MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

Mgr. Jarmila ELBELOVÁ

Vektorové metody v eukleidovské geometrii

Disertační práce

Školitel: doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

Brno, 2011

Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora: Mgr. Jarmila Elbelová

Název disertační práce: Vektorové metody v eukleidovské geometrii

Název disertační práce anglicky: Vector Methods in Euclidean Geometry

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecné otázky matematiky

Školitel: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

Rok obhajoby: 2011

Klíčová slova v češtině: matematika, eukleidovská geometrie, vektorová algebra, vektorové výpočty, metody výpočtů

Klíčová slova v angličtině: mathematics, Euclidean geometry, vector computations, methods of computations

Zadání disertační práce: Na základě systematického studia knižní i časopisecké literatury o eukleidovské geometrii vyčlenit ty okruhy jejich problémů, které lze efektivně řešit metodami vektorové algebry a komplexních čísel. Nashromážděný příkladový materiál analyzovat a výsledky shrnout do metodicky zaměřeného textu disertační práce.

Prohlašuji, že jsem disertační práci vypracovala samostatně a uvedla všechnu použitou literaturu.

18. 3. 2011 Mgr. Jarmila Elbelová

Ráda bych na tomto místě vyjádřila poděkování svému školiteli doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za odborné vedení, četné rady a připomínky, ochotu a vstřícnost po celou dobu studia a velmi pečlivé čtení textu práce. Dále bych ráda poděkovala Mgr. Janu Vondrovi, PhD. za přečtení celé práce.

V neposlední řadě patří můj dík manželovi Petrovi a dceři Alžbětě za obětavost a velkou trpělivost, především o víkendech, které jsem často trávila u svého pracovního stolu.

Abstrakt disertační práce

Předložená práce je metodickým textem věnovaným uplatnění vektorových výpočtů v elementární geometrii. Tato metoda je v této práci využívána jak při odvozování geometrických tvrzení, tak při řešení rozličných geometrických úloh, a to téměř vždy bez užití souřadnic.

V první teoretické kapitole jsou popsány základní pojmy a poznatky vektorové algebry. Zvláštní důraz je zde kladen na rozdíly mezi postavením vektorů v geometrii středních a vysokých škol.

Následující tři kapitoly pak předkládají mnoho ukázek využití vektorů v eukleidovské planimetrii i stereometrii. Každá z těchto kapitol je rozdělena na dvě podkapitoly. V první z nich vždy uvádíme příklady, které mají všeobecně známý geometrický význam, nebo které využijeme při řešení dalších úloh, ve druhé pak rozmanité úlohy s detailně zapsaným řešením doplněným zpravidla obrázkem.

Druhá kapitola se zabývá vektorovými výpočty afinních vztahů vyjádřených bez užití délek úseček a velikostí úhlů. Třetí nejobsáhlejší kapitola pak předkládá příklady a úlohy řešené užitím skalárního součinu vektorů. Obě podkapitoly jsou zde rozčleněny do jednotlivých paragrafů podle témat a metod řešení zařazených příkladů a úloh. Čtvrtá kapitola se věnuje využití vektorového a smíšeného součinu vektorů.

U všech převzatých příkladu a úloh uvádíme odkaz na zdroj ze závěrečného seznamu použité literatury čítající 55 položek – 44 knih nebo sbírek úloh, 6 časopiseckých příspěvků, 5 internetových a jiných dokumentů. Náměty a řešení některých úloh jsou původní.

Dissertation Abstract

The submitted work is a methodical text mostly aimed at the use of vector calculations in elementary geometry. This method is applied in deriving geometric statements as well as solving various geometric problems, mostly without using coordinates.

In the introductory, theoretically conceived Chapter 1, the basic notions and results of vector algebra are described. A special emphasis is put on the differences between the standing of vectors in secondary school geometry and geometry of university level.

The three following chapters present numerous examples of the use of vectors in Euclidean plane and solid geometry. Each of these chapters is divided into two subchapters. The first of them give examples which have a generally known geometric meaning or are used in solving other problems. The second subchapters contain various problems with detailed solutions, mostly supplied with illustrations.

Chapter 2 deals with vector calculations of affine relations expressed without using line segment lengths and angle sizes. The largest Chapter 3 provides examples and problems solved by means of the scalar (dot) product of vectors. The two subchapters are divided into individual paragraphs according to the topics and solution methods of the presented examples and problems. Chapter 4 deals with the use of the vector and mixed product of vectors.

The sources of all the included examples and problems are mentioned with reference to the final bibliography. The list contains 55 items – 44 books and collections of problems, 6 journal contributions, 5 internet or other sources. The subjects and solutions of some problems are original.

Obsah

Úvod

Předložená práce je metodickým textem určeným především středoškolským učitelům, kteří chtějí prohloubit své dovednosti při řešení úloh z elementární geometrie, případně hledají náměty z této oblasti matematiky pro práci s talentovanými žáky, jimž zvládnutí poměrně skromného geometrického učiva daného běžným školním vzdělávacím programem nedělá žádné potíže a kteří mají zájem o řešení zajímavějších úkolů s obsažnějšími „zápletkami“, jež jsou při tom vyjádřeny v pojmech i řešitelné prostředky, které žáci znají ze školy.

K řešení úloh elementární geometrie lze s úspěchem využít řadu metod. V souladu se zadáním je naše práce věnována ve školské praxi poměrně málo (neprávem) uplatňované *metodě vektorových výpočtů*, na kterou při běžně koncipované výuce geometrie na střední škole totiž nezbývá čas. Význam vektorů v geometrii je sice všeobecně znám, redukuje se však většinou na jejich roli v analytické geometrii. Naším cílem je přesvědčit čtenáře, že s vektory lze v geometrii účinně pracovat i *bez souřadnic*. Na toto téma jsme v literatuře věnované elementární geometrii, s výjimkou brožury [bud–71] a paragrafu 12.1 knihy [eng–97], nenašli žádnou obsáhlejší metodickou práci, nýbrž jen izolované (o to však působivější) ukázky, většinou ve sbírkách úloh z různých matematických soutěží, jak je patrno i ze seznamu pramenů uvedeného v závěru práce. Popišme nyní její celkovou stavbu.

V první kapitole se zamýšlíme nad postavením vektorů ve výuce geometrie na středních školách a uvádíme komentovaný přehled aparátu vektorové algebry. V dalších kapitolách se pak věnujeme aplikacím vektorů při řešení konkrétních geometrických problémů. Jejich rozdělení do jednotlivých kapitol práce je provedeno na základě toho, které operace s vektory se v řešení dotyčné situace uplatňují rozhodujícím způsobem. Každá z těchto kapitol je pak rozdělena na dvě podkapitoly. V první z nich uvádíme příklady, které mají buď všeobecně geometrický význam (tj. pojednávají o klasických výsledcích, které si každý vážný zájemce o geometrii rád zapamatuje), nebo které následně uplatníme při detailně zapisovaných řešeních úloh, tvořících náplň druhé podkapitoly. Tu pak většinou členíme na několik nečíslovaných paragrafů podle příbuznosti metod nebo námětů řešených úloh. Touto systematizací se snažíme pouhou sbírku úloh přeměnit na cennější metodickou příručku. O práci v matematice je totiž dobře známo, že uplatněním podobného obratu v několika odlišných situacích se z ojedinělého postupu řešení stává skutečná metoda.

Při sestavování zmíněných kolekcí příkladů a úloh jsme byli vedeni snahou, aby výsledná práce získala rys jisté encyklopedičnosti, spočívající v soustředění do jednoho textu všech rozmanitých konkrétních ukázek uplatnění jednotlivých vektorových metod, které jsme v dostupné literatuře našli, aniž bychom dopustili rutinní opakování těchže geometrických situací s nepatrnými obměnami. Bylo nesnadné předem odhadnout, jak takové pojetí ovlivní celkový rozsah práce. Abychom dodrželi rozumnou míru, rozhodli jsme se v závěrečné etapě přípravy práce, že do výsledného textu vůbec nezařadíme téma *komplexních čísel*, kterými lze popisovat body a vektory v rovině a která se v této roli stávají efektivním prostředkem planimetrických výpočtů, jenž by si zasloužil samostatný rozsáhlejší text.

U zadání zařazených příkladů a úloh uvádíme odkazy na zdroj, ze kterého jsme daný námět převzali. Výjimku tvoří klasické výsledky a všeobecně známé úlohy, u kterých by bylo obtížné vypátrat původ. Některé náměty jsou označeny jako *původní* (přesněji to znamená, že nejsou převzaté, nevylučujeme tím však, že námět byl publikován ve zdroji, který jsme neměli k dispozici). Konečně k některým známým výsledkům poznamenáváme, že námi uváděné vektorové důkazy jsou rovněž „původní“ v právě upřesněném významu. Znamená to samozřejmě, že tyto výsledky se v literatuře obvykle dokazují odlišnými metodami.

Kapitola 1

Vektorová algebra a její geometrický model

Geometrii roviny a třírozměrného prostoru můžeme budovat dvěma odlišnými metodami. Při první z nich, zvané *syntetická metoda*, pracujeme přímo s geometrickými objekty a jim příslušnými veličinami (jako jsou délka, obsah nebo objem), přičemž teoretické poznatky o nich postupně odvozujeme ryze geometrickou cestou bez zvláštních početních prostředků, a to na základě využití již dříve odvozených poznatků nebo základních postulátů, které přijímáme za pravdivé. Při druhé, tzv. *analytické metodě*, nejjednodušším geometrickým objektům, tedy bodům, vhodným způsobem přiřazujeme skupiny čísel zvané souřadnice, abychom další geometrické objekty, veličiny a jejich vlastnosti mohli vyjadřovat a studovat výrazy, rovnicemi a nerovnicemi pro souřadnice bodů, které zkoumané útvary vytvářejí. K odvozovaní výsledků i při řešení úloh v geometrii nám tato *algebraizace* umožňuje účinně využívat kalkulus reálných čísel a polynomů, lineární algebru nebo matematickou analýzu. Jakmile je výpočtová etapa každého takového postupu u konce, musíme samozřejmě dát zpětně jeho výsledku správnou geometrickou interpretaci.

Praktická výuka geometrie na základních a středních školách je postupným rozšiřováním poznatků o geometrických objektech především syntetickou metodou. Není a jistě ani nemůže být zcela exaktní realizací matematické teorie, která by vyžadovala formálně postulovat výchozí základní vlastnosti bodů, přímek a rovin v podobě soustavy axiomů (jimiž jsou tyto objekty vlastně definovány). Je nepopíratelně správné, že tyto základy předkládáme dětem (podobně jako v přírodních vědách) jako pravdivé poznatky, abstrahované z reality světa, ve kterém žijeme. Odvoláváme se přitom na zkušenosti žáků z fyzickými objekty, které jsou více či méně dokonalými modely přímek, rovin apod.

Struktura geometrického učiva je tradičně rozvržena tak, že v hodinách matematiky se žáci seznamují s *vektory* až ve vyšších ročnících střední školy, kdy mají již *syntetickou geometrii* zvládnutou v prakticky konečné podobě a přistupují k soustavnému studiu *analytické geometrie*. I v tomto případě mají žáci s novým geometrickým objektem předchozí praktické zkušenosti – z hodin fyziky znají pojem *síly* (veličiny, která má nejen velikost, ale i směr) a z hodin geometrie mají ponětí o shodném zobrazení zvaném *posunutí*, zadávaném pomocí orientovaných úseček. Zařazení vektorového počtu do úvodu tématického okruhu analytické geometrie je nanejvýš účelné – pracovat například s rovnicemi přímek a rovin bez pojmu *směrový* či *normálový vektor* by bylo velmi obtížné či spíše nemožné.

V popsané etapě výuky geometrie na střední škole (říkejme jí dále *školská geometrie*), kdy žáci mají již osvojenu syntetickou podobu teorie bodových prostorů (konkrétně eukleidovské roviny a třírozměrného eukleidovského prostoru), je přirozené, že vektory zavádíme pomocí *uspořádaných dvojic bodů*, které přitom interpretujeme jako *orientované úsečky*. Studenti učitelství matematiky pak o pár let později zažijí na fakultách v základním kurzu geometrie (dále *vyšší geometrie*) překvapení, když je jim předkládáno, jak se naopak bodové prostory budují z vektorových prostorů, jejichž abstraktní teorii předtím poznali v kurzu lineární algebry. Pro mnohé z nich pak školská a vyšší geometrie zůstanou téměř bez souvislosti a na tu druhou po přechodu do učitelské praxe někdy zapomenou.

Vraťme se však k výuce vektorů ve školské geometrii. Po již naznačené syntetické definici vektorů jsou rovněž geometrickou cestou zaváděny operace sčítání vektorů, násobení vektoru číslem, skalární násobení dvou vektorů, případně jejich další druhy násobení (podle obsažnosti vzdělávacích programů jednotlivých škol). Současně jsou žáci seznamováni se základními vlastnostmi těchto operací, které z pohledu vyšší geometrie jsou axiomy obecných či eukleidovských vektorových prostorů. Ve středoškolských učebnicích jsou tyto vlastnosti (z pochopitelných důvodů) často uváděny bez důkazů. Současně se v nich dříve nebo později přechází k souřadnicovým vyjádřením vektorů, což je samozřejmě důležité především pro další výklad analytické geometrie přímek a rovin. Umožňuje to však i podávat potřebně krátké, totiž analytické důkazy vlastností zmíněných operací s vektory. Pro zajímavost uveďme, že i definice skalárního součinu dvou vektorů má v současné gymnaziální učebnici [koč–09] analytickou (tj. souřadnicovou) podobu. Poté je dokázána nezávislost této definice na volbě kartézské soustavy souřadnic a nakonec je odvozen běžný geometrický význam této operace.

Právě zmíněné zaujetí souřadnicemi vektorů ve školské matematice je jistě přirozené a pro další výklad analytické geometrie nezbytné. Tak trochu stranou však přitom zůstává fakt, že vybudovaná struktura, zvaná *vektorová algebra*, je sama o sobě mocným prostředkem odvozování geometrických výsledků. Nemůžeme vinit školskou geometrii, omezenou ve svém rozsahu celkovou časovou dotací přidělenou předmětu matematika, že nenabízí příliš mnoho ukázek účinného uplatnění kalkulu vektorové algebry (bez přechodu k souřadnicím vektorů) při objevování netriviálních geometrických poznatků. Ostatně ani vyšší geometrie ve fakultních kurzech není na tom o mnoho lépe. Jsme však přesvědčeni, že kvalitní učitelé matematiky by měli mít o tomto aspektu vektorové algebry dobré povědomí. Tento názor posiloval naše úsilí při přípravě předložené práce, která je strukturovaným koncentrátem takových ukázek, sebraných z dostupných zdrojů. Jejich výkladu doplněném o metodické poznámky předchází tato vstupní kapitola, o jejímž smyslu a pojetí nyní pojednáme.

V jednotlivých částech této kapitoly, která má teoretický charakter, se budeme přehledně zabývat vektorovou algebrou a jejím geometrickým modelem pro rovinu a třírozměrný prostor. Podaným způsobem náš text v žádném případě neaspiruje na učebnici vektorového počtu v geometrii. Jeho skromnějším cílem je pouze podat přehled pojmů a poznatků potřebných pro výklad příkladů a úloh v dalších kapitolách. Proto v textu neuvádíme ty důkazy, které jsou buď triviální, nebo naopak technicky náročné, zato však komentujeme, kdykoliv to považujeme za účelné, odlišnosti nebo souvislosti výkladu příslušného pojmu nebo poznatku ve školské a vyšší geometrii. Domníváme se, že právě tím vyjdeme vstříc středoškolským učitelům, kterým je naše metodicky zaměřená práce určena především. Svým žákům pak mohou předkládat ukázky aplikací vektorové algebry z dalších kapitol prakticky bez omezení, neboť jejich řešení (s nepatrnými výjimkami) neobsahují žádné poznatky nad rámec školské matematiky.

1.1 Vektorové a afinní prostory

K základní výbavě *vektorového počtu* patří, že vektory z téhož prostoru můžeme mezi sebou sčítat a násobit je skaláry (čísly). Při utváření představ o těchto operacích $\vec{u}+\vec{v}$ a $t\cdot\vec{u}$ měla prioritní roli první z nich; druhá operace byla odvozena z výsledků opakovaného sčítání téhož vektoru

$$\vec{u}+\vec{u}=2\cdot\vec{u}\,,\quad \vec{u}+\vec{u}+\vec{u}=3\cdot\vec{u}\,,\quad \dots$$

Fundamentální vlastnosti obou operací přivedly matematiky k definici abstraktního vektorového prostoru. Po její formulaci rovnou uvedeme stručný výčet pojmů a poznatků z lineární algebry, které jsou s definicí vektorového prostoru spojeny a které budeme v naší práci potřebovat. Teprve poté se budeme věnovat geometrické interpretaci vektorů a dvou zmíněných operací, která nás přivede k pojmu abstraktního afinního prostoru.

Definice 1.1.1: Nechť $\mathbf{R}$ je těleso reálných čísel a V množina (prvkům množiny V budeme říkat *vektory* a budeme je značit $\vec{v}$) s binární operací $V\times V\to V$, kterou budeme značit $+$. Dále nechť je definováno zobrazení $\mathbf{R}\times V\to V$, které $t\in\mathbf{R}$ a $\vec{v}\in V$ přiřadí prvek z množiny V, který budeme značit $a\cdot\vec{v}$, toto zobrazení budeme nazývat násobení prvku množiny V reálným číslem a značit jej $\cdot$. Nechť tyto dvě operace splňují následující axiomy

(i) $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V:\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,

(ii) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V:\quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$,

(iii) $\exists\vec{o}\in V,\ \forall\vec{u}\in V:\quad \vec{u}+\vec{o}=\vec{u}$,

(iv) $\forall\vec{u}\in V,\ \exists-\vec{u}\in V:\quad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{o}$,

(v) $\forall\vec{u},\vec{v}\in V,\ \forall t\in\mathbf{R}:\quad t(\vec{u}+\vec{v})=t\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$,

(vi) $\forall\vec{u}\in V,\ \forall t,s\in\mathbf{R}:\quad (t+s)\cdot\vec{u}=t\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{u}$,

(vii) $\forall\vec{u}\in V,\ \forall t,s\in\mathbf{R}:\quad (ts)\cdot\vec{u}=t\cdot(s\cdot\vec{u})$,

(viii) $\forall\vec{u}\in V:\quad 1\cdot\vec{u}=\vec{u}$.

Pak čtveřice $(V,+,\cdot,\mathbf{R})$ se nazývá *vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.* Vektor $\vec{o}$ popsaný v axiómu (iii) nazveme *nulový vektor* a vektor $-\vec{u}$ popsaný v axiómu (iv) *opačný vektor k vektoru $\vec{u}$.*

K uvedené definici především poznamenejme, že podle axiómů (i)–(iv) je $(V,+)$ komutativní grupa. Přitom axiómy (i) a (ii) jsou asociativní a komutativní zákony pro sčítání vektorů, (iii) a (iv) zavádí existenci nulového a opačného vektoru. Dále budeme psát místo $\vec{u}+(-\vec{v})$ jednoduše $\vec{u}-\vec{v}$, místo $t\cdot\vec{u}$ pak $t\vec{u}$. Běžně budeme také hovořit o vektorovém prostoru V místo přesného označení $(V,+,\cdot,\mathbf{R})$. Nebudeme tedy dále ani připomínat, že se vždy jedná o vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$.

Z axiomů vektorového prostoru plynou další jednoduchá pravidla:

$$0\vec{u} = \vec{o}\,, \qquad (-1)\vec{u} = -\vec{u}\,, \qquad (-t)\vec{u} = -t\vec{u}\,, \qquad -(-\vec{u}) = \vec{u}\,,$$

$$t(\vec{u} - \vec{v}) = t\vec{u} - t\vec{v}\,, \qquad (t-s)\vec{u} = t\vec{u} - s\vec{u}\,, \qquad t\vec{o} = \vec{o}\,.$$

Definice 1.1.2: Nechť V je vektorový prostor. Neprázdná podmnožina W množiny V se nazývá *podprostor vektorového prostoru* V, jestliže platí obě implikace

$$\text{(i) } \vec{u}, \vec{v} \in W \;\Rightarrow\; \vec{u} + \vec{v} \in W\,, \qquad \text{(ii) } \vec{u} \in W,\; t \in \mathbf{R} \;\Rightarrow\; t\vec{u} \in W\,.$$

Podprostorům $\{\vec{o}\}$ a V říkáme *triviální podprostory* prostoru V, ostatní podprostory nazýváme *netriviálními.*

Je jasné, že podprostor $W \subseteq V$ je sám vektorový prostor (s operacemi přenesenými z V). Rovněž zřejmým, avšak (nejen geometricky) významným důsledkem předchozí definice je vlastnost, že průnikem dvou podprostorů téhož vektorového prostoru je opět jeho podprostor.

Definice 1.1.3: Nechť V je vektorový prostor a $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \in V$, $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$. Vektor

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i$$

se nazývá *lineární kombinace vektorů* $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ s koeficienty $t_1, \ldots, t_k$.
Je-li $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ neprázdná podmnožina ve V, pak množinu všech lineárních kombinací vektorů množiny M nazveme *podprostor generovaný množinou* M (resp. *podprostor generovaný vektory* $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$) a budeme jej značit $\langle M \rangle = \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \rangle$.[1]

Definice 1.1.4: Podmnožina M vektorového prostoru V se nazývá *lineárně závislá,* pokud některý vektor množiny M lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů této množiny. V opačném případě se množina M nazývá *lineárně nezávislá.*[2]

Snadno se dokáže, že množina vektorů $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když nulový vektor lze vyjádřit jako netriviální lineární kombinaci vektorů této množiny, tedy když existují $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, pro která platí

$$t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_k\vec{u}_k = \vec{o}\,.$$

Při řešení úloh oceníme následující pravidlo: Jsou-li $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ lineárně nezávislé vektory, pak jejich lineární kombinace $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ dané rovnostmi

$$\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{k} t_{ij} \vec{u}_i$$

jsou lineárně závislé právě tehdy, když z koeficientů t_{ij} sestavená čtvercová matice $(t_{ij})_{i,j=1}^{k}$ má nulový determinant.

[1] Lze ukázat, že tato množina je opravdu vektorovým podprostorem a definice je tedy korektní.

[2] Často nemluvíme o množině a říkáme, že vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ jsou lineárně závislé, resp. lineárně nezávislé. Nevylučujeme ani, že pro některá $i \neq j$ platí $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ (pak je ovšem daná skupina vektorů lineárně závislá).

Definice 1.1.5: *Bází* vektorového prostoru V rozumíme každou jeho lineárně nezávislou množinu generátorů, tedy každou lineárně nezávislou množinu M s vlastností $\langle M\rangle = V$. Počet n vektorů báze $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru V, značíme ji $\dim V$.[3]

Z předchozí definice plyne, že množina $M = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ je bází vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\vec{x}$ tohoto vektorového prostoru lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů této množiny, neboli když existuje právě jedna posloupnost čísel $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$, pro niž platí

$$\vec{x} = t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n\,.$$

Těmto číslům t_i říkáme *souřadnice vektoru* $\vec{x}$ v dané (uspořádané) bázi M. Všechny vektory $\vec{x}$ prostoru V tak jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci se všemi uspořádanými n-ticemi reálných čísel $(t_1, \dots, t_n)$, které tvoří množinu $\mathbf{R}^n$, kartézský součin n exemplářů tělesa $\mathbf{R}$. Při této bijekci $V \to \mathbf{R}^n$ se operace vektorového součtu a násobení vektoru skalárem přenesou na $\mathbf{R}^n$ takto:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\,, \qquad t(x_1, \dots, x_n) = (tx_1, \dots, tx_n)$$

pro libovolné dvě n-tice $(x_1, \dots, x_n)$ a $(y_1, \dots, y_n)$ z $\mathbf{R}^n$ a každé $t \in \mathbf{R}$. Množina $\mathbf{R}^n$ s těmito operacemi se tak stává vektorovým prostorem, který je základem pro *souřadnicový model* n-rozměrného geometrického prostoru. O něm se později ještě zmíníme, nyní se však budeme věnovat vektorům ve školské geometrii.

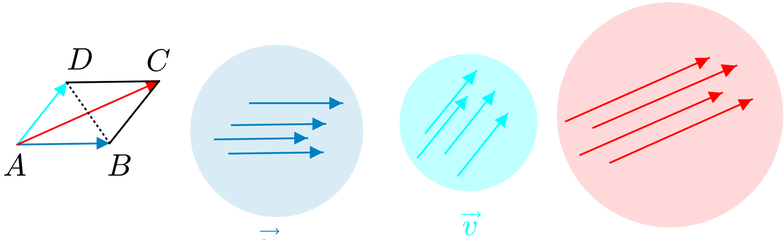
Jak jsme již zdůraznili, geometrie přímky, roviny a třírozměrného prostoru je ve škole budována syntetickou metodou, která však není důsledně deduktivní a axiomatická. Přijměme tedy poznatky školské matematiky o prostorech dimenze 1, 2 a 3 (jakožto množinách bodů) za výchozí a posuďme, jak se na tomto základě buduje aparát vektorů. Nejprve seznámíme žáky s pojmem *vázaného vektoru*. Rozumíme jím každou orientovanou úsečku $\overrightarrow{AB}$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B; tuto orientaci při kreslení naznačujeme šipkou u koncového bodu B.[4] Zvolíme-li v prostoru pevně bod O, pak každý vázaný vektor $\overrightarrow{OA}$ nazýváme *polohovým vektorem* příslušného bodu A, neboť tímto vektorem je poloha každého bodu A určena.

K dalšímu výkladu lze žáky motivovat konstatováním, že vázané vektory se společným počátečním bodem můžeme *sčítat* způsobem, který je z fyziky znám jako pravidlo rovnoběžníku (pro skládání sil): Součtem dvou daných vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ je ten vektor $\overrightarrow{AC}$, jehož koncový bod C tvoří s danými body A, B, D rovnoběžník $ABCD$. Rovnost $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ má významnou kinematickou interpretaci: Výsledný vektor $\overrightarrow{AC}$ určuje *posunutí* (celého prostoru), které je složením dvou posunutí, jež jsou určeny vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$. Tento druh žákům známého shodného zobrazení lze zadat libovolným z vázaných vektorů $\overrightarrow{XY}$, kde Y je obraz bodu X.

[3] Dá se ukázat, že má-li jedna báze daného prostoru n vektorů, musí každá jeho báze obsahovat právě n vektorů, definice dimenze je tedy korektní. Lineárními prostory, které žádnou konečnou bázi nemají, tedy prostory nekonečné dimenze, se v práci vůbec nebudeme zabývat.

