B, C. V počátečním čase $t = 0$ má trojúhelník ABC obsah 2 jednotky, v čase $t = 5$ obsah 3 jednotky. Jaký obsah může mít v čase $t = 10$?

4.2.9

Tři kosmické sondy letí stálými rychlostmi po třech přímých navzájem rovnoběžných drahách. Pozice sond v prostoru určují pohyblivé body A, B, C. V počátečním čase $t = 0$ má trojúhelník ABC obsah 2 jednotky, v čase $t = 1$ obsah 3 jednotky a v čase $t = 2$ obsah 4 jednotky. Dokažte, že dráhy všech tří sond leží v jedné rovině.

4.2.10

Uvnitř úhlu s vrcholem O a rameny tvořenými polopřímkami o_x, o_y je dán bod G. Uvažujme všechny přímky procházející bodem G, jež protínají obě polopřímky o_x, o_y v bodech, které pak označíme A a B. Při jakém umístění této přímky bude obsah trojúhelníku OAB minimální?

4.2.11

V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ zvolme body M, N na straně AB a body P, Q na straně CD tak, aby platilo $|AM| = |NB|$ a $|CP| = |QD|$. Dokažte, že pokud čtyřúhelníky $AMQD$ a $BCPN$ mají stejný obsah, pak strana AB je rovnoběžná se stranou CD.

4.2.12

Písmenem s označíme obsah libovolného konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ a písmeny a, b, c, d, e po řadě obsahy trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEA, EAB. Dokažte tzv. Möbiův vztah

$$s^2 - s(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ae) = 0\,.$$

Vyjadřování objemů

4.2.13

Uvnitř trojhranu s vrcholem O a rameny tvořenými polopřímkami o_x, o_y, o_z je dán bod G. Uvažujme všechny roviny procházející bodem G, jež protínají všechny tři polopřímky o_x, o_y, o_z v bodech, které pak označíme A, B, C. Při jakém umístění této roviny bude objem čtyřstěnu $OABC$ minimální?

4.2.14

Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC a nechť A_1, B_1, C_1 jsou průsečíky přímek rovnoběžných s DD_1 a procházejících vrcholy A, B, C vždy se stěnou čtyřstěnu protilehlou tomuto vrcholu. Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.

4.2.15

Nechť K, L jsou po řadě středy hran AB, CD daného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že každá rovina obsahující přímku KL rozděluje čtyřstěn $ABCD$ na dvě části stejného objemu.

4.2.16

Na bočních hranách AA_1, BB_1, CC_1 trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$ jsou vybrány po řadě body M, N, K tak, že součet délek úseček AM, BN, CK je roven délce boční hrany tohoto hranolu. Najděte poměr objemů daného hranolu a čtyřstěnu $MNKT$, kde T je těžiště podstavy ABC.

Důkazy nerovností

4.2.17

V daném čtyřstěnu mají každé dvě mimoběžné hrany stejnou délku. Ukažte, že všechny stěny takového čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky. (Nejprve dokažte, že v libovolném čtyřstěnu platí: *Součet každých dvou stěnových úhlů u kteréhokoliv vrcholu je větší než třetí stěnový úhel u téhož vrcholu.* Odtud už snadno plyne tvrzení příkladu.)

4.2.18

Dokažte, že součet všech tří stěnových úhlů u kteréhokoliv vrcholu obecného čtyřstěnu je menší než 2π.