[4] Úsečka se šipkou je dobrým znázorněním vázaného vektoru $\overrightarrow{AB}$, který však je – formálně vzato – uspořádanou dvojicí (A, B) libovolných dvou bodů téhož prostoru.

To nás přivádí k pojmu *volného vektoru* (který má různá *umístění* v podobě vázaných vektorů určujících totéž posunutí) a možnosti takové vektory sčítat, jak naznačujeme na obrázku napravo od rovnoběžníku $ABCD$.



$\vec{u}$ $\vec{v}$ $\vec{u}+\vec{v}$

Co mají vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ jako umístění téhož volného vektoru $\vec{u}$ společné? Žáky může překvapit, že odpověď – stejná délka, rovnoběžnost a stejná orientace – může být vyjádřena jedinou vlastností: Středy úseček AC a BD jsou totožné. Takové vázané vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ se ve středoškolských učebnicích nazývají *ekvipolentní*. Volný vektor $\vec{u}$ se pak definuje jako množina (třída) všech navzájem ekvipolentních vázaných vektorů $\overrightarrow{AB}$ určených body A, B téhož prostoru; od zápisu $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ pro umístění $\overrightarrow{AB}$ vektoru $\vec{u}$ (pokud se vůbec zavádí) se rychle přechází k méně formální rovnosti $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ a přívlastky *volný* a *vázaný* se vynechávají. Zavádí se též relace – vektor $\vec{u}$ leží na přímce p, resp. v rovině ϱ. Velice významnou je úmluva: Skutečnost, že (vázaný) vektor $\overrightarrow{AB}$ je umístěním (volného) vektoru $\vec{u}$, zapisujeme dvěma navzájem ekvivalentními způsoby

$$\vec{u} = B - A \qquad \text{a také} \qquad B = A + \vec{u}\,,$$

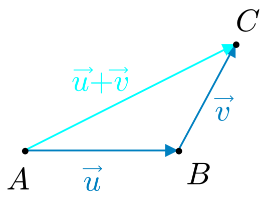
které žáci ocení jako rozumné později při vyjadřování bodů a vektorů souřadnicemi. Stojí za to hned žáky upozornit, že – pro daný bod A a daný vektor $\vec{u}$ – bod B z těchto rovností vždy existuje a je jediný. Říkáme tehdy, že bod B je koncovým bodem umístění vektoru $\vec{u}$ do počátečního bodu A.

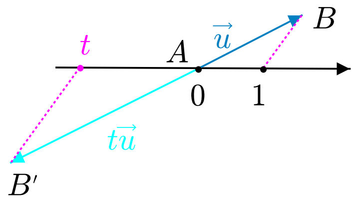
Dostáváme se ke školské definici vektorového součtu $\vec{u}+\vec{v}$: Jsou-li $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BC}$ umístění vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak vektorem $\vec{u}+\vec{v}$ nazýváme vektor s umístěním $\overrightarrow{AC}$. Tomu odpovídají zápisy[5]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \text{a také} \qquad (B - A) + (C - B) = C - A\,.$$

Z pohledu školské geometrie je celkem zřejmé, že takto zavedené sčítání vektorů je korektní operace na množině V všech volných vektorů spojených s daným prostorem a že jsou splněny axiomy (i)-(iv) z Definice 1.1.1. Přitom roli nulového vektoru $\vec{o}$ hraje vektor $\overrightarrow{AA}$; dva navzájem opačné vektory mají umístění $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BA}$. K druhé operaci násobení vektoru číslem uveďme: Je-li $\vec{u}$ vektor s umístěním $\overrightarrow{AB}$ a t libovolné reálné číslo, pak vektor $t\vec{u}$ je podle školské definice vektor s umístěním $\overrightarrow{AB'}$, kde B' je obraz bodu B ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem t; jeho konstrukci pomocí obrazu t na číselné ose vidíme na obrázku (červeně vyznačené úsečky jsou rovnoběžné).

[5] První zápis evokuje složení dvou posunutí „od A k B“ a „od B k C“, druhý zápis naznačuje, že při operacích $+$ a $-$ s body je možné provádět některé úpravy jako při operacích s čísly. Pojednáme o nich za chvíli podrobně.





Tímto způsobem se z množiny V všech volných vektorů (v přímce, rovině, či prostoru) stává vektorový prostor ve smyslu Definice 1.1.1. Tuto etapu exkurze do školské geometrie uzavřeme připomenutím terminologie spojené s lineární závislostí vektorů. Každé dva lineárně závislé vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ se v geometrii nazývají *kolineární*, jsou-li navíc nenulové, říkáme jim *rovnoběžné* vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. V tomto případě existuje číslo $t \neq 0$ takové, že $\vec{u} = t\vec{v}$; podle toho zda $t > 0$ nebo $t < 0$ mluvíme o *souhlasně rovnoběžných*, resp. *nesouhlasně rovnoběžných* vektorech $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Pro tři lineárně závislé vektory užíváme geometrický termín *komplanární* vektory.

Jak jsme již uvedli, výchozí strukturou v kurzech vyšší geometrie je obecný vektorový prostor. Teprve na něm je založena definice bodového prostoru jakožto abstraktní množiny, v níž je každé uspořádané dvojici prvků přiřazen vektor z téhož vektorového prostoru. Toto přiřazení musí pochopitelně splňovat podmínky, které máme ze školské geometrie dobře zažité.

Definice 1.1.6: Nechť $\mathcal{A}$ je neprázdná množina a V vektorový prostor konečné dimenze. Dále mějme zobrazení $f\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ splňující tyto podmínky:

(i) pro každé $A \in \mathcal{A}$ a každé $\vec{u} \in V$ existuje jediné $B \in \mathcal{A}$ takové, že $f(A,B) = \vec{u}$,

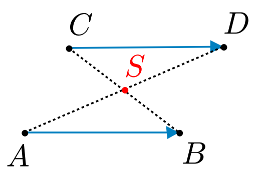
(ii) pro každá $A, B, C \in \mathcal{A}$ platí $f(A,B) + f(B,C) = f(A,C)$.

Pak trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ se nazývá *afinní prostor,* prvky množiny $\mathcal{A}$ nazýváme *body* a vektorový prostor V *zaměření afinního prostoru*, značíme jej $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Poznamenejme, že namísto formálního zapisování trojice $(\mathcal{A}, V, f)$ mluvíme o afinním prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V a zobrazení f zapisujeme stejně jako ve školské matematice rovností

$$f(A,B) = \overrightarrow{AB} = B - A\,, \qquad \text{takže} \qquad B = A + \vec{u} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}\,.$$

Pak se axiom (ii) definice afinního prostoru vyjádří známou rovností $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Vazbu mezi abstraktním pojetím afinního prostoru a předchozím výkladem školské geometrie ještě upevníme konstatováním, že v afinním prostoru $\mathcal{A}$ lze zavést pojem *středu* libovolné uspořádané dvojice bodů (A,B) a že pro libovolné čtyři body $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ rovnost $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nastane právě tehdy, když dvojice (A,D) a (B,C) jsou ekvipolentní, to jest mají společný střed.



Naznačme postup: Středem S dvojice bodů $A, B \in \mathcal{A}$ se nazývá takový bod $S \in \mathcal{A}$, pro který jsou vektory $\overrightarrow{AS}$ a $\overrightarrow{BS}$ navzájem opačné. Jeho existence, jednoznačnost a vyjádření

$$S = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

je důsledkem triviálních vztahů

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{BS} \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{AB}\,.$$

Ekvivalence rovností $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ a $A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ je pak důsledkem porovnání vyjádření

$$A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = A + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = A + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}) = B + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB})\,,$$

$$B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = B + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = B + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})\,.$$

Abychom uvedená odvození mohli zapisovat pohodlněji, totiž způsobem

$$(S - A) + (S - B) = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad 2S = A + B \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A + \frac{1}{2}(B - A)\,,$$

$$B - A = D - C \quad \Leftrightarrow \quad A + D = B + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(A + D) = \frac{1}{2}(B + C)\,,$$

pojednejme nyní o *lineárních kombinacích bodů*, tedy o výrazech

$$t_1A_1 + t_2A_2 + \cdots + t_kA_k\,,$$

kde $A_1, \ldots, A_k$ jsou body téhož afinního prostoru $\mathcal{A}$ a $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$. Zvolme libovolný bod $O \in \mathcal{A}$ a zkusme nejdříve uvedenou lineární kombinaci interpretovat jako vektor

$$\vec{u} = t_1\overrightarrow{OA_1} + t_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + t_k\overrightarrow{OA_k}\,.$$

Taková interpretace bude korektní, když při jiné volbě $O' \in \mathcal{A}$ dostaneme vektor

$$\vec{v} = t_1\overrightarrow{O'A_1} + t_2\overrightarrow{O'A_2} + \cdots + t_k\overrightarrow{O'A_k}\,,$$

který bude vždy shodný s vektorem $\vec{u}$. Z vyjádření

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} t_i\overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{k} t_i(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) = \left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\overrightarrow{O'O} + \vec{u}$$

vidíme, že rovnost $\vec{v} = \vec{u}$ bude platit pro každý bod O' právě tehdy, když bude součet koeficientů t_i roven nule. Dostáváme tak případ, kdy lineární kombinaci bodů budeme chápat jako vektor (v popsaném pojetí):

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} t_iA_i \in V\,.$$

(Je to ve shodě s dříve zavedeným rozdílem bodů: $1 \cdot B - 1 \cdot A = B - A = \overrightarrow{AB}$.) Ve druhém významném případě budeme lineární kombinaci bodů interpretovat jako bod, tedy

$$A = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \cdots + t_k A_k \,.$$

Dotyčný bod A zadáme polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OA} = t_1 \overrightarrow{OA_1} + t_2 \overrightarrow{OA_2} + \cdots + t_k \overrightarrow{OA_k} \,.$$

Bude to korektní postup, když takto určený bod A bude nezávislý na volbě bodu O, když tedy pro libovolné dva body O, O' bude platit

$$O + \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i} = O' + \sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{O'A_i} \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{OO'} = \left(\sum_{i=1}^{k} t_i \right) \overrightarrow{OO'} \,.$$

Vidíme, že tato rovnost nastane, pro každé O, O' právě tehdy, když bude součet koeficientů t_i roven jedné. To je hledaná podmínka pro případ bodové interpretace:

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} t_i A_i \in \mathcal{A} \,.$$

(Tak například dříve zavedený součet bodu a vektoru $A + \overrightarrow{BC}$ zapíšeme lineární kombinací $A + C - B$; z jejich koeficientů 1, 1, -1 se součtem 1 plyne, že tato kombinace má smysl a že určuje bod.)

Předchozí výklad nás opravňuje k následující definici, jejíž korektnost zvýrazníme zápisem vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ v dříve dohodnuté podobě rozdílů $A_i - O$.

Definice 1.1.7: Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou body afinního prostoru $\mathcal{A}$ a $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$. Zápisem

$$t_1 A_1 + t_2 A_2 + \cdots + t_k A_k$$

v případě $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 1$ rozumíme bod

$$O + t_1(A_1 - O) + t_2(A_2 - O) + \cdots + t_k(A_k - O) \,,$$

zatímco v případě $t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 0$ stejným zápisem rozumíme vektor

$$t_1(A_1 - O) + t_2(A_2 - O) + \cdots + t_k(A_k - O) \,,$$

přitom v obou případech je O libovolný bod v $\mathcal{A}$.

Zdůrazněme výhodu, kterou lineární kombinace bodů A_i s koeficienty t_i přinášejí. Protože se u obou interpretací jedná o zkrácený zápis lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ s koeficienty t_i, platí pro výpočty s lineárními kombinacemi bodů stejná pravidla jako při počítání s vektory, jako např. $t(A - B) = tA - tB$. Proto jsme lineární kombinace bodů posoudili natolik podrobně, budeme je totiž v řešení úloh často používat. Při úpravách budeme přitom někdy zapisovat i lineární kombinace bodů se součty koeficientů různými od 0 a 1 – rovnost

$$\sum_{i=1}^{k} t_i A_i = \sum_{j=1}^{l} s_j B_j$$

bude za předpokladu $\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{j=1}^{l} s_j$ znamenat, že rozdíl obou stran je kombinace rovná nulovému vektoru (taková je např. rovnost $2S = A + B$, uvedená výše).

Věnujme se nyní krátce otázce existence n-rozměrného afinního prostoru $\mathcal{A}_n$.[6] Kladnou odpověď dává jednoduchá konstrukce dříve slíbeného souřadnicového modelu, při níž položíme $\mathcal{A}_n = \mathbf{R}^n$. Body tohoto prostoru obvykle zapisujeme uspořádanými n-ticemi čísel (souřadnicemi) v hranatých závorkách; každé dvojici bodů (A, B), kde $A = [a_1, \ldots, a_n]$ a $B = [b_1, \ldots, b_n]$, pak přiřazujeme vektor

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

z vektorového prostoru $V_n = \mathbf{R}^n$ dimenze n, o kterém jsme již dříve psali. (Abychom prvky obou množin $\mathcal{A}_n = \mathbf{R}^n$ a $V_n = \mathbf{R}^n$ odlišili, zapisujeme souřadnice vektorů v kulatých závorkách.) Ověření obou axiomů (i) a (ii) z Definice 1.1.6 afinního prostoru je v tomto případě triviální.[7]

Vraťme se z oblasti teorie afinních prostorů znovu ke školské geometrii. V planimetrii prakticky neexistuje situace, kdy bychom nepracovali s takovými podmnožinami roviny, jako jsou přímky nebo její části (polopřímky a úsečky), ve stereometrii se k těmto útvarům připojují samotné roviny jakožto jisté podmnožiny třírozměrného prostoru.[8] Základní informaci o vzájemné poloze přímek a rovin vyjadřujeme pojmy *rovnoběžnost, různoběžnost a mimoběžnost.* Podívejme se proto, jak lze v afinních prostorech exaktně zavést přímky, roviny a další *afinní podprostory* a poté obecně klasifikovat jejich vzájemnou polohu třemi zmíněnými pojmy. Domníváme se, že takovýto nadhled by měl patřit k vědomostní výbavě každého učitele matematiky na střední škole. Kromě toho nám tato druhá část Podkapitoly 1.1 přinese i užitečné poznatky o tom, jakými vektorovými rovnostmi zapisovat např. kolinearitu či komplanárnost bodů nebo vyjadřovat uspořádanost bodů na přímce. To nám posléze v obecném afinním prostoru umožní definovat takové základní útvary školské geometrie, jako jsou úsečka, polopřímka, úhel, polorovina, trojúhelník, poloprostor a čtyřstěn.

Definice 1.1.8: Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor se zaměřením $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Nechť $\mathcal{B}$ je neprázdná podmnožina $\mathcal{A}$ a nechť $W = \{\overrightarrow{XY} : X, Y \in \mathcal{B}\}$. Jestliže platí

(i) W je vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$,

(ii) $\forall X \in \mathcal{B}\,, \forall \vec{u} \in W\,, \exists Y \in \mathcal{B}\colon\ \overrightarrow{XY} = \vec{u}$,

[6] Dimenzí každého afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

[7] Zdůrazněme, že uvedená konstrukce je podmíněna existencí tělesa $\mathbf{R}$, které ostatně vystupuje i v samotné definici 1.1.1 vektorového prostoru.

[8] V syntetické geometrii se přímky v rovině a roviny v prostoru zavádějí axiomaticky, v její školské verzi se ovšem vychází z intuitivních představ žáků o těchto útvarech.

pak $\mathcal{B}$ se nazývá *afinní podprostor v* $\mathcal{A}$ se zaměřením $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) = W$. Je-li $\dim W = 0$ (resp. 1, resp. 2, resp. $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{A}) - 1$), pak podprostor $\mathcal{B}$ nazýváme *bod* (resp. *přímka,* resp. *rovina,* resp. *nadrovina*). Podprostory v $\mathcal{A}$ různé od bodů a od $\mathcal{A}$ se nazývají *netriviální.*

Z Definice 1.1.8 ihned plyne, že afinní podprostor $\mathcal{B}$ prostoru $\mathcal{A}$ je jednoznačně určen kterýmkoliv svým bodem A_0 (tedy $A_0 \in \mathcal{B}$) a svým zaměřením $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$. Je-li $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ báze zaměření, pak podprostor $\mathcal{B}$ je množina všech bodů $X \in \mathcal{A}$ takových, že $\overrightarrow{A_0X} \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$, že tedy existují čísla $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\overrightarrow{A_0X} = t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_k\vec{u}_k\,, \qquad \text{neboli} \qquad X = A_0 + t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_k\vec{u}_k\,.$$

V takovém podprostoru leží body A_i určené rovnostmi $\overrightarrow{A_0A_i} = \vec{u}_i$, $i = 1, \dots, k$. Po dosazení $\vec{u}_i = A_i - A_0$ do předchozího vztahu dostaneme vyjádření obecného bodu $X \in \mathcal{B}$ rovností

$$X = (1 - t_1 - \cdots - t_k)A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k\,,$$

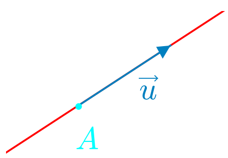
kterou obvykle zapisujeme ve výhodnějším tvaru

$$X = t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k\,, \qquad t_0 + t_1 + \cdots + t_k = 1\,.$$

V uvedeném parametrickém vyjádření k-rozměrného afinního podprostoru $\mathcal{B}$ je pak role bodů $A_0, A_1, \dots, A_k$ symetrická. Říkáme, že podprostor $\mathcal{B}$ je body $A_0, A_1, \dots, A_k$ *určen* (generován) a že tyto body *leží v obecné poloze.* Také tuto podmínku lineární nezávislosti vektorů $\overrightarrow{A_0A_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ lze vyjádřit symetricky: Za předpokladu $t_0 + \cdots + t_k = 0$ z rovnosti $t_0A_0 + \cdots + {}$ $+ t_kA_k = \vec{o}$ plyne $t_0 = \cdots = t_k = 0$.

Uvedené poznatky o obecných k-rozměrných podprostorech teď konkretizujeme a doplníme nejprve pro přímky, poté pro roviny, tedy pro afinní podprostory dimenzí $k = 1$, resp. $k = 2$, jak jsme je zavedli v definici 1.1.8. Přímka p je tedy každá podmnožina bodů X afinního prostoru $\mathcal{A}$, která je daná vztahem

$$p: \quad X = A + t\vec{u} \quad (t \in \mathbf{R})\,,$$



kde $A \in \mathcal{A}$ a $\vec{u} \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ je libovolný nenulový vektor, zvaný *směrový vektor* přímky p. Protože $\mathcal{Z}(p) = \langle \vec{u} \rangle$, jsou všechny směrové vektory téže přímky p nenulovými násobky jednoho z nich. Podle rovnosti $X = A + t\vec{u}$, která zadává vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi body $X \in p$ a čísly $t \in \mathbf{R}$, můžeme na každé přímce $p \subset \mathcal{A}$ zavést uspořádání bodů odpovídající uspořádání reálných čísel. V důsledku toho můžeme v obecném afinním prostoru definovat *úsečky* a *polopřímky*, které lze parametry popsat tak, že k rovnosti $X = A + t\vec{u}$ připojíme obor $t \in I$, kde $I \subset \mathbf{R}$ je vhodný interval. Dříve než to upřesníme, vraťme se k obecné přímce. Každé dva různé body $A, B \in \mathcal{A}$ určují jedinou přímku, která těmito body prochází. Říkáme jí přímka AB; její body mají vyjádření

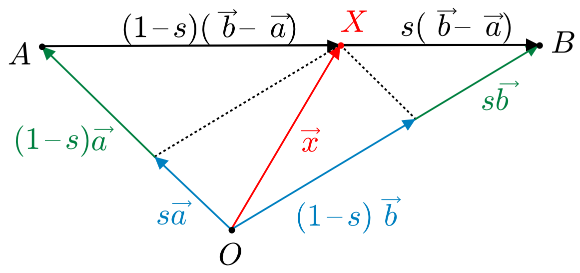
$$X = A + t(B - A) \quad (t \in \mathbf{R}), \qquad \text{neboli} \qquad X = sA + tB \quad (s, t \in \mathbf{R},\ s + t = 1).$$

Zaměníme-li $t \in \mathbf{R}$ za obor $t \in \langle 0, \infty)$, dostaneme vyjádření polopřímky AB. Častěji však budeme potřebovat vyjádření bodů úsečky AB, které odpovídá obor $t \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$AB: \quad X = A + t(B - A) = sA + tB \quad (s, t \in \langle 0, 1 \rangle,\ s + t = 1).$$

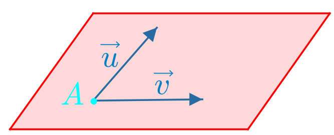
Významným bodem úsečky AB je její střed $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, který odpovídá parametrům $s = t = \frac{1}{2}$ a o kterém jsme podrobně pojednali dříve v souvislosti s ekvipolentními dvojicemi bodů. Na závěr pasáže o přímkách dodejme, že při řešení úloh budeme kolinearitu tří bodů A, B, C nejčastěji prokazovat lineární závislostí vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. V jiných úlohách budeme přímku či úsečku AB zapisovat rovností pro polohové vektory

$$\vec{x} = s\vec{a} + (1 - s)\vec{b}, \qquad \text{kde} \qquad \vec{x} = \overrightarrow{OX},\ \vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB}.$$



Přejděme od přímek k rovinám. Podle Definice 1.1.8 je rovina ϱ podmnožina bodů X afinního prostoru $\mathcal{A}$ určená vztahem

$$\varrho: \quad X = A + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad (s, t \in \mathbf{R}),$$



kde $A \in \mathcal{A}$ je daný bod a $\vec{u}, \vec{v}$ jsou dva lineárně nezávislé vektory, tvořící bázi $\mathcal{Z}(\varrho)$. Změny oboru $\mathbf{R}^2$ dvojic parametrů (s, t) na různé součiny intervalů $I \times J$, jako například

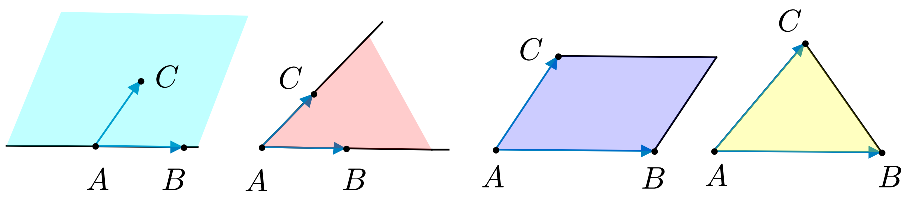
$$(s, t) \in \mathbf{R} \times \langle 0, \infty), \qquad (s, t) \in \langle 0, \infty) \times \langle 0, \infty), \qquad (s, t) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$$

nám v souladu se školskou geometrií dovolují zavést v obecném afinním prostoru takové podmnožiny, jako jsou polorovina, úhel, resp. rovnoběžník. Nejprve však zapišme vyjádření roviny ABC určené libovolnými nekolineárními body A, B, $C \in \mathcal{A}$. Patří do ní právě body

$$ABC: \quad X = A + s(B - A) + t(C - A) = rA + sB + tC \quad (r, s, t \in \mathbf{R},\ r + s + t = 1),$$

přitom následující doplňující omezení na parametry r, s, t určují

- polorovinu s hranicí AB a vnitřním bodem $C\colon t \geq 0$,
- úhel $BAC\colon s \geq 0$ a $t \geq 0$,
- rovnoběžník se stranami AB, $AC\colon s, t \in \langle 0, 1\rangle$,
- trojúhelník $ABC\colon r, s, t \in \langle 0, 1\rangle$.



Analogicky ve třírozměrném prostoru se čtyřmi nekomplanárními body A, B, C, D má každý bod X vyjádření

$$X = qA + rB + sC + tD \quad (q, r, s, t \in \mathbf{R}\,,\ q + r + s + t = 1)\,,$$

přitom následující doplňující omezení na koeficienty q, r, s, t určují

- poloprostor s hraniční rovinou ABC a vnitřním bodem $D\colon t \geq 0$,
- trojhran určený polopřímkami AB, AC, $AD\colon r, s, t \geq 0$,
- rovnoběžnostěn s hranami AB, AC, $AD\colon r, s, t \in \langle 0, 1\rangle$,
- čtyřstěn $ABCD\colon q, r, s, t \in \langle 0, 1\rangle$.

Celou podkapitolu o afinních prostorech uzavřeme slíbeným stručným posouzením pojmů rovnoběžnost, různoběžnost a mimoběžnost.

Definice 1.1.9: Nechť $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou podprostory afinního prostoru $\mathcal{A}$. Je-li $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ nebo $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{B})$, pak podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ nazýváme *rovnoběžné* a značíme $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$. V opačném případě píšeme $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}$.

Jestliže $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}$ a $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \{\vec{o}\}$, pak podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ nazýváme *různoběžné*. Jestliže $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}$ a $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \{\vec{o}\}$, pak podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ nazýváme *mimoběžné*.

Zdůrazněme, že podle předchozí definice jsou dva podprostory rovnoběžné i v případě, kdy jsou totožné, i v případě, kdy jeden podprostor je vlastní podmnožinou druhého podprostoru (někdy se takové podprostory nazývají *incidentní* – příkladem je dvojice tvořená rovinou a v ní ležící přímkou). O dvojicích rovnoběžných vektorů jsme mluvili již dříve; říkáme také, že vektor $\vec{u}$ je rovnoběžný s podprostorem $\mathcal{B}$, jestliže platí $\vec{u} \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$.

Snadno si rozmyslíme, že různoběžnost či rovnoběžnost dvou přímek i dvou rovin, stejně jako různoběžnost či rovnoběžnost přímky a roviny nebo mimoběžnost dvou přímek je podle Definice 1.1.9 v souladu se syntetickými pravidly školské geometrie třírozměrného prostoru. Pro jejich všeobecnou známost je zde uvádět nebudeme.

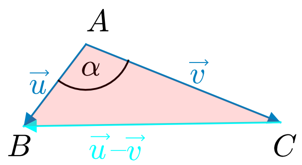
1.2 Prostory se skalárním součinem

Prakticky od prvních hodin geometrie na základní škole rozvíjíme u žáků představy o skalární veličině zvané *délka úsečky* vyjadřující *vzdálenost* jejích krajních bodů. Brzy poté se v učivu objevuje druhá skalární veličina, kterou poměřujeme *velikost úhlu.* Jejich společnou základní vlastností je, že se při přemísťování útvarů v rovině či prostoru nemění (odborněji vyjádřeno, jsou to *invarianty shodných zobrazení*). Vyjmenujme heslovitě etapy, kterými školská geometrie postupně rozšiřuje poznatky o těchto dvou veličinách: vyjadřování délek úseček a velikostí úhlů čísly udávajícími násobky zvolených jednotek, Pythagorova věta, zavedení goniometrických funkcí na základě podobnosti trojúhelníků, sinová a kosinová věta. Zmíněné výsledky prokazují, že délky úseček a velikosti úhlů jsou v jistém smyslu nerozlučně spojené geometrické pojmy. Zkoumání závislosti mezi vzdálenostmi různých dvojic bodů bez „úhlových“ charakteristik je totiž možné, jen když všechny uvažované body leží v jedné přímce. Podívejme se nyní, jak tyto *metrické vztahy* lze z pohledu školské geometrie popsat a efektivně zkoumat pomocí vektorů. Budeme k tomu potřebovat novou operaci vektorového počtu, které říkáme *skalární součin* dvou vektorů.

Mějme tedy dány tři nekolineární body A, B, C. Jak víme, jejich vzájemné vzdálenosti jsou podle kosinové věty svázány rovností

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos\alpha\,,$$

kde $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ je velikost vnitřního úhlu u vrcholu A trojúhelníku ABC.



Jsou-li $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ umístěním nenulových vektorů, které označíme po řadě $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak je $\overrightarrow{CB}$ umístěním vektoru $\vec{u}-\vec{v}$. Úhel α můžeme nazvat *odchylkou vektorů* $\vec{u}$ a $\vec{v}$, neboť jeho velikost zřejmě na umístění vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nezáleží. Ze stejného důvodu můžeme pro každý vektor $\vec{w}$ definovat velikost vektoru $\vec{w}$ vztahem $|\vec{w}| = |XY|$, kde $\overrightarrow{XY}$ je libovolné umístění $\vec{w}$. Dostáváme tak rovnost

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2f(\vec{u},\vec{v})\,, \qquad \text{kde} \qquad f(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha\,.$$

Zavedené zobrazení f s oborem hodnot $\mathbf{R}$ hraje – na první pohled poněkud překvapivě – v řešení nastoleného problému metrických vztahů rozhodující roli. Aby bylo f definováno pro každou dvojici $\vec{u}$ a $\vec{v}$, položíme ještě $f(\vec{u},\vec{v}) = 0$ v případě $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$, $f(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ v případě souhlasně rovnoběžných vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ (pro něž klademe $\alpha = 0$) a $f(\vec{u},\vec{v}) = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$ v případě nesouhlasně rovnoběžných vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ ($\alpha = \pi$). Popisný význam zobrazení f je zřejmý, můžeme jím vyjádřit jak libovolnou délku (vzdálenost bodů)

$$|AB| = \sqrt{f(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}\,,$$

tak – prostřednictvím funkce kosinus – velikost libovolného úhlu z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$

$$\cos |\sphericalangle BAC| = \frac{f(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|AB| \cdot |AC|} .$$

Zdůrazněme, že jde o dvě triviální rovnosti, zapsané pouze v nově zavedeném označení. Skutečný význam zobrazení f získá teprve poté, co odvodíme jeho významné vlastnosti, které z něj učiní efektivní prostředek výpočtů. Vyjadřují je vztahy

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u}) , \qquad f(t\vec{u}, \vec{v}) = t f(\vec{u}, \vec{v}) , \qquad f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$$

platné pro libovolné tři vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ a libovolné číslo $t \in \mathbf{R}$. Zatímco důkazy prvních dvou rovností jsou zřejmé (u druhé z nich je třeba rozlišit případy $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$), ověřit třetí rovnost prostředky školské geometrie vyžaduje jisté úsilí. Dokážeme-li to bez užití kosinové věty, stanou se vlastnosti zobrazení f prostředkem jejího nového „vektorového“ důkazu. Pro libovolné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ bude platit

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = f(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{u}, \vec{v}) - f(\vec{v}, \vec{u}) + f(\vec{v}, \vec{v}) =$$

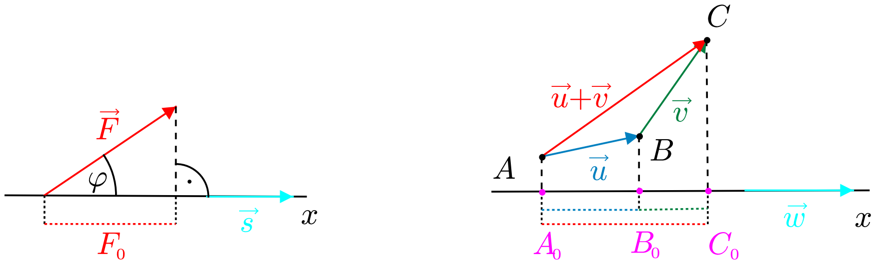
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2f(\vec{u}, \vec{v}) ,$$

což je právě rovnost, do které jsme kosinovou větu výše přepsali. Již tato první ukázka naznačuje, jakým účinným prostředkem geometrických výpočtů zobrazení f zvané *skalární součin* bude. Jeho hodnoty, čísla $f(\vec{u}, \vec{v})$, budeme značit běžným způsobem, bez „zbytečného“ symbolu f jako $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Slíbený syntetický důkaz vztahu $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ uvedeme významným příkladem skalárního součinu ve fyzice. Působí-li síla $\overrightarrow{F}$ po přímočaré dráze dané vektorem posunutí $\vec{s}$, pak práce W síly $\overrightarrow{F}$ po této dráze je dána vztahem

$$W = \langle \overrightarrow{F}, \vec{s} \rangle = |\overrightarrow{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi ,$$

kde φ je odchylka vektorů $\overrightarrow{F}$ a $\vec{s}$. Hodnota W je tedy rovna součinu délky s dráhy (na které síla působí) a (orientovaného) kolmého průmětu $F_0 = |\overrightarrow{F}| \cos \varphi$ vektoru $\overrightarrow{F}$ do směru vektoru $\vec{s}$.



Podobným způsobem lze v případě nenulového vektoru $\vec{w}$ interpretovat i skalární součiny

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle\,, \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\,, \qquad \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle\,,$$

totiž jako součiny velikosti vektoru $\vec{w}$ po řadě se souřadnicemi kolmých průmětů vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ do osy x souhlasně rovnoběžné s vektorem $\vec{w}$. Při označení zřejmém z obrázku jsou tyto hodnoty (délky opatřené znaménky + či −) rovny po řadě $b_0 - a_0$, $c_0 - b_0$ a $c_0 - a_0$, kde a_0, b_0, c_0 jsou souřadnice kolmých průmětů bodů A, B, C na osu x, takže platí

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = (b_0 - a_0)\cdot|\vec{w}| + (c_0 - b_0)\cdot|\vec{w}| = (c_0 - a_0)\cdot|\vec{w}| = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle\,.$$

Potřebný důkaz je tedy hotov, neboť v případě $\vec{w} = \vec{o}$ je dokazovaná rovnost triviální.[9] Tímto náš úvodní výklad o skalárním součinu z pohledu školské geometrie končí. Věnujme se nyní abstraktnímu pojetí této nové vektorové operace.

Definice 1.2.1: Nechť V je vektorový prostor (nad tělesem $\mathbf{R}$), který má konečnou dimenzi. *Skalárním součinem na* V nazveme každé zobrazení $f\colon V\times V \to \mathbf{R}$, které splňuje následující axiomy:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon \quad f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V\colon \quad f(\vec{u}+\vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbf{R}\colon \quad f(t\vec{u}, \vec{v}) = t\cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iv) $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} \neq \vec{o}\colon \quad f(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Pak dvojice (V, f) se nazývá *eukleidovský vektorový prostor*. Stručně budeme hovořit o eukleidovském prostoru V a namísto $f(\vec{u}, \vec{v})$ budeme psát $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, jak už jsme naznačili dříve.[10]

Z axiomu (iii) vyplývá, že je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, pak platí $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Dohromady s axiomem (iv) to pak znamená, že

$$\forall \vec{u} \in V\colon \quad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0\,,$$

přitom rovnost nastane právě tehdy, když $\vec{u} = \vec{o}$. Z axiomů (i)–(iii) lze snadno odvodit důležité „roznásobovací“ pravidlo

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{n} t_i \vec{u}_i, \sum_{j=1}^{m} s_j \vec{v}_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_i s_j \langle \vec{u}_i, \vec{v}_j \rangle$$

platné pro libovolné vektory $\vec{u}_i, \vec{v}_j \in V$ a čísla $t_i, s_j \in \mathbf{R}$.

Definice 1.2.2: Nechť $\vec{u}$ je libovolný vektor z eukleidovského prostoru V. Nezáporné reálné číslo $\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ nazýváme *velikostí vektoru* $\vec{u}$ a značíme ji

$$|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\,. \tag{1.1}$$

Jestliže $|\vec{u}| = 1$, říkáme, že vektor $\vec{u}$ je *jednotkový.*

---

[9] Upozorněme, že provedený názorný důkaz pomocí kolmých průmětů A_0, B_0, C_0 je korektní i v případě, kdy vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$,$\vec{w}$ nejsou komplanární, přestože doprovodný obrázek znázorňuje rovinou situaci.

[10] Definice 1.2.1 vlastně říká, že skalární součin na reálném vektorovém prostoru je symetrická pozitivně definitní bilineární forma.

Jistě platí $|\vec{o}| = 0$ a $|\vec{u}| > 0$ pro každý vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$. Rovnost $|t\vec{u}| = t|\vec{u}|$ platí pro každý vektor $\vec{u}$ a každé číslo $t \geq 0$; v případě $t < 0$ máme $|t\vec{u}| = -t|\vec{u}|$. Odtud plyne, že pro každý vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$ je $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$ jednotkový vektor, který je s vektorem $\vec{u}$ souhlasně rovnoběžný.

Z axiomů eukleidovského prostoru lze dokázat, že velikosti dvou vektorů a jejich skalární součin splňují významný vztah, který hraje v dalším budování geometrie klíčovou roli. Nazývá se *Cauchyova-Schwarzova nerovnost* a je výhodné ji zapsat ve tvaru

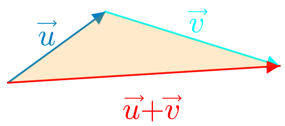
$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \,. \tag{1.2}$$

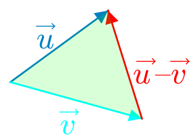
Zdůrazněme, že obě nerovnosti v (1.2) platí pro *libovolné* dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ téhož eukleidovského prostoru.[11] Pro *nenulové* vektory nastane v levé, resp. pravé nerovnosti rovnost právě tehdy, když vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou nesouhlasně, resp. souhlasně rovnoběžné. (V případě $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$ jsou samozřejmě všechny tři porovnávané hodnoty rovny nule.)

Jako první důsledek Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti uvedeme, že pro libovolné dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ téhož eukleidovského prostoru platí tzv. *trojúhelníková nerovnost*

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \,. \tag{1.3}$$

Rovnost v ní nastane právě tehdy, když je buď alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, nebo když jsou (nenulové) vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ souhlasně rovnoběžné.





Protože tento výsledek budeme při řešení některých úloh využívat, uvedeme jeho krátký důkaz. Díky pravé nerovnosti v (1.2) můžeme psát

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| + |\vec{v}|^2 = (|\vec{u}| + |\vec{v}|)^2 \,,$$

odkud po odmocnění dostáváme kýžený výsledek. Zaměníme-li vektor $\vec{v}$ opačným vektorem $-\vec{v}$, dostaneme obměněnou trojúhelníkovou nerovnost

$$|\vec{u} - \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \,,$$

v níž kromě případů $\vec{u} = \vec{o}$, $\vec{v} = \vec{o}$ nastane rovnost jedině tehdy, když vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou nesouhlasně rovnoběžné.

Daleko významnějším důsledkem Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti je skutečnost, že díky ní můžeme v obecném eukleidovském prostoru zavést stěžejní geometrický pojem, totiž velikost úhlu (samotné úhly lze uvažovat i v afinním prostoru, jak jsme poznali v Podkapitole 1.1).

[11] Standardní důkaz, založený na nerovnosti $\langle t\vec{u} + s\vec{v}, t\vec{u} + s\vec{v} \rangle \geq 0$ platné pro libovolné $t, s \in \mathbf{R}$, je dobře znám, a proto ho zde nebudeme uvádět.

K této skalární veličině ve školské geometrii přistupujeme na základě toho, že samotné úhly lze zřejmými konstrukcemi porovnávat a sčítat, což vede k vyjadřování velikosti úhlu pomocí délky oblouku, který úhel vytíná na jednotkové kružnici se středem ve vrcholu úhlu. Ve vyšší geometrii je obvyklé, jak vzápětí ukážeme, definovat velikost úhlu z hodnoty jejího kosinu; přitom je významné zdůraznit, že potřebná funkce $y = \cos x$ může být v matematické analýze zavedena jako funkce reálné proměnné x bez její úhlové interpretace (například pomocí mocninné řady). Lze ukázat, že oba naznačené přístupy k pojmu velikosti (či míry) úhlu jsou ekvivalentní. Při druhém přístupu je výchozím krokem následující definice.

Definice 1.2.3: *Odchylkou* dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ z téhož eukleidovského prostoru V nazýváme úhel φ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ určený rovností

$$\cos \varphi = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \,. \tag{1.4}$$

Poznamenejme především, že existence a jednoznačnost úhlu φ z uvedené definice je důsledkem vlastnosti funkce kosinus (jež je bijekcí $\langle 0, \pi \rangle \to \langle -1, 1 \rangle$) a Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, podle které se extrémní odchylky $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ dosahují právě na těch dvojicích vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, jež jsou souhlasně, resp. nesouhlasně rovnoběžné. Z téže definice rovněž plyne geometrická interpretace skalárního součinu v podobě rovnosti

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi \,, \tag{1.5}$$

které jsme se již dříve podrobněji věnovali a kterou při řešení úloh obzvláště oceníme v případě $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$: *Skalární součin dvou jednotkových vektorů je roven kosinu jejich odchylky.* Zavedená odchylka dvou vektorů je prostředkem, který posléze umožňuje definovat další odchylky mezi geometrickými objekty, jakými jsou přímky, roviny či obecné podprostory. Ty nejdůležitější z nich popíšeme, až přejdeme od vektorových k bodovým prostorům.

Zdůrazněme, že dosud zavedené pojmy spojené s vektorovým eukleidovským prostorem jsou v plném souladu s poznatky školské geometrie o metrických vztazích, které jsme podrobně komentovali již dříve. Znamená to, že například kosinová věta (a tedy i Pythagorova věta jako její zvláštní případ) bude platit i pro trojúhelníky ležící v prostorech dimenze větší než 3, přestože velikosti vektorů a jejich odchylky v takových prostorech jsou matematickou abstrakcí, ke které nám chybí názorné představy spojené s fyzikální realitou světa, v němž žijeme. Dodejme, že model n-rozměrného eukleidovského prostoru dostaneme, když v souřadnicovém prostoru $V = \mathbf{R}^n$ definujeme skalární součin například předpisem [12]

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + v_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

pro libovolné dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Prověrka všech axiomů z Definice 1.2.1 je triviální.

[12] V jednom vektorovém prostoru lze definovat skalární součin nekonečně mnoha způsoby. V konkrétních situacích zpravidla vystačíme s jedním z těchto způsobů, takže zjednodušení zápisu $f(\vec{u}, \vec{v})$ na $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ nevede k nedorozumění.

Věnujme se nyní obecnému pojetí *kolmosti*, jednomu ze základních a prakticky nejpotřebnějších geometrických pojmů, který v prostorech se skalárním součinem (nejen těch s konečnou dimenzí) [13] hraje zásadní roli.

Definice 1.2.4: Nechť V je eukleidovský prostor. Řekneme, že vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ jsou *ortogonální (navzájem kolmé),* jestliže je jejich skalární součin roven nule. Podmnožina $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ eukleidovského prostoru V se nazývá *ortogonální,* jsou-li ortogonální každé dva její různé vektory.[14] Množina vektorů $M = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ se nazývá *ortonormální,* je-li ortogonální a každý její vektor je jednotkový. Báze, která je ortogonální, resp. ortonormální množinou, se nazývá *ortogonální, resp. ortonormální báze.*

Souvislost mezi definicemi 1.2.3 a 1.2.4 je zřejmá: Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou navzájem kolmé (což zapisujeme jako $\vec{u} \perp \vec{v}$), právě když je jejich odchylka rovna $\frac{\pi}{2}$. Podle druhé definice však platí rovněž $\vec{u} \perp \vec{o}$ pro každý vektor $\vec{u}$, dokonce tedy i $\vec{o} \perp \vec{o}$. Nejde o nedopatření, ale naopak o výhodnou úmluvu pro další teorii i řešené příklady.

Jaký užitek přinášejí ortogonální množiny vektorů? Počítáme-li s různými lineárními kombinacemi stejné skupiny vektorů $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$, pak skalární součin takových dvou kombinací má v případě, kdy je dotyčná skupina vektorů ortogonální, jednoduché vyjádření

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i, \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{u}_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} t_i s_i |\vec{u}_i|^2$$

s řadou důsledků. Předně volbou $t_i = s_i$ docházíme k tvrzením, že nenulové ortogonální vektory jsou vždy lineárně nezávislé a že pro velikost libovolné jejich lineární kombinace platí vzorec

$$\Big| \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i \Big| = \sum_{i=1}^{k} t_i^2 |\vec{u}_i|^2$$

připomínající Pythagorovu větu. Obě poslední vyjádření se ještě zjednoduší, jsou-li vektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ ortonormální, a to do tvaru

$$\Big\langle \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i, \sum_{i=1}^{k} s_i \vec{u}_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{k} t_i s_i \qquad \text{a} \qquad \Big| \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{u}_i \Big| = \sum_{i=1}^{k} t_i^2 \,. \tag{1.6}$$

Dodejme, že ortonormální skupinu vektorů snadno získáme z ortogonální skupiny vektorů tím, že každý její vektor $\vec{u}$ „normujeme“, tj. zaměníme (jednotkovým) vektorem $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$. Bez důkazu uveďme, že v každém nenulovém eukleidovském prostoru V existuje ortonormální báze a že do takové báze lze doplnit každou ortonormální skupinu vektorů, která sama není bází (a má tedy méně než $\dim V$ prvků).

Lineární kombinace vektorů báze, pomocí kterých vyjadřujeme libovolné vektory daného prostoru, mají v případě ortonormální báze koeficienty, jež lze vyjádřit pomocí skalárních součinů

[13] Dobře známo je uplatnění kolmosti při výkladu teorie Fourierových řad funkcí.

[14] Často mluvíme o ortogonálních (navzájem kolmých) vektorech $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$.

zvláště jednoduchým a prakticky užitečným způsobem. Je-li totiž $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ ortonormální báze eukleidovského prostoru V, pak každý vektor $\vec{v} \in V$ má vyjádření

$$\vec{v} = t_1\vec{u}_1 + \cdots + t_n\vec{u}_n\,, \qquad \text{kde } t_i = \langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle\,, \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n\,. \tag{1.7}$$

Skutečně, koeficienty t_i (jejichž existence a jednoznačnost plyne z definice báze) určíme, když vypsanou lineární kombinaci pro vektor $\vec{v}$ vynásobíme jednotlivými bázovými vektory $\vec{u}_i$: Pro každé $i = 1, \ldots, n$ tak dostaneme

$$\langle \vec{v}, \vec{u}_i \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} t_j\vec{u}_j, \vec{u}_i \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} t_j \langle \vec{u}_j, \vec{u}_i \rangle = t_i\,.$$

Tím je vzorec (1.7) pro *souřadnice vektorů* v jakékoliv ortonormální bázi dokázán. Vzorce (1.6) pak umožňují počítat z těchto souřadnic velikosti vektorů a jejich skalární součiny. Jsou proto pro každého uživatele analytické geometrie nepostradatelné.

Z deskriptivní geometrie si pamatujeme, jaký význam mají *kolmé průměty* útvarů (na přímku nebo rovinu). V obecném podání je jejich popis založen na následujícím pojmu.

Definice 1.2.5: Nechť W je podprostor eukleidovského prostoru V. Pak množina všech vektorů z V kolmých na libovolný vektor z W, neboli množina

$$W^{\perp} = \{\vec{x} \in V\colon\ \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ pro každé } \vec{v} \in W\}$$

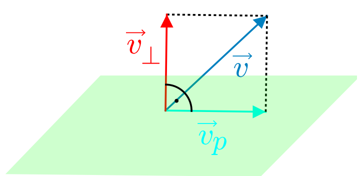
se nazývá *ortogonální doplněk podprostoru W.*

Množina $W^{\perp}$ je vždy neprázdná (neboť $\vec{o} \in W^{\perp}$) a je zřejmé, že je vždy podprostorem téhož vektorového prostoru V, jako podprostor W, se kterým má navíc společný jediný prvek – totiž vektor $\vec{o}$. Vztah podprostorů W a $W^{\perp}$ k sobě navzájem i k celému prostoru V lze vyjádřit významnou vlastností: Ke každému vektoru $\vec{v} \in V$ existují jednoznačně určené vektory $\vec{v}_p \in W$ a $\vec{v}_{\perp} \in W^{\perp}$ takové, že

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_{\perp}\,. \tag{1.8}$$

Platí pro ně vztahy

$$\langle \vec{v}_p, \vec{v}_{\perp} \rangle = 0 \qquad \text{a} \qquad |\vec{v}|^2 = |\vec{v}_p|^2 + |\vec{v}_{\perp}|^2\,.$$



Vektor $\vec{v}_p$ nazýváme *kolmým průmětem vektoru $\vec{v}$ na podprostor W*. Rovnost $\vec{v}_p = \vec{v}$, resp. $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}$ nastane zřejmě právě tehdy, když $\vec{v} \in W$, resp. $\vec{v} \in W^{\perp}$. Tvrzení o rozkladu (1.8) a vyjádření

„složkových“ vektorů $\vec{v}_p$ a $\vec{v}_\perp$ odvodíme, když zvolenou ortonormální bázi $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ podprostoru W doplníme vektory $\vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n$ do ortonormální báze $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ celého prostoru V. Pak zřejmě $\vec{w}_{k+1}, \dots, \vec{w}_n \in W^\perp$ a pro každý vektor $\vec{v} \in W$ podle (1.7) platí

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle \, \vec{w}_i = \vec{v}_p + \vec{v}_\perp \,,$$

kde

$$\vec{v}_p = \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle \, \vec{w}_i \, \in W \,, \qquad \vec{v}_\perp = \sum_{i=k+1}^{n} \langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle \, \vec{w}_i \, \in W^\perp \,. \tag{1.9}$$

Tím je existence rozkladu (1.8) dokázána; jeho jednoznačnost je zřejmá. Zapišme ještě vzorce (1.9) pro případy, kdy má některý z podprostorů W, $W^\perp$ dimenzi rovnu jedné. Je-li $W = \langle \vec{w} \rangle$, resp. $W^\perp = \langle \vec{n} \rangle$, platí

$$\vec{v}_p = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w} \,, \qquad \text{resp.} \qquad \vec{v}_\perp = \frac{\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \tag{1.10}$$

(bázové vektory $\vec{w}$, $\vec{n}$ je nutné před aplikací (1.9) normovat).

Zmiňme se ještě o jedné vlastnosti kolmého průmětu $\vec{v}_p$, kterou později oceníme při výkladu pojmu vzdálenosti bodu od podprostoru. Ukážeme, že hodnota $|\vec{v} - \vec{w}|$, kde $\vec{w}$ probíhá podprostor W, je minimální právě pro vektor $\vec{w} = \vec{v}_p$. Skutečně, z $\vec{v}_\perp \perp \vec{v}_p$ a $\vec{v}_\perp \perp \vec{w}$ plyne $\vec{v}_\perp \perp \vec{v}_p - \vec{w}$, takže díky Pythagorově větě platí:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |(\vec{v} - \vec{v}_p) + (\vec{v}_p - \vec{w})|^2 = |\vec{v}_\perp + (\vec{v}_p - \vec{w})|^2 = |\vec{v}_\perp|^2 + |\vec{v}_p - \vec{w}|^2 \ge |\vec{v}_\perp|^2 \,.$$

Odtud po odmocnění dostáváme $|\vec{v} - \vec{w}| \ge |\vec{v}_\perp|$ pro každé $\vec{w} \in W$, s rovností jedině pro $\vec{w} = \vec{v}_p$.

Přehled poznatků o (vektorových) eukleidovských prostorech uzavřeme významným rozšířením relace kolmosti.

Definice 1.2.6: Nechť W a S jsou netriviální podprostory eukleidovského prostoru V. Je-li $W \subseteq S^\perp$ nebo $S^\perp \subseteq W$, pak podprostory W, S nazýváme *navzájem kolmé.* Je-li $W = S^\perp$, pak podprostory W, S nazýváme *navzájem totálně kolmé.*

K předchozí definici poznamenejme, že díky zřejmým ekvivalencím

$$W \subseteq S^\perp \Leftrightarrow S \subseteq W^\perp \,, \qquad S^\perp \subseteq W \Leftrightarrow W^\perp \subseteq S \,, \qquad W = S^\perp \Leftrightarrow S = W^\perp$$

je relace kolmosti dvou podprostorů symetrická a že zapsané podmínky mohou být splněny po řadě v případech

$$\dim W + \dim S \le \dim V \,, \qquad \dim W + \dim S \ge \dim V \,, \qquad \dim W + \dim S = \dim V \,.$$

První ze tří podmínek má jasný význam: Kolmost $\vec{w} \perp \vec{s}$ platí pro každé dva vektory $\vec{w} \in W$ a $\vec{s} \in S$. Druhá podmínka může působit překvapivěji, je však uplatněním první podmínky na dvojici podprostorů $W^\perp$ a $S^\perp$. I ona proto má svoji „stopu“ ve školské geometrii. Stačí si uvědomit, jak se definuje kolmost dvou rovin v prostoru (dimenze 3).

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom poznatky o eukleidovských vektorových prostorech využili k vybudování teorie eukleidovských bodových prostorů jakožto speciálních afinních prostorů, kterým jsme v jejich obecné podobě věnovali Podkapitolu 1.1.

Definice 1.2.7: Nechť $\mathcal{E}$ je afinní prostor se zaměřením V a $f\colon V \times V \to \mathbf{R}$ je skalární součin na V. Pak trojici $(\mathcal{E}, V, f)$ nazveme *eukleidovským bodovým prostorem* (se zaměřením V a skalárním součinem f). Stručně budeme hovořit o eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$ a pro každé čtyři body A, B, C, $D \in \mathcal{E}$ budeme psát

$$f(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right\rangle,$$

jak už jsme si zvykli hodnoty skalárního součinu vektorů zapisovat.

Zdůrazněme, že v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$ máme (jako v každém afinním prostoru) nadefinovány úsečky a všechny další geometrické útvary popsané v Podkapitole 1.1. Novým základním pojmem, který jsme v afinních prostorech postrádali, je pojem *vzdálenosti dvou bodů.*

Definice 1.2.8: Nechť A, B jsou libovolné dva body v eukleidovském prostoru $\mathcal{E}$. Číslo $|\overrightarrow{AB}|$ nazýváme *vzdáleností bodů A, B* nebo také *délkou úsečky AB* a budeme jej dále v obou významech označovat stejným symbolem $|AB|$.

Z vlastností skalárního součinu ihned plyne, že pro každé tři body $A, B, C \in \mathcal{E}$ platí:

(i) $|AB| = |BA| \geq 0$;

(ii) $|AB| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = B$;

(iii) $|AC| \leq |AB| + |BC|$;

(iv) $|AC| = |AB| + |BC| \;\Leftrightarrow\; B$ leží na úsečce AC.

Vlastnosti (i)–(iii) znamenají, že eukleidovský prostor $\mathcal{E}$ se zavedenou vzdáleností bodů tvoří *metrický prostor*. Není bez zajímavosti, že výlučně pomocí vzdálenosti bodů lze charakterizovat i *střed* každé *úsečky* – pojem, který jak víme, vystupuje v základní definici ekvipolentních dvojic bodů afinního prostoru. Středem úsečky AB pro libovolné dva body A, $B \in \mathcal{E}$ je totiž jediný bod $X \in \mathcal{E}$ splňující podmínku

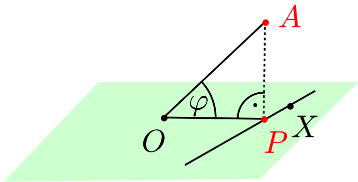
$$|AX| = |BX| = \frac{1}{2}|AB|\,.$$

Věnujme se nyní přenosu eukleidovské relace *kolmosti* z vektorových do bodových prostorů.

Definice 1.2.9: Nechť $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou netriviální podprostory eukleidovského bodového prostoru $\mathcal{E}$. Řekneme, že podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou *navzájem kolmé,* jsou-li navzájem kolmá jejich zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ podle definice 1.2.6. Tehdy píšeme $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$. V případě, kdy zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ jsou totálně kolmá, říkáme totéž i o podprostorech $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

Je jasné, že dvě přímky (podprostory dimenze 1) jsou navzájem kolmé, právě když jsou navzájem kolmé jejich směrové vektory. Pomocí nich rozšiřujeme relaci kolmosti i na dvojice objektů, z nichž každý je přímka, polopřímka či úsečka. Další úmluvou je zápis $\vec{u} \perp \mathcal{B}$ pro situace, kdy platí $\vec{u} \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})^{\perp}$. Z obecných vlastností kolmosti uveďme pouze tu, že každé dva podprostory $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, které jsou totálně kolmé k třetímu podprostoru $\mathcal{D}$, jsou rovnoběžné; mají totiž dokonce stejné zaměření $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) = \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \mathcal{Z}(\mathcal{D})^{\perp}$. Odtud plyne, že každým bodem $A \in \mathcal{E}$ můžeme vést právě jeden podprostor totálně kolmý k danému netriviálnímu podprostoru.

Definice 1.2.10: Nechť $\mathcal{B}$ je podprostor eukleidovského bodového prostoru $\mathcal{E}$. *Kolmým průmětem* daného bodu $A \in \mathcal{E}$ *na podprostor* $\mathcal{B}$ nazveme ten bod $P \in \mathcal{B}$, který splňuje podmínku $\overrightarrow{AP} \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})^{\perp}$, neboli $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{PX}$ pro každý bod $X \in \mathcal{B}$. Číslu $|AP|$ pak říkáme *vzdálenost bodu* A *od podprostoru* $\mathcal{B}$.



Existenci a jednoznačnost bodu P z předchozí definice zdůvodníme, když zvolíme libovolný bod $O \in \mathcal{B}$ a uvážíme, že bod P má požadovanou vlastnost, právě když rovnost $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$ je rozkladem vektoru $\overrightarrow{OA}$ na součet dvou vektorů ze $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{B})^{\perp}$. Jak jsme uvedli dříve, takový rozklad existuje jediný, a pro každý vektor $\overrightarrow{OX} \in \mathcal{Z}(\mathcal{B})$ platí

$$\left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}\right| \geq \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right|, \qquad \text{neboli} \qquad |AX| \geq |AP|\,.$$

Tím je nejen potvrzena korektnost definice kolmého průmětu, ale i obecný geometrický smysl vzdálenosti bodu A od útvaru $\mathcal{B}$ (jakožto nejmenší z hodnot $|AX|$, kde $X \in \mathcal{B}$).

K posouzené definici kolmého průmětu P daného bodu A na daný podprostor $\mathcal{B}$ dodejme ještě jednu (z hlediska školské geometrie) významnou poznámku. Body A a P jsou zřejmě různé, právě když platí $A \notin \mathcal{B}$. V tomto případě se (jednoznačně určená) přímka AP nazývá *kolmicí z bodu* A *na podprostor* $\mathcal{B}$, bodu P se pak říká *pata kolmice*. V případě $A \in \mathcal{B}$ lze ovšem bodem A vést *jedinou* kolmici na podprostor $\mathcal{B}$ pouze v případě, kdy $\mathcal{B}$ je nadrovina (jinak je takových kolmých přímek nekonečně mnoho). Pro společný směrový vektor všech přímek kolmých k dané nadrovině zavádíme významný termín, potřebný i ve školské geometrii.

Definice 1.2.11: Nechť $\mathcal{B}$ je libovolná nadrovina v eukleidovském bodovém prostoru $\mathcal{E}$. *Normálovým vektorem* nadroviny $\mathcal{B}$ nazýváme každý nenulový vektor $\vec{n}$ z jednorozměrného prostoru $\mathcal{Z}(\mathcal{B})^{\perp}$, tj. každý vektor $\vec{n} \in \mathcal{Z}(\mathcal{E})$, $\vec{n} \neq \vec{o}$, s vlastností $\vec{n} \perp \overrightarrow{XY}$ pro každé dva body X, $Y \in \mathcal{B}$.

V závěrečné části celé podkapitoly pojednáme o *velikostech úhlů* v obecném eukleidovském bodovém prostoru. Zopakujeme přitom vlastně to, co jsme o této skalární veličině úzce spojené se vzdáleností bodů již dříve posoudili z pohledu školské geometrie.

Definice 1.2.12: Nechť A, B, C jsou tři různé body eukleidovského prostoru $\mathcal{E}$. *Velikostí konvexního úhlu* BAC nazveme odchylku nenulových vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ podle Definice 1.2.3, tedy číslo α z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ značené $|\sphericalangle BAC|$ a určené rovností

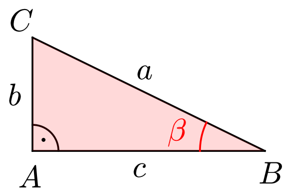
$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}\,.$$

Jak víme, předchozí definice zaručuje, že vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC v obecném eukleidovském prostoru jsou zavedeny tak, že při obvyklém označení platí kosinová věta [15]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

a v jejím důsledku i Pythagorova věta

$$AB \perp AC \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2\,.$$



Uvážíme-li ještě, že v každém trojúhelníku ABC s úhlem $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (viz obrázek) platí známé vztahy pro poměry stran

$$\cos\beta = \frac{c}{a} \qquad \text{a} \qquad \sin\beta = \frac{b}{a}\,,$$

bude podle tradičního výkladu školské geometrie jasné, že i v obecném eukleidovském bodovém prostoru platí pro trojúhelníky sinová věta a všechny další klasické výsledky syntetické geometrie. Zřejmě stačí dokázat první ze dvou vzorců, tj. vzorec pro $\cos\beta$. To je však snadné: Když do rovnosti $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ dosadíme za b^2 výraz $a^2 - c^2$, pak po snadné úpravě dostaneme, co jsme chtěli.

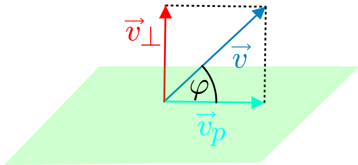
Prakticky nejvýznamnější úhlovou aplikací v eukleidovských prostorech jsou výpočty různých *odchylek*, z nichž jsme zatím popsali pouze odchylku *dvou vektorů* (s ní zřejmým způsobem přímo spojujeme i odchylku *dvou polopřímek*). Definovat odchylku dvou podprostorů eukleidovského prostoru je v obecné situaci dosti náročné; pro účely školské geometrie se stačí omezit na případ, kdy aspoň jeden z obou podprostorů je přímka nebo nadrovina. Protože odchylky bodových podprostorů se chápou jako odchylky jejich zaměření, definujeme nejdříve odchylku vektoru od vektorového podprostoru.

Definice 1.2.13: Nechť W je netriviální podprostor eukleidovského vektorového prostoru V. *Odchylkou nenulového vektoru* $\vec{v} \in V$ *a podprostoru* W nazýváme úhel φ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ určený kterýmkoliv ze vztahů

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{v}_p|}{|\vec{v}|} \qquad \text{a} \qquad \sin\varphi = \frac{|\vec{v}_\perp|}{|\vec{v}|}\,, \tag{1.11}$$

[15] Na kosinové větě jsme založili motivační výklad, který nás přivedl k operaci skalárního součinu.

kde $\vec{v}_p$, resp. $\vec{v}_\perp$ jsou kolmé průměty vektoru $\vec{v}$ na podprostory W, resp. $W^\perp$ (zavedli jsme je v textu za Definicí 1.2.5).[16]



Je jasné, že krajní hodnoty $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ v uvedené definici odpovídají právě případům $\vec{v} \in W$, resp. $\vec{v} \in W^\perp$; ukážeme ještě, že v případě $\vec{v}_p \neq \vec{o}$ je uvedená odchylka φ rovna odchylce vektorů $\vec{v}$, $\vec{v}_p$. Kosinus poslední odchylky má totiž hodnotu

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_p \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}_p|} = \frac{\langle \vec{v}_p + \vec{v}_\perp, \vec{v}_p \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}_p|} = \frac{|\vec{v}_p|^2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{v}_p|} = \frac{|\vec{v}_p|}{|\vec{v}|} = \cos\varphi\,.$$

Poznamenejme, že zkoumanou odchylku φ lze jednoduše počítat v obou „krajních“ případech, kdy $\dim W = 1$ nebo $\dim W = \dim V - 1$, a to podle vzorců

$$\cos\varphi = \frac{\bigl|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\bigr|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\,, \qquad \text{resp.} \qquad \sin\varphi = \frac{\bigl|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\bigr|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\,, \tag{1.12}$$

kde $\vec{w}$, resp. $\vec{n}$ je nenulový vektor jednorozměrného podprostoru W, resp. $W^\perp$. Skutečně, vektory $\vec{v}_p$, $\vec{v}_\perp$ jsou v těchto případech určeny vzorci (1.10), podle kterých platí

$$|\vec{v}_p| = \frac{\bigl|\langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle\bigr|}{|\vec{w}|}\,, \qquad |\vec{v}_\perp| = \frac{\bigl|\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\bigr|}{|\vec{n}|}\,,$$

takže po dosazení do (1.11) dostaneme (1.12).

Definice 1.2.14: Nechť $\mathcal{B}$ je netriviální podprostor eukleidovského bodového prostoru $\mathcal{E}$. Označme $\vec{v}$ směrový vektor libovolné přímky p v $\mathcal{E}$ a $\vec{n}$ normálový vektor libovolné nadroviny $\mathcal{N}$ v $\mathcal{E}$. Pak *odchylkou přímky p a podprostoru $\mathcal{B}$* nazýváme odchylku vektoru $\vec{v}$ od podprostoru $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$; *odchylkou nadroviny $\mathcal{N}$ a podprostoru $\mathcal{B}$* nazýváme odchylku vektoru $\vec{n}$ od podprostoru $\mathcal{Z}(\mathcal{B})^\perp$.

Z poslední definice a vzorců (1.12) snadno plynou výpočtově jednoduchá pravidla:

- Odchylkou dvou přímek se směrovými vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ je úhel φ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ určený vzorcem
$$\cos\varphi = \frac{\bigl|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle\bigr|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}\,.$$

- Odchylkou dvou nadrovin s normálovými vektory $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ je úhel φ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ určený vzorcem
$$\cos\varphi = \frac{\bigl|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle\bigr|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\,.$$

[16] V obou ekvivalentních vztazích (1.11) jsou zapsány poměry stran pravoúhlého trojúhelníku tvořeného vektory $\vec{v}_p$, $\vec{v}_\perp$ a $\vec{v}$.

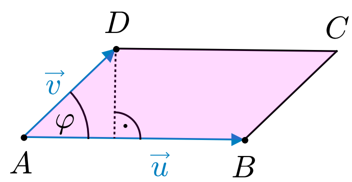
- Odchylkou přímky se směrovým vektorem $\vec{v}$ a nadroviny s normálovým vektorem $\vec{n}$ je úhel φ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ určený vzorcem

$$\sin\varphi = \frac{|\langle\vec{v},\vec{n}\rangle|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\,.$$

1.3 Vektorový a smíšený součin

Operace z názvu této podkapitoly vystupují ve školské geometrii spíše okrajově – v současnosti pouze na několika stranách učebnice analytické geometrie [koč–09]. V ní je zavedení vektorového součinu motivováno důležitým počtářským postupem, jakým lze ke dvěma nekolineárním vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$ v prostoru najít třetí vektor $\vec{x}$, který je k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolmý. Souřadnice vektoru $\vec{x} = \vec{u}\times\vec{v}$, který je řešením zmíněného úkolu, jsou v učebnici zapsány (s mnemotechnickou pomůckou pro jejich zapamatování) dříve než je *vektorový součin* $\vec{u}\times\vec{v}$ definován obvyklým geometrickým způsobem, zahrnujícím *určení velikosti* vektoru $\vec{u}\times\vec{v}$ jako *obsahu rovnoběžníku*, který vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ vytvářejí.[17] Následně je posouzeno složení vektorového a skalárního součinu $\langle\vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle$, nazvané *smíšený součin* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, jako reálné číslo, jehož absolutní hodnota určuje *objem rovnoběžnostěnu*, který (nekomplanární) vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vytvářejí. Vektorové výpočty obsahů a objemů však v současné výuce na gymnáziích zůstávají spíše v oblasti teorie; na jejich procvičení nezbývá v krátkém kurzu analytické geometrie čas. Přesto se nyní budeme zabývat možností vyjadřovat *rovinný obsah* vektorovými prostředky stejně podrobným způsobem, jakým jsme posoudili *délku úseček* v úvodní části předchozí Podkapitoly 1.2.

Celý postup, jakým je skalární veličina zvaná rovinný obsah v syntetické geometrii budována, popisovat nebudeme. Vystačíme s konstatováním, že vzorec pro obsah rovnoběžníku (slovy „základna krát výška“) patří k základům této teorie.



Mějme tedy dány dva nekolineární vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ v eukleidovském prostoru V libovolné dimenze. Označíme-li φ jejich odchylku, pak pro obsah S rovnoběžníku tvořeného těmito vektory, tj. rovnoběžníku $ABCD$, ve kterém $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ a $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, platí vzorec

$$S = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\varphi\,,$$

neboť $|\vec{v}|\cdot\sin\varphi$ je jeho výška na základnu AB délky $|\vec{u}|$. Protože $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ bez ohledu na to, zda je úhel φ ostrý, pravý či tupý, můžeme obsah S vyjádřit pomocí skalárního součinu $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ následujícím způsobem:

$$S = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sqrt{1-\frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2}} = \sqrt{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-\langle\vec{u},\vec{v}\rangle^2}\,. \tag{1.13}$$

[17] Při zmíněné úloze ($\vec{x}\perp\vec{u}$, $\vec{x}\perp\vec{v}$) nás obvykle zajímají pouze *směry* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, nikoliv jejich velikosti.

Odvozený vzorec s odmocninou však není pro řešení náročnějších úloh o rovinných obrazcích příliš vhodný.[18] Vektorový výpočet obsahu S bychom docenili, kdybychom měli k dispozici nějaké zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbf{R}$ s výhodnými vlastnostmi, kterým bychom mohli obsah S ze vzorce (1.13) vyjádřit. Po zkušenostech se skalárním součinem při vyjadřování délek úseček je celkem jasné, že onou výhodnou vlastností by měla být především *linearita* $f(\vec{u},\vec{v})$ v každé z vektorových proměnných $\vec{u}$, $\vec{v}$; s ohledem na *nezápornost* obsahu S se tak nabízí „rozumná“ možnost vyjádření $S = |f(\vec{u},\vec{v})|$, kterou můžeme podle (1.13) zapsat podmínkou

$$(f(\vec{u},\vec{v}))^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2 \,.$$

Zdůrazněme, že v daném vektorovém prostoru V s daným skalárním součinem je poslední rovností hodnota $f(\vec{u},\vec{v})$ pro každou dvojici vektorů $\vec{u}$, $\vec{v} \in V$ určena – až na znaménko tohoto čísla. Zajímá nás tedy, zda existuje zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbf{R}$ s těmito vlastnostmi:

(i) $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V\colon \quad f(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{w}) + f(\vec{v},\vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbf{R}\colon \quad f(t\vec{u},\vec{v}) = t \cdot f(\vec{u},\vec{v})$,

(iii) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V\colon \quad (f(\vec{u},\vec{v}))^2 + \langle \vec{u},\vec{v}\rangle^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,

(iv) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V\colon \quad f(\vec{u},\vec{v}) = -f(\vec{v},\vec{u})$.

Zařazení požadavku (iv) je možná překvapivé, dali jsme mu přednost před alternativou rozšířit (i) a (ii) o potřebné rovnosti

$$f(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{v}) + f(\vec{u},\vec{w})\,, \qquad f(\vec{u},t\vec{v}) = tf(\vec{u},\vec{v})\,.$$

Za chvíli totiž ukážeme, že vlastnost (iv) vyplývá z takto rozšířených vlastností (i) a (ii) (říkejme jim *bilinearita* zobrazení f) a vlastnosti (iii). Nejdříve si však povšimněme, že díky známému poznatku o tom, kdy nastane rovnost v Cauchyově-Schwarzově nerovnosti, má vlastnost (iii) zobrazení f závažný důsledek, který odpovídá představě o obsahu „zdegenerovaného“ obsahu rovnoběžníku:

(v) $\forall \vec{u},\vec{v} \in V\colon \quad f(\vec{u},\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně závislé.

Bilineární zobrazení f s vlastností (v) ovšem musí být *antisymetrické*, tj. musí splňovat (iv). Plyne to z rovnosti

$$f(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u},\vec{u}) + f(\vec{u},\vec{v}) + f(\vec{v},\vec{u}) + f(\vec{v},\vec{v})\,,$$

když do ní podle (v) dosadíme za $f(\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v})$, $f(\vec{u},\vec{u})$, $f(\vec{v},\vec{v})$ nuly.

Vlastnost (v) má však daleko závažnější a pro náš úkol rozhodující důsledek: *Pro každý nenulový vektor $\vec{u} \in V$ skalární lineární rovnice $f(\vec{u},\vec{x}) = 0$ popisuje množinu všech těch vektorů $\vec{x} \in V$, které jsou s vektorem $\vec{u}$ kolineární.* Tato množina vektorů $\vec{x}$ je lineární prostor $\langle \vec{u} \rangle$ dimenze 1, zatímco obor řešení každé v úvahu připadající rovnice $f(\vec{u},\vec{x}) = 0$ je zřejmě lineární prostor dimenze $n-1$, kde $n = \dim V$. Proto hledané zobrazení f s vlastnostmi (i)–(iv) *může*

[18] V Kapitole 3 věnované aplikacím skalárního součinu není jediný příklad uplatnění vzorce (1.13); prostě jsme takový příklad v literatuře nenašli.

existovat pouze v případě $n = 2$. To je poměrně negativní závěr našich úvah o možném efektivním vyjadřování rovinných obsahů.[19]

Podívejme se znovu na problém stanovení obsahu rovnoběžníku určeného nekolineárními vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$, nyní z algebraického hlediska, a to opět při obecném $n = \dim V \geq 2$. Jsou-li $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ a $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ souřadnice vektorů $\vec{u}$, resp. $\vec{v}$ v některé ortonormální bázi prostoru V, pak vzorec (1.13) pro obsah S zkoumaného rovnoběžníku získá souřadnicový tvar

$$S = \sqrt{(u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2) - (u_1v_1 + \cdots + u_nv_n)^2} \tag{1.14}$$

V případě $n = 2$ díky zřejmé identitě

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 = (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

dostáváme užitečný a jednoduchý vzorec $S = |u_1v_2 - u_2v_1|$, takže dříve hledané zobrazení $f\colon V \times V \to \mathbf{R}$ s vlastnostmi (i)–(v) *skutečně existuje*, a to ve dvou exemplářích

$$f_1(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}, \qquad f_2(\vec{u}, \vec{v}) = u_2v_1 - u_1v_2 = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

navzájem *opačných zobrazení*, tedy zobrazení s vlastností

$$f_1(\vec{u}, \vec{v}) + f_2(\vec{u}, \vec{v}) = 0\,.$$

Zavádět název a symbol pro tato bilineární skalární zobrazení není obvyklé, protože „fungují" pouze na dvourozměrných eukleidovských prostorech. Za okamžik uvidíme, že je můžeme využívat v podobě bilineárního vektorového zobrazení na trojrozměrném eukleidovském prostoru, na který můžeme daný prostor dimenze 2 vždy rozšířit. Zmíněné vektorové zobrazení bude právě *vektorovým součinem*.[20] K němu teď budou směřovat naše další úvahy.

V případě $n = 3$ lze výraz pod odmocninou (1.14) upravit na součet tří druhých mocnin podle méně zřejmé identity

$$(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 = (u_1v_2-u_2v_1)^2+(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2\,,$$

takže obsah S rovnoběžníku tvořeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, veličina s vyjádřením

$$S = \sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2}\,,$$

je roven velikosti vektoru $\vec{w}$, jehož souřadnice v dané ortonormální bázi mají v některém pořadí hodnoty

$$\pm \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}, \qquad \pm \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad \pm \det \begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix},$$

[19] Porovnejme podanou klíčovou úvahu s její analogií pro skalární součin: Při daném $\vec{u} \neq \vec{o}$ rovnice $\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle = 0$ popisuje množinu všech vektorů $\vec{x}$, jež jsou k vektoru $\vec{u}$ kolmé, což je skutečně lineární prostor $\langle \vec{u} \rangle^{\perp}$ dimenze $\dim V - 1$.

[20] V Kapitole 4 budeme úlohy o obsahu v rovině řešit právě užitím vektorového součinu v prostoru.

s libovolně vybranými znaménky. Jak vzápětí ukážeme, z více důvodů je výhodná volba vektoru $\vec{w}$ se souřadnicemi

$$w_1 = \det\begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \det\begin{pmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \det\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Při ní vektor $\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je uvažovaná ortonormální báze, označíme $f(\vec{u}, \vec{v})$ a zapíšeme neformálně, zato přehledně, jedním determinantem [21]

$$\vec{w} = f(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Tento předpis určuje zobrazení $f\colon V \times V \to V$ spojené s danou ortonormální bází $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ třírozměrného eukleidovského prostoru V, které je zřejmě bilineární, antisymetrické a podle našich výpočtů splňuje identitu

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon \quad (f(\vec{u}, \vec{v}))^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \tag{1.16}$$

s důsledkem (plynoucím rovněž z již zmíněné antisymetrie f)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon \quad f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vektory } \vec{u}, \vec{v} \text{ jsou lineárně závislé.} \tag{1.17}$$

Všimněme si, že pro každý vektor $\vec{x} \in V$ se souřadnicemi (x_1, x_2, x_3) v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ platí

$$\langle \vec{x}, f(\vec{u}, \vec{v}) \rangle = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

což pro $\vec{x} = \vec{u}$, resp. $\vec{x} = \vec{v}$ podle známé vlastnosti determinantu s dvěma shodnými řádky znamená, že vektor $f(\vec{u}, \vec{v})$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$: [22]

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V\colon \quad f(\vec{u}, \vec{v}) \perp \vec{u} \,\wedge\, f(\vec{u}, \vec{v}) \perp \vec{v}\,. \tag{1.19}$$

Sestrojenému zobrazení f budeme říkat *vektorový součin na* V a místo $f(\vec{u}, \vec{v})$ budeme později psát $\vec{u} \times \vec{v}$.

Posuďme nyní otázku zda a jak vektorový součin f z předpisu (1.15) závisí na tom, kterou ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ daného prostoru V vybereme. Předně je zřejmé, že pouhými změnami pořadí vektorů báze dostaneme dva různé vektorové součiny

$$f_1(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \qquad f_2(\vec{u}, \vec{v}) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \\ u_2 & u_1 & u_3 \\ v_2 & v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

[21] I když se determinanty s jedním vektorovým řádkem v kurzu lineární algebry většinou neprobírají, jejich základní řádkové a sloupcové vlastnosti jsou natolik zřejmé, že je ani zde nebudeme popisovat a zdůvodňovat.

[22] Připomeňme konstatování z úvodu podkapitoly, že konstrukce vektoru $\vec{w}$ kolmého k oběma daným vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je pro výpočty v analytické geometrii v prostoru nepostradatelná.

které jsou (díky pravidlu o prohození dvou sloupců determinantu) dvě navzájem opačná zobrazení.

Dostaneme kromě f_1, f_2 ještě další vektorové součiny f, když v předpisu (1.15) nahradíme bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jinou ortonormální bází? Záporná odpověď vyplyne z obecněji podaného tvrzení: *Každé zobrazení $f\colon V \times V \to V$, které je bilineární, antisymetrické a splňuje podmínky* (1.16) *a* (1.19)*, je rovno jednomu ze zobrazení f_1, f_2 z* (1.21) *odpovídajícímu pevně zvolené ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ prostoru V.* Důkaz zahájíme tak, že z bilinearity a antisymetrie takového zobrazení f pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ v souřadnicích odvodíme vyjádření

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{3} v_j \vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i v_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) =$$

$$= (u_1v_2 - u_2v_1) f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (u_2v_3 - u_3v_2) f(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + (u_3v_1 - u_1v_3) f(\vec{e}_3, \vec{e}_1)\,,$$

neboť $f(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \vec{o}$ a $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -f(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$ podle zmíněné antisymetrie f. Vidíme, že každý vektorový součin f je určen třemi (konstantními) vektory $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $f(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$. Z předpokladů (1.16) a (1.19) na velikost, resp. směr každého vektoru $f(\vec{u}, \vec{v})$ díky dimenzi 3 prostoru V plyne, že existují čísla $\delta_i = \pm 1$ taková, že

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \delta_3 \vec{e}_3\,, \qquad f(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \delta_1 \vec{e}_1\,, \qquad f(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = \delta_2 \vec{e}_2\,.$$

Proto má zkoumané zobrazení f vyjádření

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \delta_1(u_2v_3 - u_3v_2)\vec{e}_1 + \delta_2(u_3v_1 - u_1v_3)\vec{e}_2 + \delta_3(u_1v_2 - u_2v_1)\vec{e}_3\,. \tag{1.21}$$

Ať vybereme „znaménka“ $\delta_i = \pm 1$ jakkoliv, bude poslední rovnost (1.21) předpisem pro zobrazení $f\colon V \times V \to V$, které je zřejmě bilineární, antisymetrické a splňuje „velikostní“ podmínku (1.16). Ukážeme, že z osmi takových zobrazení však pouze dvě splňují podmínku kolmosti (1.19), a to zobrazení se znaménky

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1\,, \qquad \text{resp.} \qquad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = -1\,,$$

kterým zřejmě odpovídají vektorové součiny z (1.20). Tím se celý postup důkazu uzavře; zbývá tedy ukázat, že z rovnosti

$$0 = \langle \vec{u}, f(\vec{u}, \vec{v})\rangle = \delta_1(u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + \delta_2(u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + \delta_3(u_1v_2 - u_2v_1)u_3$$

(pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$) plyne rovnost $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. To je však snadné – z přepisu předpokladu $0 = \langle \vec{u}, f(\vec{u}, \vec{v})\rangle$ do tvaru

$$u_1u_2v_3(\delta_1 - \delta_2) + u_2u_3v_1(\delta_2 - \delta_3) + u_3u_1v_2(\delta_3 - \delta_1) = 0$$

a volbou $u_1u_2v_3 \neq 0$ a $u_3 = 0$ dostaneme $\delta_1 - \delta_2 = 0$, neboli $\delta_1 = \delta_2$. Analogicky obdržíme i rovnost $\delta_2 = \delta_3$ a celý důkaz je hotov. Můžeme tak podat axiomatickou definici vektorového součinu, nezávislou na konstrukci spojenou s konkrétní ortonormální bází daného eukleidovského prostoru.

Definice 1.3.1: Nechť V je eukleidovský vektorový prostor dimenze 3. *Vektorovým součinem* na V nazveme zobrazení $f\colon V \times V \to V$ s těmito vlastnostmi:

(i) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V: \quad f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w})$,

(ii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall t \in \mathbf{R}: \quad f(t\vec{u}, \vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})$,

(iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad f(\vec{u}, \vec{v}) = -f(\vec{v}, \vec{u})$,

(iv) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad |f(\vec{u}, \vec{v})|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2$,

(v) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V: \quad \langle f(\vec{u}, \vec{v}), \vec{u} \rangle = 0$.

K takto zapsané definici dodejme, že „chybějící“ vlastnosti

$$f(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w})\,, \qquad f(\vec{u}, t\vec{v}) = t \cdot f(\vec{u}, \vec{v})\,, \qquad \langle f(\vec{u}, \vec{v}), \vec{v} \rangle = 0$$

plynou z (i), (ii), resp. (v) díky (iii). Poznamenejme ještě, že všechny vlastnosti z Definice 1.3.1 mají smysl i v případě $\dim V > 3$, ve kterém však dotyčné zobrazení f neexistuje, i když se vzdáme požadavku kolmosti (v). Plyne to z algebraického tvrzení, že pro žádné $n \geq 4$ neexistuje rozklad

$$(u_1^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + \cdots + v_n^2) - (u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n)^2 = w_1^2 + \cdots + w_n^2\,,$$

ve kterém by $w_1, \ldots, w_n$ byly mnohočleny proměnných $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$.

S existencí právě dvou vektorových součinů (jež jsou dvěma navzájem opačnými zobrazeními, *nezávislými* na tom, jakou ortonormální bázi pro determinantová vyjádření (1.20) vybereme) se ve školské geometrii vyrovnáváme tak, že zavádíme pojem *pravotočivé* a *levotočivé* báze v prostoru, spojený s názornou představou tří navzájem kolmých prstů pravé či levé ruky – vztyčeného palce a napřímeného ukazováčku a prostředníčku. Takové dvě *orientace* lze zavést ve vektorovém (a tedy i afinním) prostoru libovolné (konečné) dimenze. Řekneme, že dvě uspořádané báze $\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \rangle$ a $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ téhož vektorového prostoru mají *stejnou orientaci* právě tehdy, když je kladný determinant čtvercové matice $(t_{ij})_{i,j=1}^n$ tvořené čísly t_{ij} z rovností

$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \vec{u}_j \qquad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Prostředky maticového počtu lze snadno ukázat, že taková relace je ekvivalencí na množině všech uspořádaných bází daného prostoru s právě dvěma třídami rozkladu (tvořenými bázemi se stejnou orientací). Geometrický smysl zavedené orientace ozřejmíme následovně. Představme si, že v čase $t = 0$ začneme vektory první dané báze spojitě měnit s proměnnou $t \in \langle 0, 1 \rangle$, až v čase $t = 1$ dostaneme druhou danou bázi. Pokud budou tyto proměnné vektory tvořit bázi i pro každé $t \in (0, 1)$, bude determinant matice přechodu od počáteční báze k bázi v čase t kladný pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$, neboť jde o spojitou funkci bez nulové hodnoty, která se rovná 1 pro $t = 0$. Všechny báze v průběhu takové spojité změny tedy budou mít stejnou orientaci.

Přesvědčíme se, že je-li f vektorový součin na eukleidovském prostoru V (dimenze 3), pak pro každé dva nekolineární vektory $\vec{u}, \vec{v} \in V$ má trojice (nekomplanárních) vektorů $(\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{u}, \vec{v}))$

jednu a tutéž orientaci, stejnou jako ta ortonormální trojice $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, v níž má dotyčný vektorový součin f souřadnicové vyjádření [23]

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{1.22}$$

Naším úkolem je tedy ukázat, že je kladný determinant

$$D = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix},$$

kde (w_1, w_2, w_3) jsou souřadnice vektoru $\vec{w} = f(\vec{u}, \vec{v})$ v bázi vektorů $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tedy jejich algebraické doplňky v matici z (1.22). Rozvinutím determinantu D podle prvků třetího řádku obdržíme

$$D = w_1 \cdot \det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix} - w_2 \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix} + w_3 \cdot \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} =$$

$$= w_1 \cdot w_1 - w_2 \cdot (-w_2) + w_3 \cdot w_3 = |\vec{w}|^2 > 0\,,$$

neboť platí $\vec{w} \neq \vec{o}$ díky předpokladu, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou nekolineární.

Dokázaná shodnost orientace všech nekomplanárních trojic $(\vec{u}, \vec{v}, f(\vec{u}, \vec{v}))$ umožňuje podat školskou definici jednoho z obou vektorových součinů v prostoru popisně – geometrickým způsobem.[24]

Definice 1.3.2: Vektorový součin dvou vektorů, které leží na jedné přímce, je nulový vektor. Vektorový součin dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ neležících na jedné přímce je vektor $\vec{w}$, který má tyto vlastnosti:

(i) vektor $\vec{w}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$,

(ii) vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří pravotočivou bázi,

(iii) $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, kde α je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Vektorový součin $\vec{w}$ vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ značíme $\vec{u} \times \vec{v}$, tj. $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Ve zbylé části této kapitoly – stejně jako ve všech příkladech a úlohách Kapitoly 4 – budeme symbolem $\times$ značit operaci vektorového součinu z Definice 1.3.2, tedy součinu f zadaného předpisem (1.22) s *pravotočivou* ortonormální bází $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Jak plyne z našeho výkladu, tato definice splňuje všechny axiomy Definice 1.3.1, které budeme jako vlastnosti vektorového součinu dále běžně využívat bez speciálních odkazů.

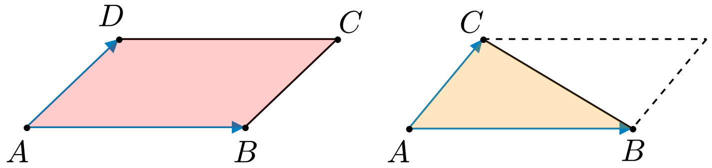
Zdůrazněme, že popsaná konstrukce vektorového součinu *dvou vektorů* je realizovatelná pouze v eukleidovském prostoru dimenze 3. Její význam přesahuje rámec samotné geometrie, vždyť

[23] Jak víme, požadovanou vlastnost má jedna z trojic $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nebo $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je libovolná ortonormální báze V.

[24] Definice je přesnou citací z [koč–09], str. 58.

např. z fyziky známe vektorovou veličinu *moment síly*, která vyjadřuje míru otáčivého účinku této síly a která je určena vektorovým součinem vektoru síly a polohového vektoru jejího působiště vzhledem k danému, tzv. momentovému bodu. Dříve než se vrátíme ke geometrickým vlastnostem vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ a s ním spojeného smíšeného součinu $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$, poznamenejme, že v eukleidovském prostoru dimenze $n > 3$ lze zavést zobecnění těchto součinů, totiž vektorový součin $n-1$ vektorů a tzv. *vnější součin* n vektorů, pro účely našeho textu však tyto konstrukce nemají význam, a proto je nebudeme ani popisovat.

Většinu aplikací vektorového součinu v Kapitole 4 spojíme s vyjadřováním rovinného obsahu, které bylo i vstupním námětem této části teoretické kapitoly.



Velikost vektoru $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ má, jak víme, takovou hodnotu, že pro obsah každého rovnoběžníku $ABCD$ a obsah každého trojúhelníku ABC platí vzorce

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|, \tag{1.23}$$

ať už tyto útvary zkoumáme v rovině či prostoru (v prvním případě vektorové součiny všech dvojic vektorů dané roviny leží na přímce k ní kolmé, o kterou rovinu rozšíříme do prostoru). Vektorový součin můžeme využít i při rozhodování o tom, zda dané tři body v rovině či prostoru leží na jedné přímce: [25]

$$\text{body } A,\ B,\ C \text{ jsou kolineární} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{o}\,. \tag{1.24}$$

Druhou hlavní skupinu aplikací vektorového součinu v Kapitole 4 budou tvořit úlohy o objemu těles v prostoru. Za tím účelem je ve školské geometrii zaveden následující pojem.[26]

Definice 1.3.3: *Smíšený součin* vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ je číslo

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle\,.$$

Všimněme si, že $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ platí právě tehdy, když vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *jsou komplanární.* Podmínka $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{w}$ totiž znamená právě to, že buď $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$, nebo vektor $\vec{w}$ leží v rovině kolmé k nenulovému vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$, tedy v rovině určené vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Jak je to se znaménkem smíšeného součinu $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$ v případě nekomplanárních vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$? Odpověď spojíme s uvedením užitečného vzorce pro smíšený součin

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

[25] Uvedenou ekvivalenci lze interpretovat i takto: Zdegenerované jsou právě ty trojúhelníky, které mají nulový obsah.

[26] Opět citujeme definici z učebnice [koč–09], str. 60.

ve kterém vystupují obvykle značené souřadnice vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ v libovolné pravotočivé ortonormální bázi.[27] Ze vzorce plyne, že *číslo* $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *je kladné, resp. záporné, právě když je* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *pravotočivá, resp. levotočivá báze prostoru.*

Před posouzením geometrického významu smíšeného součinu uveďme prakticky významný vztah mezi dvěma smíšenými součiny $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$ a $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$, který budeme při řešení úloh využívat v situaci, kdy vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ budou známé lineární kombinace vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Potřebný vztah vyjádříme pravidlem

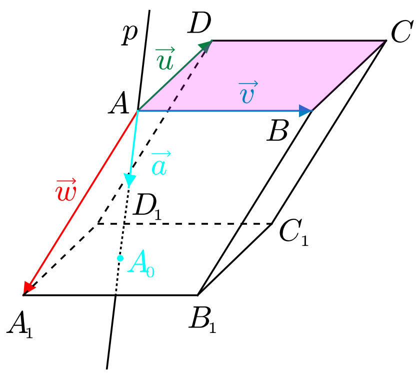
$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} \\ \vec{b} & = & b_1\vec{u} + b_2\vec{v} + b_3\vec{w} \\ \vec{c} & = & c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

jehož platnost ověříme, když do vyjádření (1.25) pro smíšený součin $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$ dosadíme souřadnice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, které vyjádříme pomocí souřadnic vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ v uvažované pravotočivé ortonormální bázi, a pak využijeme poučku o determinantu součinu dvou matic třetího řádu, konkrétně matic

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Tím důkaz (1.26) ukončíme.

Ke slíbenému geometrickému významu smíšeného součinu se dostaneme, když se podíváme, jak vyjádřit objem rovnoběžnostěnu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pomocí vektorů tří jeho hran vycházejících z vrcholu A, které označíme $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AA_1}$.



(Takto určují rovnoběžnostěn každé tři nekomplanární vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.) Dále označme p kolmici ke stěně $ABCD$ vedenou bodem A a $\vec{a}$ jednotkový směrový vektor přímky p, při kterém je báze $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ pravotočivá, takže platí

$$\vec{a} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}, \qquad \text{neboli} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \vec{a}\,.$$

[27]Tento vzorec pro skalární součin vektorů $\vec{u} \times \vec{v}$ a $\vec{w}$ plyne z rozvoje vypsaného determinantu podle prvků jeho třetího řádku. Dodejme, že nulovost tohoto determinantu je zřejmě kritériem komplanárnosti vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se souřadnicemi u_i, v_i, w_i $(i = 1, 2, 3)$ v *libovolné* (ne nutně ortonormální) bázi.

Konečně A_0 značí průsečík přímky p s rovinou stěny $A_1B_1C_1D_1$, takže AA_0 je výška rovnoběžnostěnu vzhledem k podstavě $ABCD$, jejíž obsah lze vyjádřit vzorcem $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Pro objem V zkoumaného tělesa proto platí

$$V = S \cdot |AA_0| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |AA_0| \,.$$

Uvážíme-li, že $|AA_0|$ je velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{w}$ na přímku p se směrovým vektorem $\vec{a}$, podle vzorce (1.10) z Podkapitoly 1.2 s ohledem na $|\vec{a}| = 1$ platí

$$|AA_0| = |\langle \vec{a}, \vec{w} \rangle| \,.$$

Spojením všech tří vypsaných vztahů dostáváme

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |AA_0| = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\langle \vec{a}, \vec{w} \rangle| = |\langle |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot \vec{a}, \vec{w} \rangle| = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle| \,.$$

Tento výsledek spolu s dříve uvedeným pravidlem o znaménku smíšeného součinu [28] znamená, že pro *objem rovnoběžnostěnu určeného třemi nekomplanárními vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ platí*

$$V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \,, \qquad \textit{resp.} \qquad V = -\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \,, \tag{1.27}$$

podle toho, zda je $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ pravotočivá, resp. levotočivá báze.

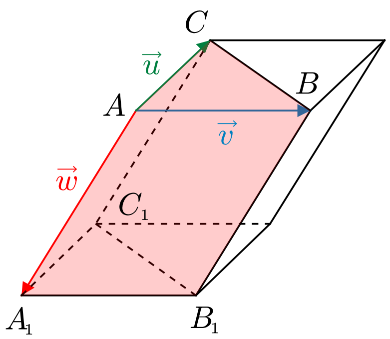
Z dokázaného vzorce přímo plyne jednak vztah

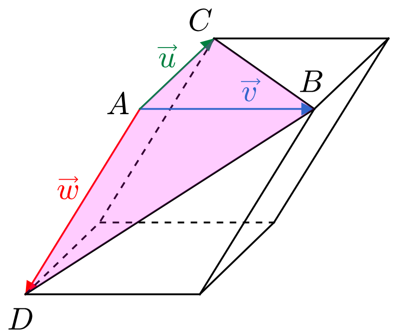
$$V = \frac{1}{2} |\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1} \rangle| \tag{1.28}$$

pro objem libovolného trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$, jednak vyjádření

$$V = \frac{1}{6} |\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle| \tag{1.29}$$

pro objem každého čtyřstěnu $ABCD$, neboť z elementární geometrie těles je dobře známo, že tento objem je roven šestině objemu rovnoběžnostěnu s vrcholem A a hranami AB, AC, AD. Jde totiž právě o rovnoběžnostěn určený nekomplanárními vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ z předchozích úvah.





Uvedené vyjádření objemu V můžeme rovněž zdůvodnit ze vzorce „třetina součinu obsahu podstavy a výšky“ platného pro libovolný jehlan.

[28] Pravidlo lze vysvětlit i takto: Znaménko smíšeného součinu $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$ je shodné se znaménkem čísla $\cos\varphi$, kde φ je odchylka vektorů $\vec{u} \times \vec{v}$ a $\vec{w}$. Pravotočivá báze $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ a báze $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ mají zřejmě stejnou orientaci právě tehdy, když $\varphi < \frac{\pi}{2}$, neboli když $\cos\varphi > 0$.

Kapitola 2

Výpočty afinních vztahů

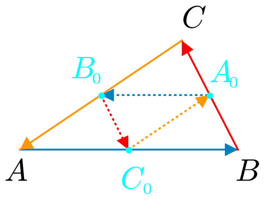
V žádné z obou podkapitol této kapitoly nejsou jednotlivé příklady a úlohy roztříděny do paragrafů, nýbrž jsou seřazeny do jednoho celku podle složitosti námětů s ohledem na hloubku uplatnění vektorové metody potřebné k jejich řešení. Přesto je možné zde najít několik skupin tématicky příbuzných úloh, které nyní přehledně vymezíme výčtem jejich pořadových čísel.

- Důkazy rovnoběžnosti: 2.1.1, 2.1.4, 2.1.5, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.7, 2.2.8, 2.2.15, 2.2.24, 2.2.25, 2.2.29, 2.2.30, 2.2.37, 2.2.40.
- Důkazy kolinearity a komplanárnosti: 2.1.9 část 1, 2.2.18, 2.2.35, 2.2.38.
- Důkazy incidence přímek[1]: 2.1.2, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9 část 2, 2.2.6, 2.2.23.
- Výpočty dělících poměrů: 2.1.2, 2.1.6, 2.1.9, 2.1.10, 2.2.15, 2.2.20, 2.2.21, 2.2.22, 2.2.26, 2.2.27, 2.2.28, 2.2.31, 2.2.32, 2.2.33.
- Srovnání délek rovnoběžných úseček: 2.1.1, 2.2.2, 2.2.15, 2.2.32.
- Středová souměrnost a stejnolehlost: 2.2.3, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.36, 2.2.9, 2.2.19.
- O těžnicích a těžišti trojúhelníku: 2.1.2, 2.1.3, 2.1.8, 2.2.12, 2.2.38, 2.2.41.
- O splynutí těžišť dvou trojúhelníků: 2.2.14, 2.2.16, 2.2.17, 2.2.28, 2.2.29.
- O těžištích mnoha trojúhelníků: 2.2.8, 2.2.9, 2.2.36.

2.1 Příklady teoretického významu

Příklad 2.1.1: *Střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná se stranou trojúhelníku, jejímž středem neprochází, a má ve srovnání s ní poloviční délku. Dokažte. (Střední příčkou rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy středy dvou stran trojúhelníku.)*[2]

[1] Tímto termínem zde označujeme situaci, kdy tři nebo více daných přímek prochází jedním bodem.
[2] Klasický výsledek.



Řešení:
Pro středy A_0, B_0, C_0 stran BC, AC a AB trojúhelníku ABC platí

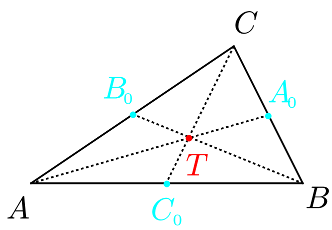
$$A_0 = \frac{1}{2}(B+C)\,, \qquad B_0 = \frac{1}{2}(A+C)\,, \qquad C_0 = \frac{1}{2}(A+B)\,,$$

odkud plyne, že vektor

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(A-B) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,$$

je (nesouhlasně) rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{AB}$ a má ve srovnání s ním poloviční velikost. Podobně bychom ukázali, že také $\overrightarrow{A_0C_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{B_0C_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. □

Příklad 2.1.2: *Těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě, který nazýváme těžiště daného trojúhelníku. Těžiště dělí každou těžnici v poměru 1 : 2 (počítáno od strany trojúhelníku). Dokažte obě tvrzení. (Těžnicí rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy vrchol trojúhelníku se středem protější strany.)*[3]



Řešení:
Středy stran BC, AC a AB trojúhelníku ABC označme

$$A_0 = \frac{1}{2}(B+C)\,, \qquad B_0 = \frac{1}{2}(A+C)\,, \qquad C_0 = \frac{1}{2}(A+B)\,.$$

Na úsečce AA_0 zvolme bod T tak, aby platilo $|A_0T| : |TA| = 1 : 2$, což vektorově zapsáno znamená, že $\overrightarrow{A_0T} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0A}$, odtud

$$T - A_0 = \frac{1}{3}(A - A_0) \quad \text{neboli}$$

[3]Patrně první (fyzikální) důkaz výsledku podal Archimédes. Vektorový důkaz, který zde vyložíme, je uveden v mnoha zdrojích, např. [bud–71], str. 47–49, věta 2.8.

$$T = A_0 + \frac{1}{3}(A - A_0) = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{3}\left(A - \frac{1}{2}(B + C)\right) = \frac{1}{3}(A + B + C)\,.$$

Cyklickou záměnou bodů A, B, C dostaneme, že stejné vyjádření $\frac{1}{3}(A + B + C)$ mají i body ležící na dalších dvou těžnicích BB_0 a CC_0 a dělící je v poměru $1 : 2$ (od strany k vrcholu). Bod $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ tedy leží na všech třech těžnicích a každou z nich dělí v poměru $1 : 2$. □

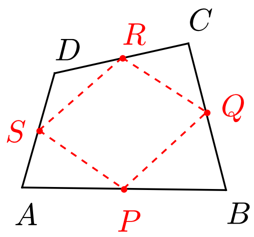
Příklad 2.1.3: *Jsou-li AA_0, BB_0, CC_0 těžnice libovolného trojúhelníku ABC, pak platí rovnost $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} = \vec{o}$. Dokažte.*[4]

Řešení:
Protože $A_0 = \frac{1}{2}(B + C)$, $B_0 = \frac{1}{2}(A + C)$, $C_0 = \frac{1}{2}(A + B)$, platí

$$\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} = \frac{1}{2}(B + C) - A + \frac{1}{2}(A + C) - B + \frac{1}{2}(A + B) - C = \vec{o}\,,$$

neboť v zapsané lineární kombinaci koeficient u každého z bodů A, B, C je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$. □

Příklad 2.1.4: *Středy stran každého (ať už rovinného či prostorového) čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku. Dokažte.*[5]



Řešení:
Pro středy P, Q, R, S stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku $ABCD$ platí

$$P = \frac{1}{2}(A + B)\,, \quad Q = \frac{1}{2}(B + C)\,, \quad R = \frac{1}{2}(C + D)\,, \quad S = \frac{1}{2}(A + D)\,,$$

odtud plyne

$$Q - P = \frac{1}{2}(C - A)\,, \qquad R - S = \frac{1}{2}(C - A)\,.$$

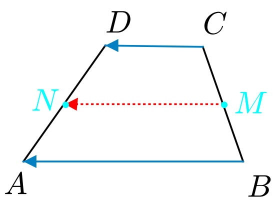
Z rovnosti vektorů $\overrightarrow{PQ}$ a $\overrightarrow{SR}$ dostáváme, že $PQRS$ je rovnoběžník. □

Příklad 2.1.5: *V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ označme M střed strany BC a N střed strany AD. Dokažte, že podmínky*

$$MN \parallel AB\,, \quad MN \parallel CD \qquad a \qquad AB \parallel CD$$

jsou navzájem ekvivalentní.[6]

[4] [pra–86], str. 102, úloha 5.21.
[5] [eng–97], str. 291, úloha E1. Jde o tzv. *Varignonův rovnoběžník* daného čtyřúhelníku.
[6] Původní úloha.



Řešení:
Pro středy M, N stran BC, AD platí

$$M = \frac{1}{2}(B + C)\,, \qquad N = \frac{1}{2}(A + D)\,,$$

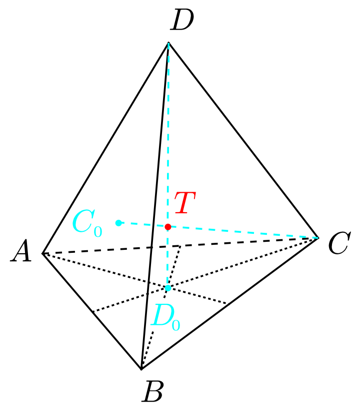
pro vektor $\overrightarrow{MN}$ pak platí

$$\overrightarrow{MN} = N - M = \frac{1}{2}(A + D - B - C) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right)\,.$$

Odtud je již zřejmé, že jsou-li dva z vektorů $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ rovnoběžné, je s nimi rovnoběžný i vektor třetí. □

Poznámka:
Z uvedeného tvrzení plyne známé tvrzení o střední příčce lichoběžníku: *Spojnice středů ramen libovolného lichoběžníku je rovnoběžná s jeho základnami a její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen.* Stačí si totiž uvědomit, že v lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD jsou vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ souhlasně rovnoběžné a vektor $\overrightarrow{MN}$ je podle našeho řešení jejich „aritmetickým průměrem".

Příklad 2.1.6: *Těžnice čtyřstěnu se protínají v jediném bodě, kterému říkáme těžiště daného čtyřstěnu. Toto těžiště dělí každou těžnici v poměru* $1:3$ *(počítáno od stěny čtyřstěnu). Dokažte obě tvrzení. (Těžnicí rozumíme každou ze čtyř úseček spojujících vždy vrchol čtyřstěnu s těžištěm protější stěny.)*[7]



[7] [bud–71], str. 49–50, věta 2.9.

Řešení:
Označme D_0 těžiště stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$. Jak víme podle Příkladu 2.1.2,

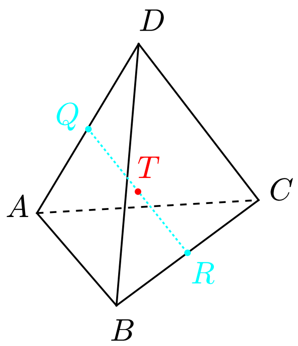
$$D_0 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,.$$

Na úsečce DD_0 zvolíme bod T tak, aby platilo $|D_0T| : |DT| = 1 : 3$, což vektorově zapsáno znamená $\overrightarrow{D_0T} = \frac{1}{4}\overrightarrow{D_0D}$, neboli $T - D_0 = \frac{1}{4}(D - D_0)$, odtud

$$T = D_0 + \frac{1}{4}(D-D_0) = \frac{1}{3}(A+B+C) + \frac{1}{4}\left(D - \frac{1}{3}(A+B+C)\right) = \frac{1}{4}(A+B+C+D)\,.$$

Cyklickou záměnou bodů A, B, C, D se vyjádření takového bodu T nezmění, a proto bod $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$ leží na všech čtyřech těžnicích čtyřstěnu a dělí je v poměru $1 : 3$, jak jsme měli dokázat. □

Příklad 2.1.7: *Dokažte, že těžiště čtyřstěnu je středem úsečky, která spojuje středy libovolných dvou jeho protilehlých hran.*[8]



Řešení:
Pro těžiště T čtyřstěnu $ABCD$ podle Příkladu 2.1.6 platí $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$. Protilehlé hrany čtyřstěnu jsou např. hrany AD a BC. Jejich středy označme

$$Q = \frac{1}{2}(A+D)\,, \qquad R = \frac{1}{2}(B+C)\,.$$

Pro střed S úsečky QR tudíž platí

$$S = \frac{1}{2}(Q+R) = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = T\,.$$

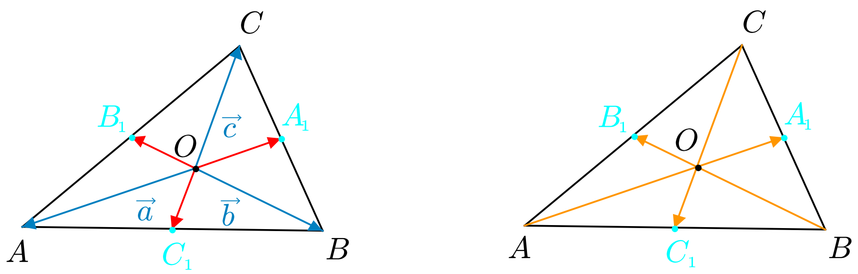
Analogicky se dokáže tvrzení pro další dvojice protilehlých hran BD, AC a CD, AB. □

Příklad 2.1.8: *Uvnitř stran BC, CA a AB libovolného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1 a C_1 tak, že přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí jedním bodem, který označíme O. Podmínka, že body A_1, B_1, C_1 jsou středy příslušných stran, neboli že bod O je těžištěm trojúhelníku ABC, je ekvivalentní s každou z rovností*

[8] [bud–71], str. 50, věta 2.10.

1. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{o}$,
2. $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{o}$,
3. $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{o}$.

Dokažte.[9]



ŘEŠENÍ:

1. Rovnost $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{o}$ nastane právě tehdy, když

$$(A - O) + (B - O) + (C - O) = \vec{o} \quad \text{neboli} \quad O = \frac{1}{3}(A + B + C)\,,$$

čili právě tehdy, když bod O je těžiště trojúhelníku ABC.

2. Bod O je vnitřní bod trojúhelníku ABC, a tedy každé dva z vektorů $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ jsou lineárně nezávislé. Existuje proto jediná dvojice reálných čísel β, γ taková, že

$$\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}\,.$$

Musíme ukázat, že rovnost $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{o}$ nastane, právě když platí $\beta = \gamma = -1$, neboť podle části 1 bude bod O těžiště, právě když bude platit rovnost $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$. Předem je jasné, že vždy platí

$$\beta \neq 0\,, \qquad \gamma \neq 0\,, \qquad \beta + \gamma \neq 0\,, \qquad \beta \neq 1\,, \qquad \gamma \neq 1\,, \qquad \beta + \gamma \neq 1 \tag{2.1}$$

(nesplnění jednotlivých podmínek by po řadě znamenalo $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} \parallel \overrightarrow{AC}$, resp. kolinearitu bodů A, B, C).

Nyní odvodíme vztahy pro vektory $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$. Vyjdeme z toho, že vektor $\overrightarrow{OB_1}$ je násobkem vektoru $\vec{b}$, čili $\overrightarrow{OB_1} = k\vec{b}$, kde k je reálné číslo. Protože bod B_1 leží na úsečce AC, existuje číslo $p \in \langle 0, 1\rangle$ s vlastností

$$k\vec{b} = \overrightarrow{OB_1} = p\vec{a} + (1 - p)\vec{c} = p(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) + (1 - p)\vec{c} = p\beta\vec{b} + (1 - p + p\gamma)\vec{c}\,.$$

[9] [pra–86], str. 102, úloha 5.22, řešení částí 2 a 3 této převzaté úlohy jsou vlastní.

Protože vektory $\vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou dva lineárně nezávislé vektory v rovině, musí se koeficienty u obou vyjádření vektoru $\overrightarrow{OB_1}$ rovnat. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$p\gamma + 1 - p = 0\,, \qquad k = p\beta\,.$$

Protože $\gamma \neq 1$, můžeme z první rovnice vyjádřit

$$p = \frac{1}{1-\gamma}\,, \quad \text{tudíž} \quad k = p\beta = \frac{\beta}{1-\gamma}\,.$$

Pro vektor $\overrightarrow{OB_1}$ tak hledané vyjádření má tvar

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{\beta}{1-\gamma}\vec{b}\,.$$

Analogicky pro vektory $\overrightarrow{OC_1}$ a $\overrightarrow{OA_1}$ najdeme vyjádření:

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{\gamma}{1-\beta}\vec{c}, \qquad \overrightarrow{OA_1} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\vec{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\vec{c}.$$

Nyní dosadíme do rovnosti $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \vec{o}$. Dostaneme ekvivalentní vztah

$$\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma}\right)\vec{b} + \left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{1-\beta}\right)\vec{c} = \vec{o}\,,$$

který vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ bude splněn právě tehdy, když koeficienty u obou těchto vektorů budou nulové:

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} = 0\,, \qquad \frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{1-\beta} = 0\,.$$

S ohledem na $\beta \neq 0$ z první rovnice dostaneme $\gamma - 1 = \beta + \gamma$, neboli $\beta = -1$. Z druhé rovnice pak s ohledem na $\gamma \neq 0$ dostaneme $\beta - 1 = \beta + \gamma$ neboli $\gamma = -1$. To jsme měli ukázat: Odvozená soustava rovnic má právě jedno řešení $\beta = \gamma = -1$.

3. Stejně jako v části 2 zavedeme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ a ukážeme, že rovnost $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{o}$ nastane právě tehdy, když pro koeficienty β, γ z rovnosti $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ platí $\beta = \gamma = -1$.

   Pro vektor $\overrightarrow{AA_1}$ můžeme (s využitím vztahu odvozeného pro vektor $\overrightarrow{OA_1}$ v části 2) psát

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\vec{b} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\vec{c} - \beta\vec{b} - \gamma\vec{c}\,,$$

analogicky pro vektory $\overrightarrow{BB_1}$ a $\overrightarrow{CC_1}$:

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \frac{\beta}{1-\gamma}\vec{b} - \vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC} = \frac{\gamma}{1-\beta}\vec{c} - \vec{c}\,.$$

Dosazením do vektorové rovnosti $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{o}$ dostaneme ekvivalentní vztah

$$\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} - \beta + \frac{\beta}{1-\gamma} - 1\right)\vec{b} + \left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma} - \gamma + \frac{\gamma}{1-\beta} - 1\right)\vec{c} = 0\,,$$

který bude splněn právě tehdy, když bude splněna soustava rovnic

$$\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{1-\gamma} = 1+\beta\,, \qquad \frac{\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{1-\beta} = 1+\gamma\,.$$

V části 2 jsme vypsali podmínky (2.1), které čísla β a γ vždy splňují. Proto můžeme v odvozených rovnicích odstranit zlomky a dále je upravovat způsobem, který s ohledem na symetrii zapíšeme pouze pro první rovnici:

$$\begin{aligned}
\beta(1-\gamma) + \beta(\beta+\gamma) &= (1+\beta)(\beta+\gamma)(1-\gamma)\,,\\
\beta(1+\beta) &= (1+\beta)(\beta+\gamma-\beta\gamma-\gamma^2)\,,\\
(1+\beta)(\gamma-\beta\gamma-\gamma^2) &= 0\,,\\
\gamma(1+\beta)(1-\beta-\gamma) &= 0\,.
\end{aligned}$$

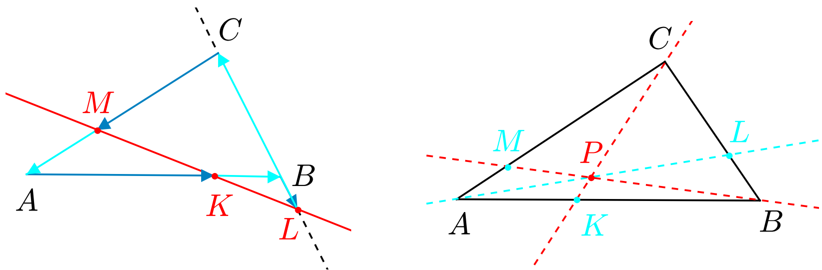
Podle (2.1) platí nejen $\gamma \neq 0$, ale také $\beta+\gamma \neq 1$, takže je poslední rovnice splněna právě tehdy, když $1+\beta=0$, neboli $\beta=-1$. Analogicky je druhá rovnice ekvivalentní podmínce $\gamma=-1$. □

Příklad 2.1.9: *Je dán trojúhelník ABC. Označme K, L, M libovolné body, které leží po řadě na přímkách AB, BC, CA a které jsou různé od vrcholů A, B, C. Dokažte*[10]

1. Menelaovu větu: *Body K, L, M leží v jedné přímce právě tehdy, když platí rovnost*
$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = -1\,; \tag{2.2}$$
2. Cévovu větu: *Přímky AL, BM, CK procházejí jedním bodem právě tehdy, když platí rovnost*
$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = 1\,; \tag{2.3}$$

přitom levou stranu (2.2) i (2.3) chápeme jako součin tří nenulových reálných čísel κ, λ, μ z rovností

$$\overrightarrow{AK} = \kappa\overrightarrow{KB}\,, \qquad \overrightarrow{BL} = \lambda\overrightarrow{LC}\,, \qquad \overrightarrow{CM} = \mu\overrightarrow{MA}\,. \tag{2.4}$$



[10] Klasické výsledky s původními důkazy.

Řešení:
Ze zadání úlohy plyne, že každá z dvojic vektorů $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KB})$, $(\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{LC})$, $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MA})$ je tvořena dvěma nenulovými lineárně závislými vektory, takže rovnosti (2.4) skutečně platí s vhodnými reálnými čísly κ, λ, μ, a to různými od 0 a -1, protože podle zadání jsou body K, L, M různé od vrcholů A, B, C.

Vrchol A zvolíme za počátek a body B, C, K, L, M určíme polohovými vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{l} = \overrightarrow{AL}$, $\vec{m} = \overrightarrow{AM}$. Přepíšeme rovnosti (2.4) pomocí těchto polohových vektorů a vyjádříme z nich vektory $\vec{k}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$ jako lineární kombinace (lineárně nezávislých) vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{k} = \kappa(\vec{b} - \vec{k})\,, \qquad \text{odtud} \qquad \vec{k} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\vec{b},$$

$$\vec{l} - \vec{b} = \lambda(\vec{c} - \vec{l})\,, \qquad \text{odtud} \qquad \vec{l} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{b} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{c},$$

$$\vec{m} - \vec{c} = -\mu\vec{m}\,, \qquad \text{odtud} \qquad \vec{m} = \frac{1}{1+\mu}\vec{c}.$$

(Vzorce jsou korektní, protože $\kappa, \lambda, \mu \neq -1$, jak jsme vysvětlili výše.)

1. Vyjádříme vektory $\overrightarrow{KL}$ a $\overrightarrow{KM}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{KL} = \vec{l} - \vec{k} = \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\kappa}{1+\kappa}\right)\vec{b} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{KM} = \vec{m} - \vec{k} = -\frac{\kappa}{1+\kappa}\vec{b} + \frac{1}{1+\mu}\vec{c}.$$

Body K, L, M leží v jedné přímce právě tehdy, když jsou vektory $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ lineárně závislé, a to vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ nastane právě tehdy, když

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{1+\lambda} - \frac{\kappa}{1+\kappa} & \frac{\lambda}{1+\lambda} \\ -\frac{\kappa}{1+\kappa} & \frac{1}{1+\mu} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Po úpravě a následném vynásobení číslem $(1+\kappa)(1+\lambda)(1+\mu) \neq 0$ dostáváme ekvivalentní rovnosti:

$$\frac{1}{1+\mu} \cdot \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{\kappa}{1+\kappa}\right) + \frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{\kappa}{1+\kappa} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+\kappa) - \kappa(1+\lambda) + \kappa\lambda(1+\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \kappa - \kappa - \kappa\lambda + \kappa\lambda + \kappa\lambda\mu = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\kappa\lambda\mu = -1\,,$$

což je tvrzení Menelaovy věty, kterou jsme chtěli dokázat.

2. Libovolný bod P s polohovým vektorem $\vec{p} = \overrightarrow{AP}$ leží na přímce AL, právě když pro jisté reálné číslo p platí

$$\vec{p} = p\overrightarrow{AL} = p\vec{l} = \frac{p}{1+\lambda}\vec{b} + \frac{p\lambda}{1+\lambda}\vec{c}.$$

Bod P leží současně i na přímce BM právě tehdy, když vektory

$$\overrightarrow{BP} = \vec{p} - \vec{b} = \frac{p-\lambda-1}{1+\lambda}\vec{b} + \frac{p\lambda}{1+\lambda}\vec{c} \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{BM} = \vec{m} - \vec{b} = -\vec{b} + \frac{1}{1+\mu}\vec{c}$$

jsou lineárně závislé, tedy právě tehdy, když

$$\det\begin{pmatrix} \frac{p-\lambda-1}{1+\lambda} & \frac{p\lambda}{1+\lambda} \\ -1 & \frac{1}{1+\mu} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Podobně bod P přímky AL leží na přímce CK právě tehdy, když vektory

$$\overrightarrow{CP} = \vec{p} - \vec{c} = \frac{p}{1+\lambda}\vec{b} + \frac{p\lambda-\lambda-1}{1+\lambda}\vec{c} \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{CK} = \vec{k} - \vec{c} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\vec{b} - \vec{c}$$

jsou lineárně závislé, tedy právě tehdy, když

$$\det\begin{pmatrix} \frac{p}{1+\lambda} & \frac{p\lambda-\lambda-1}{1+\lambda} \\ \frac{\kappa}{1+\kappa} & -1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Přímky AL, BM, CK tedy mají společný bod právě tehdy, když pro nějaké reálné p jsou oba předchozí determinanty zároveň nulové. Výpočtem obou determinantů dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{p-\lambda-1}{1+\lambda}\cdot\frac{1}{1+\mu} + \frac{p\lambda}{1+\lambda} = 0\,, \qquad -\frac{p}{1+\lambda} - \frac{p\lambda-\lambda-1}{1+\lambda}\cdot\frac{\kappa}{1+\kappa} = 0\,.$$

První rovnici vynásobíme číslem $(1+\lambda)(1+\mu)$ a druhou rovnici číslem $-(1+\lambda)(1+\kappa)$ (což můžeme, neboť $\kappa, \lambda, \mu \neq -1$) a dostáváme ekvivalentní soustavu

$$p - \lambda - 1 + p\lambda + p\lambda\mu = 0\,, \qquad p + p\kappa + p\kappa\lambda - \kappa\lambda - \kappa = 0\,.$$

Z první rovnice vyjádříme p za předpokladu $1 + \lambda + \lambda\mu \neq 0$ ve tvaru

$$p = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\,,$$

(kdyby platilo $1 + \lambda + \lambda\mu = 0$, měli bychom z první rovnice $\lambda = -1$, což je v rozporu se zadáním, takže takový případ nemusíme uvažovat). Podobně z druhé rovnice soustavy plyne vyjádření

$$p = \frac{\kappa(1+\lambda)}{1+\kappa+\kappa\lambda}\,,$$

(přitom nerovnost $1 + \kappa + \kappa\lambda \neq 0$ se opět zdůvodní podmínkou $\lambda \neq -1$). Existenci čísla p lze tedy vyjádřit vztahem

$$\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu} = \frac{\kappa(1+\lambda)}{1+\kappa+\kappa\lambda}\,,$$

který je s ohledem na $1 + \lambda \neq 0$ ekvivalentní s rovností

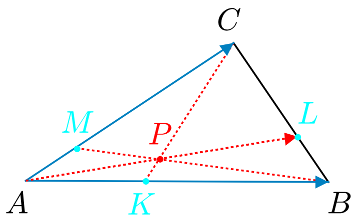
$$\kappa(1+\lambda+\lambda\mu) = 1 + \kappa + \kappa\lambda\,, \qquad \text{neboli} \qquad \kappa\lambda\mu = 1\,,$$

a proto i Cévova věta je dokázána. □

Příklad 2.1.10: *Dokažte tzv.* druhou Van Aubelovu větu*: Uvnitř trojúhelníku ABC zvolíme libovolný bod P a označíme K, L, M průsečíky polopřímek CP, AP, BP po řadě se stranami AB, BC, CA. Pak platí rovnost*

$$\frac{|AP|}{|PL|} = \frac{|AK|}{|KB|} + \frac{|AM|}{|MC|}\,. \tag{2.5}$$

(Podobné rovnosti platí i pro poměry $|BP| : |PM|$ a $|CP| : |PK|$.)[11]



Řešení:
Nejprve označíme jednotlivé poměry z pravé strany rovnosti (2.5) postupně κ, μ. Z vektorových rovností

$$K - A = \kappa(B - K) \qquad \text{a} \qquad M - A = \mu(C - M)$$

najdeme vyjádření bodů K, M ve tvaru

$$K = \frac{A + \kappa B}{1 + \kappa} \qquad \text{a} \qquad M = \frac{A + \mu C}{1 + \mu}\,. \tag{2.6}$$

K dalšímu postupu se inspirujeme metodou hmotných bodů (viz [šim–97]). Přiřadíme-li vrcholům A, B, C po řadě hmotnosti 1, κ, μ, pak body K, M jsou podle (2.6) těžišti dvojic hmotných bodů $\{A, B\}$, resp. $\{A, C\}$. Taková fyzikální interpretace nás vede k hypotéze, že body L a P jakožto těžiště dvojice $\{B, C\}$, resp. trojice $\{A, B, C\}$ budou mít vyjádření

$$L = \frac{\kappa B + \mu C}{\kappa + \mu} \qquad \text{a} \qquad P = \frac{A + \kappa B + \mu C}{1 + \kappa + \mu}\,. \tag{2.7}$$

Rovnosti (2.7) jistě zadávají některý bod L úsečky BC a některý bod P trojúhelníku ABC, jak však ověřit, že to jsou skutečně body ze zadání příkladu? Zřejmě ověřením, že pro body K, L, M, P zadané rovnostmi (2.6) a (2.7) je každá z dvojic vektorů $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PL})$, $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PM})$, $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PK})$ lineárně závislá. K nalezení dosvědčujících lineárních kombinací nám opět pomůže zmíněná interpretace. Podle ní budeme počítat:

$$1(P - A) - (\kappa + \mu)(L - P) = (1 + \kappa + \mu)P - A - (\kappa + \mu)L = A + \kappa B + \mu C - A - \kappa B - \mu C = \vec{o}\,,$$

$$\kappa(P - B) - (1 + \mu)(M - P) = (1 + \kappa + \mu)P - \kappa B - (1 + \mu)M = A + \kappa B + \mu C - \kappa B - A - \mu C = \vec{o}\,,$$

$$\mu(P - C) - (1 + \kappa)(K - P) = (1 + \kappa + \mu)P - \mu C - (1 + \kappa)K = A + \kappa B + \mu C - \mu C - A - \kappa B = \vec{o}\,.$$

[11] Vlastní aplikace sestavená na námět klasického výsledku.

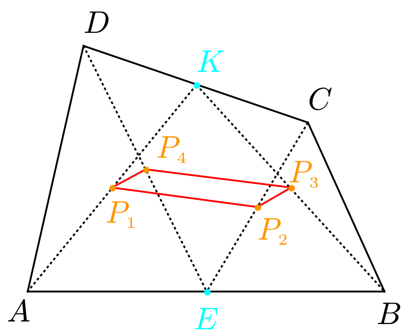
Ukázali jsme, že body L a P ze zadání úlohy mají skutečně vyjádření daná rovnostmi (2.7). Navíc podle první ze tří předchozích vektorových rovností platí

$$P - A = (\kappa + \mu)(L - P)\,,$$

odkud plyne rovnost $|AP| = (\kappa + \mu) \cdot |PL|$ dokazující (2.5). □

2.2 Další řešené úlohy

Úloha 2.2.1: *Ve čtyřúhelníku $ABCD$, jehož strany AB a CD nejsou rovnoběžné, označíme E střed strany AB a K střed strany CD. Dokažte, že středy úseček AK, CE, BK, DE jsou vrcholy rovnoběžníku.*[12]



Řešení:
Podle zadání

$$E = \frac{1}{2}(A + B)\,, \qquad K = \frac{1}{2}(C + D)\,.$$

Středy úseček AK, CE, BK, DE označíme postupně $P_1, \ldots, P_4$:

$$P_1 = \frac{1}{2}(A + K) = \frac{1}{4}(2A + C + D)\,, \qquad P_2 = \frac{1}{2}(C + E) = \frac{1}{4}(2C + A + B)\,,$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(B + K) = \frac{1}{4}(2B + C + D)\,, \qquad P_4 = \frac{1}{2}(D + E) = \frac{1}{4}(2D + A + B)\,.$$

Vzhledem k tomu, že $ABCD$ není rovnoběžník (ve kterém $A + C = B + D$), plyne z uvedených vyjádření $P_1 \neq P_4$ a $P_2 \neq P_3$. Navíc pro vektory $\overrightarrow{P_1P_2}$ a $\overrightarrow{P_4P_3}$ dostáváme

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{4}(2C + A + B - 2A - C - D) = \frac{1}{4}(-A + B + C - D) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\,,$$

$$P_3 - P_4 = \frac{1}{4}(2B + C + D - 2D - A - B) = \frac{1}{4}(-A + B + C - D) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\,.$$

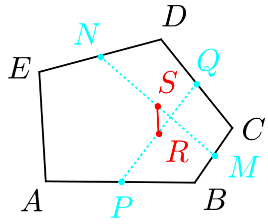
[12] [pra–86], str. 100, úloha 5.3.

Vektory $\overrightarrow{P_1P_2}$ a $\overrightarrow{P_4P_3}$ se tudíž sobě rovnají a jsou nenulové, neboť vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ jsou podle zadání lineárně nezávislé. Zároveň vektor $\overrightarrow{P_4P_1}$ s vyjádřením

$$P_1 - P_4 = \frac{1}{4}(2A + C + D - 2D - A - B) = \frac{1}{4}(A - B + C - D) = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$$

není lineárně závislý s vektorem $\overrightarrow{P_1P_2}$ (opět kvůli lineární nezávislosti vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$), body $P_1, \ldots, P_4$ proto neleží v jedné přímce, takže $P_1P_2P_3P_4$ je skutečně rovnoběžník. □

Úloha 2.2.2: *V rovině je dáno pět různých bodů A, B, C, D, E. Spojíme dvěma úsečkami středy úseček AB, CD a středy úseček BC, DE. Pak středy těchto dvou úseček spojíme třetí úsečkou. Dokažte, že poslední úsečka je rovnoběžná s úsečkou AE a má ve srovnání s ní čtvrtinovou délku.*[13]



Řešení:
Označíme středy AB, CD, BC, DE postupně P, Q, M, N a středy PQ, MN pak postupně R, S. Platí

$$P = \frac{1}{2}(A + B)\,, \quad Q = \frac{1}{2}(C + D)\,, \quad M = \frac{1}{2}(B + C)\,, \quad N = \frac{1}{2}(D + E)\,,$$

odtud pak

$$R = \frac{1}{2}(P + Q) = \frac{1}{4}(A + B + C + D)\,, \quad S = \frac{1}{2}(M + N) = \frac{1}{4}(B + C + D + E)\,.$$

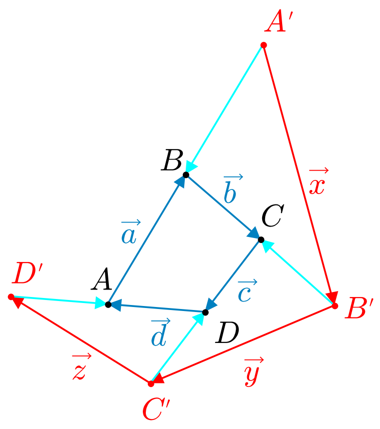
Pro vektor $\overrightarrow{RS}$ tudíž platí

$$\overrightarrow{RS} = S - R = \frac{1}{4}(B + C + D + E - A - B - C - D) = \frac{1}{4}(E - A) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\,.$$

Tím jsou obě tvrzení o úsečce RS dokázána. □

Úloha 2.2.3: *Na tabuli jsou nakresleny čtyři body A, B, C, D. Sestrojme body A', B', C', D' následujícím způsobem: A' je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem B, B' je obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem C, C' je obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem D, D' je obrazem bodu D ve středové souměrnosti se středem A. Nyní smažeme body A, B, C, D. Můžeme zpětně najít polohu bodů A, B, C, D, když známe polohu bodů A', B', C', D'?*[14]

[13] [pra–86], str. 105, úloha 5.44.
[14] [bech–03], str. 30, úloha 3; [gel–07], str. 205, úloha 583.



Řešení:
Označme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Je zřejmé, že

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}, \quad \text{odtud} \quad \vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Podle zadání je bod A' obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem B, takže platí

$$\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}\,, \qquad \text{a také} \qquad \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}\,,$$

analogické vektorové rovnosti platí i v případě bodů B', C' a D':

$$\overrightarrow{B'C} = -\vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{BB'} = 2\vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{C'D} = -\vec{c}, \qquad \overrightarrow{CC'} = 2\vec{c}, \qquad \overrightarrow{D'A} = -\vec{d}\,, \qquad \overrightarrow{DD'} = 2\vec{d}.$$

Označme ještě vektory $\vec{x} = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{y} = \overrightarrow{B'C'}$, $\vec{z} = \overrightarrow{C'D'}$. Pro ně podle předchozího platí

$$\vec{x} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + 2\vec{b}\,,$$

$$\vec{y} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CC'} = -\vec{b} + 2\vec{c},$$

$$\vec{z} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DD'} = -\vec{c} + 2\vec{d} = -\vec{c} + 2(-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = -2\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}.$$

Odtud plyne, že

$$\vec{b} = 2\vec{c} - \vec{y}\,, \qquad \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{x} = 4\vec{c} - 2\vec{y} - \vec{x}\,.$$

Nyní dosadíme za vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ do vyjádření pro $\vec{z}$ a dostaneme

$$\vec{z} = -2(4\vec{c} - 2\vec{y} - \vec{x}) - 2(2\vec{c} - \vec{y}) - 3\vec{c} = -15\vec{c} + 2\vec{x} + 6\vec{y}\,.$$

Odtud vyjádříme vektor $\vec{c}$:

$$\vec{c} = -\overrightarrow{C'D} = \frac{1}{15}(2\vec{x} + 6\vec{y} - \vec{z}) \quad \text{neboli} \quad D = C' - \frac{1}{15}(2\vec{x} + 6\vec{y} - \vec{z})\,.$$

Bod D tedy můžeme najít pomocí bodu C' a známých vektorů $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, bod A pak určit jako střed DD', bod B jako střed AA' a bod C jako střed BB'. $\square$

Úloha 2.2.4: *Řekneme, že množina A nenulových vektorů v rovině má vlastnost S, jestliže obsahuje nejméně tři prvky a pro každý vektor $\vec{u} \in A$ existují vektory $\vec{v}, \vec{w} \in A$ takové, že $\vec{v} \neq \vec{w}$ a $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Zjistěte nejmenší možný počet prvků konečné množiny vektorů s vlastností S.*[15]

ŘEŠENÍ:
Uvažujme trojúhelník ABC a v něm vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$. Tato množina šesti vektorů zřejmě má vlastnost S. Dokažme nyní, že každá konečná množina vektorů s vlastností S má nejméně šest prvků.

Mějme konečnou množinu A s vlastností S a umístěme všechny její vektory do počátku O, takže $A = \{\overrightarrow{OX_1}, \dots, \overrightarrow{OX_n}\}$, kde $n \geq 3$. Zvolme dva nerovnoběžné vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$, kde $\vec{u}$ ani $\vec{v}$ není rovnoběžný s žádným z vektorů z množiny A, ani s žádným z vektorů $\overrightarrow{X_iX_j}$, $i \neq j$.

Označme nyní $\overrightarrow{OX_i} = a_i\vec{u} + b_i\vec{v}$, kde $i = 1, \dots, n$, rozklad vektoru $\overrightarrow{OX_i}$ v bázi $(\vec{u}, \vec{v})$. Pak množina reálných čísel $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ má všechny prvky nenulové (podle výběru vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$) a má vlastnost podobnou vlastnosti S. Nechť a je maximum množiny M. Je zřejmé, že $a > 0$ a že existují reálná čísla $b, c \in M$, $b \neq c$, $b, c > 0$ takové, že $a = b+c$, jinak by a nebylo maximum (a nemůže být součtem kladného a záporného čísla menších než ono samo, stejně tak nemůže být záporné a součtem dvou záporných čísel menších než a). Podobně pro minimum a' množiny M, které je nutně záporné, existují čísla $b', c' \in M$, $b' \neq c'$, $b', c' < 0$ taková, že $a' = b' + c'$. Tím jsme dostali šest různých prvků množiny M, kterým odpovídá šest různých vektorů z množiny A. Tím je důkaz hotov. □

Úloha 2.2.5:

1. *Máme dány středy stran obecného n-úhelníku v pořadí, v jakém leží na jeho hranici. Je možné tento n-úhelník rekonstruovat?*
2. *Sestrojte pětiúhelník podle pětice středů jeho stran zadaných v pořadí, v jakém leží na jeho hranici.*[16]

ŘEŠENÍ:
1. Označme vrcholy neznámého n-úhelníku po řadě $P_1, P_2, \dots P_n$ a dané středy jeho stran postupně $M_1, M_2, \dots, M_n$, takže platí

$$2M_1 = P_1 + P_2\,, \qquad 2M_2 = P_2 + P_3\,, \qquad \dots \qquad 2M_n = P_n + P_1\,.$$

   Musíme zjistit, kdy má tato soustava n rovnic s neznámými $P_1, P_2, \dots P_n$ právě jedno řešení. Je-li n liché, ze soustavy plyne

$$P_1 = 2M_1 - P_2 = 2M_1 - 2M_2 + P_3 = \dots = 2M_1 - 2M_2 + 2M_3 - \dots + 2M_n - P_1\,,$$

   odtud P_1 je dáno jednoznačně vztahem

$$P_1 = M_1 - M_2 + M_3 - \dots + M_n$$

[15] [bech–03], str. 30–31, upravená úloha 4.
[16] [bar–95], str. 33–34, úloha 366.

a podobně najdeme další vrcholy P_i. Je-li n sudé, je

$$P_1 = 2M_1 - 2M_2 + 2M_3 - \cdots - 2M_n + P_1 \,,$$

což je splněno právě tehdy, když

$$M_1 + M_3 + \cdots + M_{n-1} = M_2 + M_4 + \cdots + M_n \,.$$

Pokud je tato podmínka splněna, soustava rovnic pro P_i je lineárně závislá a existuje nekonečně mnoho řešení, není-li splněna, soustava nemá řešení. Rekonstrukce je tedy možná právě tehdy, když je číslo n liché.

2. Z předchozí části plyne, že hledaný pětiúhelník $P_1P_2P_3P_4P_5$ je jednoznačně určen středy $M_1, \ldots, M_5$, neboť jeho vrcholy P_i mají vyjádření

$$P_1 = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 \,,$$

$$P_2 = 2M_1 - P_1 = M_1 + M_2 - M_3 + M_4 - M_5 \,,$$

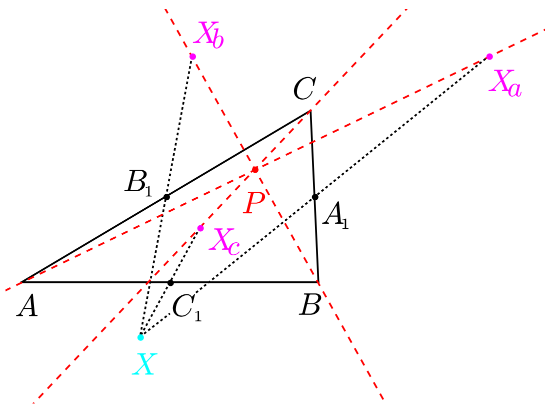
$$P_3 = 2M_2 - P_2 = -M_1 + M_2 + M_3 - M_4 + M_5 \,,$$

$$P_4 = 2M_3 - P_3 = M_1 - M_2 + M_3 + M_4 - M_5 \,,$$

$$P_5 = 2M_4 - P_4 = -M_1 + M_2 - M_3 + M_4 + M_5 \,,$$

ze kterých je snadné provést jejich konstrukci. Například $P_1 = M_1 + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_4M_5}$, atd. □

Úloha 2.2.6: *Je dán trojúhelník ABC. Označme X_a, X_b, X_c obrazy libovolného bodu X po řadě v souměrnostech podle středů stran BC, AC, AB. Dokažte, že přímky AX_a, BX_b, CX_c mají společný bod.*[17]



[17]Původní úloha.

Řešení:
Pro středy A_1, B_1, C_1 stran BC, AC, AB a obrazy X_a, X_b, X_c bodu X platí

$$A_1 = \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(X+X_a)\,, \qquad \text{odtud} \qquad X_a = B+C-X\,,$$

analogicky pak

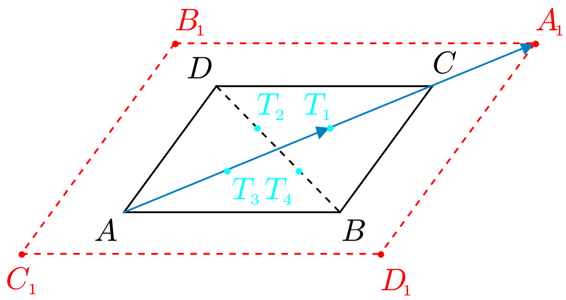
$$X_b = A+C-X\,, \qquad X_c = A+B-X\,.$$

Pro střed P úsečky AX_a proto platí

$$P = \frac{1}{2}(A+X_a) = \frac{1}{2}(A+B+C-X)\,.$$

Ze souměrnosti získaného vyjádření ovšem plyne, že bod P je také středem úseček BX_b a CX_c, je to tedy společný bod všech tří uvažovaných přímek. $\square$

Úloha 2.2.7: *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ body T_1, T_2, T_3, T_4 označují postupně těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC. Nechť body A_1, B_1, C_1, D_1 jsou body souměrně sdružené s body A, B, C, D po řadě podle středů T_1, T_2, T_3, T_4. Dokažte, že $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když $A_1B_1C_1D_1$ je rovnoběžník.*[18]



Řešení:
Pro těžiště T_1, T_2, T_3, T_4 trojúhelníků ze zadání platí

$$T_1 = \frac{1}{3}(B+C+D)\,, \qquad T_2 = \frac{1}{3}(A+C+D)\,, \qquad T_3 = \frac{1}{3}(A+B+D)\,, \qquad T_4 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,.$$

Bod A_1 je souměrně sdružený s bodem A podle středu T_1, platí tedy

$$T_1 = \frac{1}{2}(A+A_1) \quad \text{neboli} \quad A_1 = 2T_1 - A = -A + \frac{2}{3}B + \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}D\,,$$

analogicky

$$B_1 = \frac{2}{3}A - B + \frac{2}{3}C + \frac{2}{3}D\,, \qquad C_1 = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}B - C + \frac{2}{3}D\,, \qquad D_1 = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}B + \frac{2}{3}C - D\,.$$

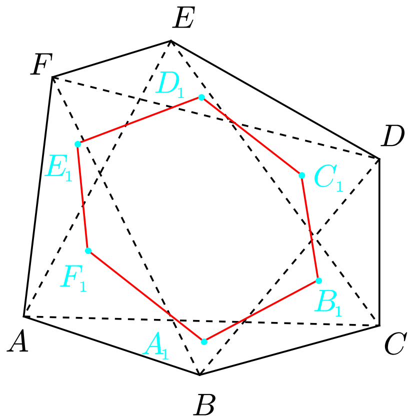
[18] [grb–03], str. 17, úloha 3.2, řešení vlastní, bez komplexních čísel užitých ve zdroji.

$A_1B_1C_1D_1$ je rovnoběžník právě tehdy, když $B_1 - A_1 = C_1 - D_1$, což lze podle předchozích vyjádření zapsat rovností

$$\frac{5}{3}A - \frac{5}{3}B = \frac{5}{3}D - \frac{5}{3}C\,, \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,.$$

Odtud již plyne, že $A_1B_1C_1D_1$ je rovnoběžník právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník, neboť poslední vlastnost lze vyjádřit právě výše odvozenou rovností $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. □

Úloha 2.2.8: *Mějme libovolný šestiúhelník $ABCDEF$ a nechť A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB. Pak vzniklý šestiúhelník $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ má rovnoběžné a stejně dlouhé protilehlé strany. Dokažte.*[19]



Řešení:
Protilehlé strany šestiúhelníku $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ jsou stejně dlouhé a rovnoběžné právě tehdy, když platí $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{F_1E_1}$ a $\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{A_1F_1}$. Dokážeme pouze první rovnost, ostatní se dokážou analogicky. Těžiště zkoumaných trojúhelníků mají vyjádření

$$A_1 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,, \quad B_1 = \frac{1}{3}(B+C+D)\,, \quad D_1 = \frac{1}{3}(D+E+F)\,, \quad E_1 = \frac{1}{3}(E+F+A)\,,$$

proto pro jimi určené vektory platí

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{3}(D-A)\,, \qquad \overrightarrow{E_1D_1} = \frac{1}{3}(D-A)\,.$$ □

Úloha 2.2.9: *Mějme čtyřúhelník $ABCD$ a nechť $A_1B_1C_1D_1$ je čtyřúhelník tvořený těžišti trojúhelníků BCD, CDA, DAB, ABC. Ukažte, že $ABCD$ můžeme zobrazit na $A_1B_1C_1D_1$ ve vhodné stejnolehlosti. Najděte její střed Z a koeficient t.*[20]

Řešení:
Pro zkoumaná těžiště podle známého vzorce platí

$$A_1 = \frac{1}{3}(B+C+D)\,, \quad B_1 = \frac{1}{3}(A+C+D)\,, \quad C_1 = \frac{1}{3}(A+B+D)\,, \quad D_1 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,,$$

[19] [eng–97], str. 291, úloha E3.
[20] [eng–97], str. 292, úloha E4.

odtud plynou rovnosti

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{3}(-B + A) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,,$$

$$\overrightarrow{B_1C_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{C_1D_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\,, \qquad \overrightarrow{D_1A_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\,.$$

Vidíme, že hledaná stejnolehlost musí mít koeficient $t = -\frac{1}{3}$. Její střed Z najdeme například z rovnice pro vzor A a obraz A_1 :

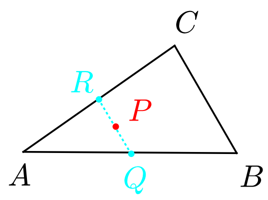
$$\overrightarrow{ZA_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ZA}\,, \qquad \text{neboli} \qquad A_1 - Z = -\frac{1}{3}(A - Z)\,,$$

$$3A_1 + A = 4Z\,, \qquad \text{neboli} \qquad (B + C + D) + A = 4Z\,,$$

$$Z = \frac{1}{4}(A + B + C + D)\,.$$

Takto určený bod Z se nezmění záměnou pořadí bodů A, B, C, D, a jde tedy opravdu o střed stejnolehlosti, která má požadovanou vlastnost. □

Úloha 2.2.10: *V trojúhelníku ABC označme P střed střední příčky rovnoběžné se stranou BC. Dokažte, že pro libovolný bod X platí $2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = 4\overrightarrow{XP}$.*[21]



Řešení:
Označme Q a R středy stran AB a AC :

$$Q = \frac{1}{2}(A + B)\,, \qquad R = \frac{1}{2}(A + C)\,.$$

Pak QR je zkoumaná střední příčka rovnoběžná se stranou BC a pro její střed P platí

$$P = \frac{1}{2}(R + Q) = \frac{1}{4}(2A + B + C)\,.$$

Odtud

$$2\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} - 4\overrightarrow{XP} = 2(A - X) + (B - X) + (C - X) - 4(P - X) =$$

$$= (2A + B + C) - 4X - (2A + B + C) + 4X = \vec{o}\,.$$

Tím je rovnost ze zadání dokázána. □

[21] [pra–86], str. 104, úloha 5.39.

Úloha 2.2.11: *Řešte rovnici* $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XE}$*, kde* A*,* B*,* C*,* D*,* E *jsou dané body a* X *je neznámý bod (téže roviny). Popište konstrukci všech řešení a jejich počet.*[22]

Řešení:
Ekvivalentními úpravami dané rovnice postupně dostaneme:

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XE}\,,$$

$$A-X+B-X+C-X=D-X+E-X\,,$$

$$A+B+C-3X=D+E-2X\,,$$

$$X=A+B+C-(D+E)=3\cdot\frac{A+B+C}{3}-2\cdot\frac{D+E}{2}\,,$$

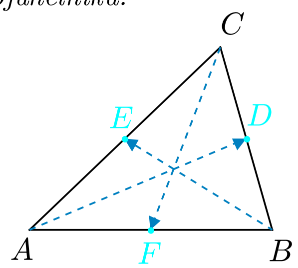
$$X=3T-2S\,,$$

kde T je těžiště $\triangle ABC$ a S střed úsečky DE. Rovnice má tedy jediné řešení X, a to lze psát ve tvaru

$$X=T+2(T-S)=T+2\overrightarrow{ST}\,,$$

což je zároveň návod pro konstrukci bodu X z bodů T a S, jejichž sestrojení je triviální. □

Úloha 2.2.12: *Dokažte, že je možné sestrojit trojúhelník, jehož každá strana je shodná a rovnoběžná s jednou těžnicí daného trojúhelníku.*[23]



Řešení:
Nechť D, E, F jsou po řadě středy stran BC, AC a AB daného trojúhelníku ABC. Pro vektory určující těžnice $\vec{t_a}$, $\vec{t_b}$ a $\vec{t_c}$ z obrázku vyčteme, že

$$\vec{t_a}=D-A=\frac{B+C}{2}-A\,,\qquad \vec{t_b}=E-B=\frac{A+C}{2}-B\,,\qquad \vec{t_c}=F-C=\frac{A+B}{2}-C\,.$$

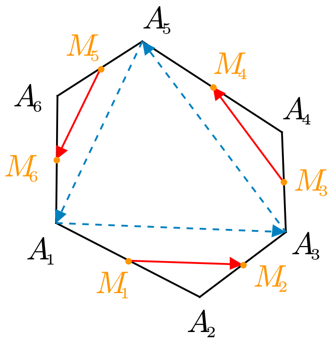
Některé tři vektory tvoří trojúhelník, právě když jsou všechny tři nenulové, žádné dva nejsou rovnoběžné a jejich součet je roven nulovému vektoru. První dvě podmínky jsou pro naše vektory $\vec{t_a}$, $\vec{t_b}$, $\vec{t_c}$ zřejmě splněny, neboť těžnice AD, BE, CF mají nenulovou délku a každé dvě z nich se protínají. Dále z předchozího vyjádření vektorů dostaneme

$$\vec{t_a}+\vec{t_b}+\vec{t_c}=\frac{1}{2}(B+C+A+C+A+B)-(A+B+C)=\vec{o}\,.$$

Jde tedy skutečně o trojici vektorů tvořících trojúhelník. □

[22] [pra–86], str. 105, úloha 5.41.
[23] [lar–90], str. 380–381, úloha 8.3.2.

Úloha 2.2.13: *Nechť $M_1, M_2, \ldots M_6$ jsou v přirozeném pořadí středy stran libovolného konvexního šestiúhelníku $A_1A_2 \ldots A_6$. Dokažte, že existuje trojúhelník, jehož strany jsou shodné a rovnoběžné s úsečkami M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.*[24]



Řešení:
Vektory $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_5M_6}$ tvoří trojúhelník, jestliže jsou nenulové, žádné dva z nich nejsou rovnoběžné a součet všech tří těchto vektorů je nulový vektor. Nejprve si tyto vektory vyjádřeme:

$$M_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)\,, \qquad M_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A_3)\,, \qquad M_3 = \frac{1}{2}(A_3 + A_4)\,,$$

$$M_4 = \frac{1}{2}(A_4 + A_5)\,, \qquad M_5 = \frac{1}{2}(A_5 + A_6)\,, \qquad M_6 = \frac{1}{2}(A_6 + A_1)\,,$$

odkud

$$\overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1 = \frac{1}{2}(A_3 - A_1)\,,$$

$$\overrightarrow{M_3M_4} = M_4 - M_3 = \frac{1}{2}(A_5 - A_3)\,,$$

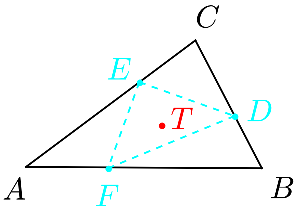
$$\overrightarrow{M_5M_6} = M_6 - M_5 = \frac{1}{2}(A_1 - A_5)\,.$$

Z vyjádření je vidět, že všechny tři vektory jsou nenulové, neboť body $A_1, \ldots, A_6$ jsou vrcholy šestiúhelníku, takže to jsou body navzájem různé. Dále z obrázku vidíme, že vektory $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_5}$ a $\overrightarrow{A_5A_1}$ tvoří trojúhelník, tedy žádné dva z nich nejsou rovnoběžné, a tedy ani mezi jejich násobky $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_5M_6}$ nejsou žádné dva navzájem rovnoběžné vektory. Na závěr ukážeme, že součet vektorů $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_5M_6}$ je nulový:

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_4} + \overrightarrow{M_5M_6} = \frac{1}{2}(A_3 - A_1 + A_5 - A_3 + A_1 - A_5) = \vec{o}\,. \qquad \square$$

Úloha 2.2.14: *V trojúhelníku ABC rozdělují body D, E, F po řadě strany BC, CA, AB na třetiny tak, že $|BC| = 3|BD|$, $|CA| = 3|CE|$, $|AB| = 3|AF|$. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají společné těžiště.*[25]

[24] [pra–86], str. 100, úloha 5.1.
[25] [lar–90], str. 379–380, úloha 8.3.1. Zobecnění výsledku podáme v Úloze 2.2.16.



ŘEŠENÍ:
Pro body D, E, F ze zadání úlohy platí

$$D = B + \frac{1}{3}(C - B) = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B\,, \qquad E = C + \frac{1}{3}(A - C) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C\,,$$

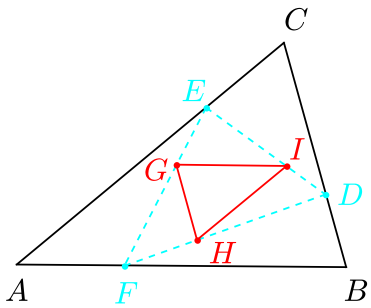
$$F = A + \frac{1}{3}(B - A) = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}A\,,$$

odkud podle známého vyjádření pro těžiště T trojúhelníku DEF dostáváme

$$T = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}A\right) = \frac{1}{3}(A + B + C)\,,$$

což je zároveň i vyjádření těžiště trojúhelníku ABC. □

Úloha 2.2.15: *Body D, E, F rozdělují strany trojúhelníku ABC tak, že platí $|BC| = 3|BD|$, $|CA| = 3|CE|$ a $|AB| = 3|AF|$, podobně body G, H, I rozdělují strany trojúhelníku DEF tak, že $|EF| = 3|EG|$, $|FD| = 3|FH|$ a $|DE| = 3|DI|$. Dokažte, že strany trojúhelníku GHI jsou rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC a že každá strana trojúhelníku GHI má třetinovou délku v porovnání s odpovídající rovnoběžnou stranou trojúhelníku ABC.*[26]



ŘEŠENÍ:
Podle zadání a obrázku vidíme, že platí

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD} \quad \text{neboli} \quad D - B = \frac{1}{3}(C - B)\,, \qquad \text{odtud} \qquad D = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C\,,$$

[26] [lar–90], str. 390, úloha 8.3.9.

analogicky

$$E = \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A\,, \qquad F = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B\,.$$

Pro body G, H, I pak podobně dostaneme

$$G = \frac{2}{3}E + \frac{1}{3}F = \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}B + \frac{4}{9}C\,, \qquad H = \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}D = \frac{4}{9}A + \frac{4}{9}B + \frac{1}{9}C\,,$$

$$I = \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}E = \frac{1}{9}A + \frac{4}{9}B + \frac{4}{9}C\,.$$

Odtud pro vektory stran trojúhelníku GHI máme

$$G - H = \frac{1}{3}(C - B)\,, \qquad H - I = \frac{1}{3}(A - C)\,, \qquad I - G = \frac{1}{3}(B - A)\,,$$

což je (vektorově zapsáno) všechno to, co jsme měli dokázat. □

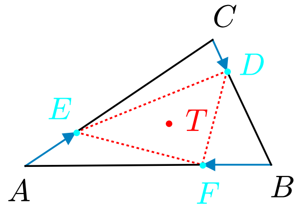
Poznámka:
Z odvozených vyjádření bodů G, H, I plyne

$$\frac{3}{4}G + \frac{1}{4}B = \frac{3}{4}H + \frac{1}{4}C = \frac{3}{4}I + \frac{1}{4}A = \frac{1}{3}(A + B + C)\,.$$

Protože poslední výraz určuje těžiště trojúhelníku ABC, je tento bod středem stejnolehlosti posuzovaných trojúhelníků ABC a GHI.

Úloha 2.2.16: *Nechť D, E, F jsou body zvolené po řadě uvnitř stran BC, AC, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že trojúhelníky ABC a DEF mají společné těžiště právě tehdy, když platí rovnosti*[27]

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|FB|}\,.$$



Řešení:
Nechť body D, E, F jsou určeny na stranách BC, AC, AB čísly k, l, m z rovností

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CB}\,, \qquad \overrightarrow{AE} = l\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{BF} = m\overrightarrow{BA}\,,$$

což znamená, že

$$D = kB + (1-k)C\,, \qquad E = lC + (1-l)A\,, \qquad F = mA + (1-m)B\,,$$

[27] [ira–00], str. 5, úloha 2, řešení vlastní, bez použití komplexních čísel.

a také

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{1-k}{k}\,, \qquad \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{1-l}{l}\,, \qquad \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{1-m}{m}\,.$$

Proto rovnosti ze závěru zadání úlohy nastanou, právě když $k = l = m$.

1. Platí-li $k = l = m$, pak těžiště trojúhelníku DEF, tedy bod s vyjádřením

   $$\frac{1}{3}(D+E+F) = \frac{1}{3}(kB + (1-k)C + lC + (1-l)A + mA + (1-m)B) = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

   splývá s těžištěm trojúhelníku ABC.

2. Mají-li trojúhelníky ABC a DEF společné těžiště T, pak

   $$3T = A + B + C = D + E + F\,,$$

   neboli

   $$A + B + C = kB + (1-k)C + lC + (1-l)A + mA + (1-m)B\,,$$

   odtud pak

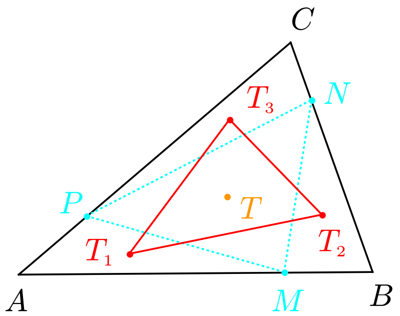
   $$(m-l)A + (k-m)B + (l-k)C = \vec{o}\,.$$

   Protože body A, B, C tvoří vrcholy trojúhelníku, jsou tyto body nekolineární, a tedy koeficienty v poslední kombinaci musí být nulové, odtud $k = l = m$. □

Úloha 2.2.17: *Nechť ABC je trojúhelník, bod T je jeho těžiště a M, N, P jsou body zvolené postupně na stranách AB, BC, CA tak, že*

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = k\,.$$

Dále nechť T_1, T_2, T_3 jsou postupně těžiště trojúhelníků AMP, BNM, CPN. Dokažte, že trojúhelníky ABC a $T_1T_2T_3$ mají společné těžiště.[28]



[28] [bech–02], str. 31–32, první část úlohy 3. Její druhou část uvedeme později jako úlohu 3.2.60.

Řešení:
Z rovností poměrů ze zadání úlohy plynou vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}\,, \qquad \overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{NC}\,, \qquad \overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{PA}\,,$$

odtud dostáváme vyjádření pro body M, N, P:

$$M = \frac{1}{k+1}(A + kB)\,, \qquad N = \frac{1}{k+1}(B + kC)\,, \qquad P = \frac{1}{k+1}(C + kA)\,.$$

Pro těžiště trojúhelníku ABC platí

$$T = \frac{1}{3}(A + B + C)\,,$$

a pro těžiště T_1, T_2, T_3 trojúhelníků AMP, BNM, CPN podobně

$$T_1 = \frac{1}{3}(A+M+P) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(A+kA+A+kB+C+kA) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(2A+2kA+kB+C)\,,$$

$$T_2 = \frac{1}{3}(B+M+N) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(B+kB+A+kB+B+kC) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(A+2B+2kB+kC)\,,$$

$$T_3 = \frac{1}{3}(C+N+P) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(C+kC+B+kC+C+kA) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(kA+B+2C+2kC)\,.$$

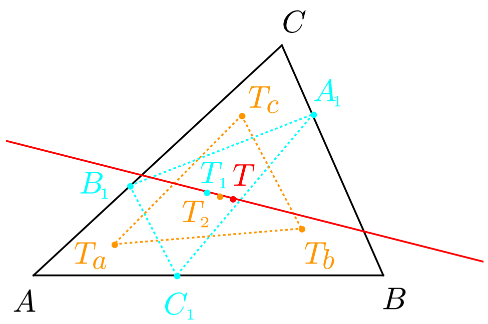
Konečně pro těžiště G trojúhelníku $T_1T_2T_3$ platí

$$G = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{k+1}(2A + 2kA + kB + C + A + 2B + 2kB + kC + kA + B + 2C + 2kC) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{k+1}(3A + 3kA + 3B + 3kB + 3C + 3kC) = \frac{1}{3}(A + B + C) = T\,. \qquad \square$$

Úloha 2.2.18: *Uvnitř stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1, C_1. Nechť T, T_a, T_b, T_c jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1, konečně T_1 a T_2 jsou po řadě těžiště trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $T_aT_bT_c$. Dokažte, že body T, T_1 a T_2 leží v přímce.*[29]



[29] [gro–02], str. 139–140, úloha 9.2, a).

Řešení:
Body A_1, B_1, C_1 leží uvnitř úseček BC, CA, AB, existují tedy čísla $a, b, c \in (0,1)$ taková, že

$$A_1 = aB + (1-a)C\,, \qquad B_1 = bA + (1-b)C\,, \qquad C_1 = cA + (1-c)B\,.$$

Pak pro jednotlivá těžiště ze zadání úlohy dostaneme vyjádření

$$T = \frac{1}{3}(A+B+C)\,,$$

$$T_a = \frac{1}{3}(A+B_1+C_1) = \frac{1}{3}\left((1+b+c)A + (1-c)B + (1-b)C\right),$$

$$T_b = \frac{1}{3}(A_1+B+C_1) = \frac{1}{3}\left(cA + (2+a-c)B + (1-a)C\right),$$

$$T_c = \frac{1}{3}(A_1+B_1+C) = \frac{1}{3}\left(bA + aB + (3-a-b)C\right),$$

$$T_1 = \frac{1}{3}(A_1+B_1+C_1) = \frac{1}{3}\left((b+c)A + (a-c+1)B + (2-a-b)C\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{3}(T_a+T_b+T_c) = \frac{1}{9}\left((1+2b+2c)A + (3+2a-2c)B + (5-2a-2b)C\right).$$

Nyní vyjádříme vektory $\overrightarrow{TT_1}$ a $\overrightarrow{TT_2}$:

$$\overrightarrow{TT_1} = T_1 - T = \frac{1}{3}\left((b+c-1)A + (a-c)B + (1-a-b)C\right),$$

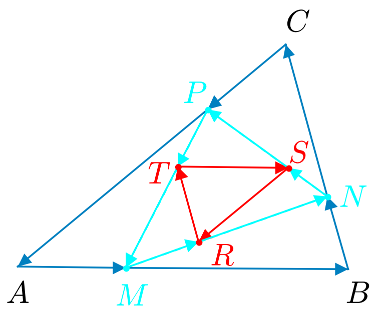
$$\overrightarrow{TT_2} = T_2 - T = \frac{2}{9}\left((b+c-1)A + (a-c)B + (1-a-b)C\right),$$

odtud již vidíme, že $\overrightarrow{TT_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{TT_2}$, což znamená, že body T, T_1, T_2 jsou kolineární. $\square$

Úloha 2.2.19: *Je dán trojúhelník ABC, body M, N, P postupně na stranách AB, BC, CA a body R, S, T na úsečkách MN, NP, PM tak, že*

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{|BN|}{|NC|} = \frac{|CP|}{|PA|} = \lambda\,, \qquad \frac{|MR|}{|RN|} = \frac{|NS|}{|SP|} = \frac{|PT|}{|TM|} = 1-\lambda\,, \quad \textit{kde} \quad \lambda \in (0,1)\,.$$

Dokažte, že trojúhelníky STR a ABC jsou stejnolehlé a že střed jejich stejnolehlosti nezávisí na hodnotě parametru λ. Jakou roli hraje tento střed v trojúhelníku ABC?[30]



[30] [gol–07], str. 41, úloha 2, pozměněno zadání i řešení úlohy, která se tak stává přímým zobecněním Úlohy 2.2.15.

Řešení:
Ze zadaných poměrů plynou vektorové rovnosti a vyjádření bodů

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}, \quad \text{odtud} \quad M - A = \lambda(B - M) \quad \text{neboli} \quad M = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda B + A),$$

(protože $\lambda \in (0, 1)$, je $\lambda \neq -1$). Analogicky

$$N = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda C + B), \qquad P = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda A + C).$$

Dále pak

$$\overrightarrow{MR} = (1-\lambda)\overrightarrow{RN}, \quad \text{odtud} \quad R - M = (1-\lambda)(N - R)$$

a po dosazení za body M, N vychází:

$$(2-\lambda)R = N - \lambda N + M = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda C + B - \lambda^2 C - \lambda B + \lambda B + A).$$

Protože $\lambda \neq 2$, má bod R odtud vyjádření

$$R = \frac{1}{2-\lambda} \cdot \frac{1}{1+\lambda}(A + B + \lambda C - \lambda^2 C) = \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(A + B + \lambda C - \lambda^2 C),$$

analogicky

$$S = \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(B + C + \lambda A - \lambda^2 A), \qquad T = \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(C + A + \lambda B - \lambda^2 B).$$

Některý bod H bude středem stejnolehlosti trojúhelníků STR a ABC, bude-li existovat (zřejmě záporné) číslo p, pro něž současně platí tři rovnosti

$$S - H = p(A - H), \qquad T - H = p(B - H), \qquad R - H = p(C - H).$$

Po dosazení do těchto tří rovností za body S, T, R dostaneme pro hledaný bod H vztahy

$$H = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(B + C + (\lambda - \lambda^2 - p(2+\lambda-\lambda^2))A),$$

$$H = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(A + C + (\lambda - \lambda^2 - p(2+\lambda-\lambda^2))B),$$

$$H = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{2+\lambda-\lambda^2}(A + B + (\lambda - \lambda^2 - p(2+\lambda-\lambda^2))C).$$

Bod H proto bude mít ve všech třech rovnostech stejné vyjádření právě tehdy, když bude platit

$$\lambda - \lambda^2 - p(2+\lambda-\lambda^2) = 1.$$

Odtud určíme vyhovující p:

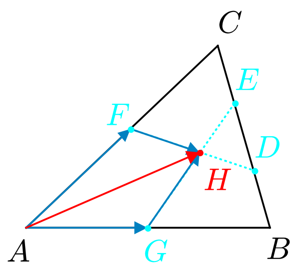
$$p = -\frac{1-\lambda+\lambda^2}{2+\lambda-\lambda^2}, \qquad \text{neboli} \qquad 1 - p = \frac{3}{2+\lambda-\lambda^2}.$$

Stejnolehlost trojúhelníků STR a ABC je tím dokázána a po dosazení hodnoty $1-p$ do kteréhokoliv ze tří vzorců pro H vyjde vyjádření jejího středu ve tvaru

$$H = \frac{1}{3}(A+B+C)\,.$$

Vidíme, že střed H je nezávisle na parametru λ těžištěm trojúhelníku ABC. □

Úloha 2.2.20: *Je dán trojúhelník ABC. Nechť D a E jsou body, které rozdělují stranu BC na třetiny, přičemž bod D leží mezi body B a E. Nechť F je střed strany AC a G střed strany AB. Konečně nechť H je průsečík úseček EG a DF. Najděte poměr $|EH| : |HG|$.*[31]



Řešení:
Ze zadání plynou vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\,.$$

Nyní vektor $\overrightarrow{AH}$ vyjádříme dvěma způsoby jako lineární kombinace

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + a\overrightarrow{GE}, \qquad \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{FD}\,,$$

kde a, b jsou reálná čísla vyjadřující odpovídající poměry. Nejprve vektory z pravých stran vyjádříme pomocí vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,\\
\overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\,,\\
\overrightarrow{AF} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,,\\
\overrightarrow{FD} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) =\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\,.
\end{aligned}$$

[31] [lar–90], str. 383–384, úloha 8.3.4.

Dosadíme do vyjádření pro vektor $\overrightarrow{AH}$ a dostaneme

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + a\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}a\right)\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}a\overrightarrow{AC}\,,$$

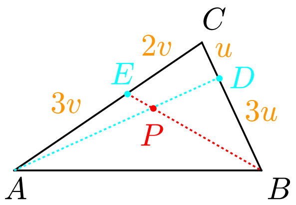
$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + b\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{3}b\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}b\right)\overrightarrow{AC}\,.$$

Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jsou lineárně nezávislé, obě vyjádření vektoru $\overrightarrow{AH}$ tedy musí mít stejné koeficienty:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} - \frac{1}{6}a & = & \frac{2}{3}b \\ \frac{2}{3}a & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}b \end{array} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{array}{rcl} a + 4b & = & 3 \\ 4a + b & = & 3 \end{array} \qquad \text{neboli} \qquad a = b = \frac{3}{5}\,.$$

Hledaný poměr $|EH| : |HG|$ má proto hodnotu $(1 - a) : a = \frac{2}{3}$. □

Úloha 2.2.21: *V trojúhelníku ABC jsou strany BC a AC rozděleny body D a E tak, že platí $|BD| : |DC| = 3$ a $|AE| : |EC| = \frac{3}{2}$. Najděte poměr $|BP| : |PE|$, kde P je průsečík AD a BE.*[32]



Řešení:
Podle zadání v řeči vektorů platí

$$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\,.$$

Nechť a, b jsou ta kladná čísla, pro která $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{BP} = b\overrightarrow{BE}$. Vektor $\overrightarrow{AP}$ můžeme vyjádřit ještě jedním způsobem, a to

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BE}\,.$$

V obou vyjádřeních vektoru $\overrightarrow{AP}$ všechny zastoupené vektory nahradíme kombinacemi lineárně nezávislých vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Z prvního vyjádření nejprve dostaneme

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AD} = a\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) = a\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}a\overrightarrow{BC}\,.$$

Po dosazení $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ dostaneme

$$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}a\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}a\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}a\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}a\overrightarrow{AC}\,.$$

[32] [lar–90], str. 391, úloha 8.3.11a.

Podobně upravíme druhé vyjádření vektoru $\overrightarrow{AP}$:

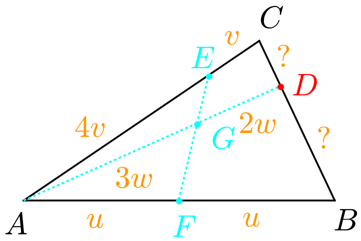
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + b\left(\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} - b\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}b\overrightarrow{AC} = (1-b)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}b\overrightarrow{AC}\,.$$

Protože vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ tvoří bázi roviny trojúhelníku ABC, musí se koeficienty u obou vyjádření rovnat, tedy musí platit soustava rovností

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}a &=& 1-b \\ \frac{3}{4}a &=& \frac{3}{5}b \end{array} \qquad \text{neboli} \qquad a = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad b = \frac{5}{6}\,.$$

Hledaný poměr $|BP| : |PE| = b : (1-b)$ je proto roven $5 : 1$. □

Úloha 2.2.22: *V trojúhelníku ABC jsou strany AC a AB rozděleny body E a F tak, že platí $|AE| : |EC| = 4$ a $|AF| : |FB| = 1$. Nechť D je bod na straně BC a G je průsečík AD a EF. Předpokládejme, že bod D je umístěn tak, že $|AG| : |GD| = \frac{3}{2}$. Najděte poměr $|BD| : |DC|$.*[33]



Řešení:
Podle zadání v řeči vektorů platí:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\,.$$

Vyjádřeme vektor $\overrightarrow{AG}$ dvěma způsoby:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)\,,$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}\,.$$

Označme a, b ta čísla, pro která platí

$$\overrightarrow{FG} = a\overrightarrow{FE}\,, \qquad \overrightarrow{CD} = b\overrightarrow{CB}\,.$$

Všechny vektory nyní vyjádříme pomocí lineárně nezávislých vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$. Předně

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}b\overrightarrow{CB},$$

[33] [lar–90], str. 391, úloha 8.3.11b.

odkud po dosazení $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ dostaneme

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}b\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{3}{5}(1-b)\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}b\overrightarrow{AB}\,.$$

Pro druhé vyjádření vektoru $\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{FE}$$

s využitím toho, že $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$, dostaneme

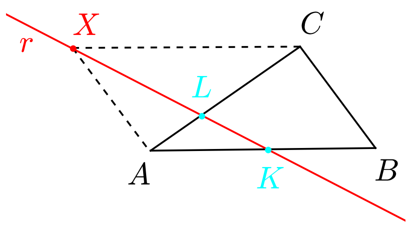
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}a\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}a\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(1-a)\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}a\overrightarrow{AC}\,.$$

Protože vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ tvoří bázi roviny trojúhelníku ABC, musí se koeficienty u obou vyjádření rovnat, tedy musí být splněna soustava rovnic

$$\begin{array}{rcl} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}b & = & \frac{4}{5}a \\ \frac{3}{5}b & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a \end{array} \qquad \text{neboli} \qquad a = \frac{1}{3} \quad \text{a} \quad b = \frac{5}{9}\,.$$

Hledaný poměr $|BD| : |DC| = (1-b) : b$ je proto roven $4 : 5$. □

Úloha 2.2.23: *Uvnitř stran AB a AC daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L tak, že $|AB| : |AK| = |CL| : |AL| = p$. Dokažte, že přímka KL prochází jedním a týmž bodem bez ohledu na konkrétní hodnotu parametru p.*[34]



Řešení:
Označme

$$p = \frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|CL|}{|AL|} > 1 \qquad (\text{neboť } |AB| > |AK|)\,.$$

Rovnosti $|AK| = \frac{1}{p}|AB|$ a $|AL| = \frac{1}{p+1}|AC|$ znamenají, že

$$K = A + \frac{1}{p}(B-A) \qquad \text{a} \qquad L = A + \frac{1}{p+1}(C-A)\,.$$

Označme r zkoumanou přímku KL, jejíž parametrická rovnice je

$$r:\ X = K + k(L-K)\,, \quad k \in \mathbf{R}\,.$$

[34][pra–86], str. 105, úloha 5.43, zadání upraveno.

Po dosazení K, L a úpravě dostaneme

$$r:\ X = A + \frac{1}{p}(B-A) + k\left(\frac{1}{p+1}(C-A) - \frac{1}{p}(B-A)\right),$$

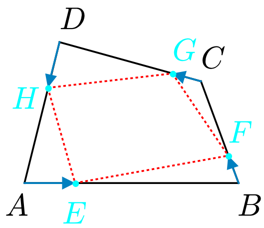
$$r:\ X = \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{k}{p(p+1)}\right)A + \frac{1-k}{p}B + \frac{k}{p+1}C\,.$$

Vidíme, že zvolíme-li v poslední rovnici (v závislosti na p) parametr $k = p+1$, dostaneme vždy jeden a tentýž bod $X = A - B + C$. To je společný bod všech uvažovaných přímek KL. (Jeho geometrický význam je dán rovností $X - C = A - B$, jež znamená, že $ABCX$ je rovnoběžník.) □

Úloha 2.2.24: *Body E, F, G, H leží po řadě uvnitř stran AB, BC, CD, DA daného čtyřúhelníku $ABCD$ tak, že platí*

$$|AE| : |EB| = |BF| : |FC| = |CG| : |GD| = |DH| : |HA|\,.$$

Zjistěte, kdy je $EFGH$ rovnoběžník.[35]



Řešení:
Dělí-li body E, F, G, H strany čtyřúhelníku $ABCD$ ve stejném poměru, existuje číslo $t \in (0,1)$ takové, že současně platí

$$\begin{aligned}
E - A &= t(B-A) \quad \text{neboli} \quad E = (1-t)A + tB\,,\\
F - B &= t(C-B) \quad \text{neboli} \quad F = (1-t)B + tC\,,\\
G - C &= t(D-C) \quad \text{neboli} \quad G = (1-t)C + tD\,,\\
H - D &= t(A-D) \quad \text{neboli} \quad H = (1-t)D + tA\,.
\end{aligned}$$

$EFGH$ bude rovnoběžník, právě když bude platit $E - F = H - G$. Do této rovnosti dosadíme a dále ekvivalentně upravíme:

$$(1-t)A + tB - (1-t)B - tC = (1-t)D + tA - (1-t)C - tD\,,$$

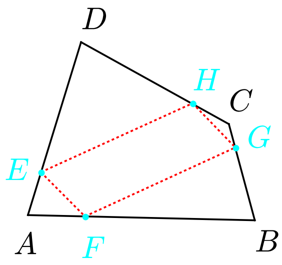
$$(1-2t)A + (2t-1)B + (1-2t)C + (2t-1)D = 0\,,$$

$$(1-2t)(A - B + C - D) = 0\,.$$

[35] [eng–97], str. 298, úloha 11.

Je-li $ABCD$ rovnoběžník, tj. je-li vektor $A - B + C - D$ nulový, je poslední rovnost splněna pro každé $t \in (0,1)$. Není-li $ABCD$ rovnoběžník, rovnost platí jedině v případě $t = \frac{1}{2}$, kdy body E, F, G, H jsou středy stran, takže $EFGH$ je Varignonův rovnoběžník z Příkladu 2.1.4. $\square$

Úloha 2.2.25: *Strany AD, AB, CB, CD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rozděleny body E, F, G, H tak, že $|AE| : |ED| = |AF| : |FB| = |CG| : |GB| = |CH| : |HD|$. Dokažte, že $EFGH$ je rovnoběžník.*[36]



Řešení:
Označíme-li

$$k = \frac{|AF|}{|AB|},$$

pak čtyři poměry ze zadání se rovnají $k : (1-k)$ a platí

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CG|}{|CB|} = \frac{|CH|}{|CD|} = k\,.$$

Z předchozího dostáváme, že $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ neboli $E - A = k(D - A)$ a odtud

$$E = (1-k)A + kD\,.$$

Analogicky vyjádříme body F, G, H:

$$F = (1-k)A + kB\,, \qquad G = (1-k)C + kB\,, \qquad H = (1-k)C + kD\,.$$

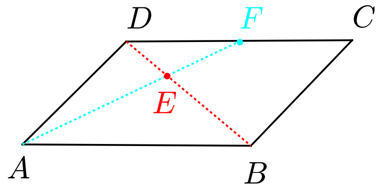
Z těchto rovností dostaneme

$$E - F = k(D - B) = H - G\,,$$

tedy $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$, a proto $EFGH$ je rovnoběžník. $\square$

[36] [lar–90], str. 390, úloha 8.3.10.

Úloha 2.2.26: *Označme F střed strany CD daného rovnoběžníku $ABCD$. V jakém poměru úsečka AF rozdělí úhlopříčku BD?*[37]



Řešení:
V rovnoběžníku $ABCD$, platí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Pro střed F strany DC tak máme

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,.$$

Označme E průsečík úhlopříčky BD s úsečkou AF a vyjádřeme vektor $\overrightarrow{AE}$ dvěma možnými způsoby jako lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AF} = a\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) = a\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}a\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AD}\,,$$

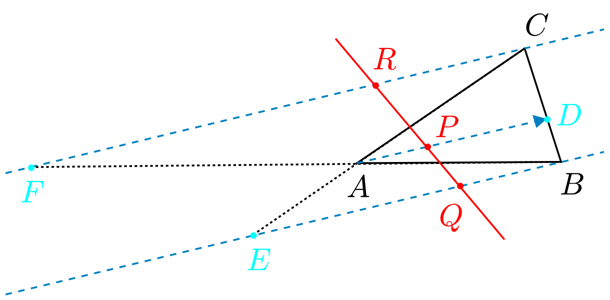
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + b\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = (1-b)\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}\,,$$

kde a, b jsou reálná čísla. Vyjádření vektoru $\overrightarrow{AE}$ je jednoznačné, neboť vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ jsou lineárně nezávislé, takže koeficienty v obou lineárních kombinacích se musí rovnat:

$$\frac{1}{2}a = 1 - b \quad \text{a zároveň} \quad a = b\,, \quad \text{neboli} \quad b = \frac{2}{3}\,.$$

Hledaný poměr $|BE| : |ED|$ je tedy $b : (1-b) = 2 : 1$. □

Úloha 2.2.27: *Mějme trojúhelník ABC. Tři rovnoběžné přímky jdoucí body A, B, C protínají stranu BC a přímky CA, AB postupně v bodech D, E a F. Body P, Q a R jsou kolineární a rozdělují úsečky AD, BE a CF ve stejném poměru. Najděte tento poměr.*[38]



---

[37] [lar–90], str. 382–383, úloha 8.3.3, zadání upraveno.
[38] [gar–97], str. 221, úloha 4.

Řešení:
Přímky AD, BE a CF jsou podle zadání rovnoběžné, mají tedy stejný směrový vektor, vyberme např. $\overrightarrow{AD}$. Bod D leží na úsečce BC (musí to být podle zadání její vnitřní bod), existuje tedy $t \in (0,1)$ takové, že

$$\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{BC}\,, \quad \text{neboli} \quad D = tB + (1-t)C\,.$$

Pro souhlasně rovnoběžné vektory $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{AD}$ platí (jak vidíme na obrázku, trojúhelníky ADC a EBC jsou podobné):

$$\overrightarrow{EB} = \frac{|BC|}{|DC|}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{t}\overrightarrow{AD}\,,$$

neboť z vektorové rovnosti $\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{BC}$ plyne, že $|DC| = t|BC|$. Po dosazení za bod D odtud pro bod E dostaneme

$$E = B - \frac{1}{t}((tB + (1-t)C) - A) \quad \text{neboli} \quad E = \frac{1}{t}A + \left(1 - \frac{1}{t}\right)C\,.$$

Analogicky pro souhlasně rovnoběžné vektory $\overrightarrow{FC} \parallel \overrightarrow{AD}$ platí (jak vidíme na obrázku, trojúhelníky ADB a FCB jsou podobné):

$$\overrightarrow{FC} = \frac{|BC|}{|BD|}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1-t}\overrightarrow{AD}\,,$$

neboť $|BD| = |BC| - |DC| = (1-t)|BC|$. Po dosazení za bod D odtud pro bod F dostaneme

$$F = C - \frac{1}{1-t}((tB + (1-t)C) - A) \quad \text{neboli} \quad F = \frac{1}{1-t}A - \frac{t}{1-t}B\,.$$

Hledaný poměr označme

$$k = \frac{|AP|}{|PD|} = \frac{|BQ|}{|QE|} = \frac{|CR|}{|RF|} > 0\,,$$

což vektorově zapsáno znamená, že

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PD}\,, \qquad \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{QE}\,, \qquad \overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{RF}\,.$$

Dosazením do předešlých vektorových rovností za body D, E, F získáme vyjádření bodů P, Q, R

$$P = \frac{1}{k+1}(kD + A) = \frac{1}{k+1}(A + ktB + k(1-t)C)\,,$$

$$Q = \frac{1}{k+1}(kE + B) = \frac{1}{k+1}(\frac{k}{t}A + B + k(1 - \frac{1}{t})C)\,,$$

$$R = \frac{1}{k+1}(kF + C) = \frac{1}{k+1}(\frac{k}{1-t}A - \frac{kt}{1-t}B + C)\,.$$

Protože body P, Q, R jsou podle zadání kolineární, existuje reálné číslo $m \neq 0, 1$, pro které platí

$$P = mQ + (1-m)R\,.$$

Dosazením za body P, Q, R do této rovnice a po násobení číslem $k+1$ dostaneme

$$A + ktB + k(1-t)C = \frac{km}{t}A + mB + km(1-\frac{1}{t})C + \frac{k(1-m)}{1-t}A - \frac{kt(1-m)}{1-t}B + (1-m)C\,.$$

Body A, B, C jsou nekolineární, proto se koeficienty na obou stranách u jednotlivých bodů musí rovnat. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$1 = \frac{mk}{t} + \frac{k-mk}{1-t}\,, \qquad kt = m - \frac{kt-ktm}{1-t}\,, \qquad k - kt = km - \frac{km}{t} + 1 - m\,. \tag{2.8}$$

První rovnici vynásobíme $t(1-t)$, druhou $1-t$ a třetí t, tím ve všech třech rovnicích odstraníme zlomky a dostaneme

$$t - t^2 = mk - 2mkt + kt\,, \qquad kt - kt^2 = m - mt - kt + mkt\,, \qquad kt - kt^2 = mkt - mk + t - mt\,.$$

Nyní od sebe odečteme 2. a 3. rovnici soustavy (2.8) a výslednou rovnici upravíme s využitím toho, že $k+1 \neq 0$:

$$m(1-t) - kt(1-m) = -km(1-t) + t(1-m) \quad \Rightarrow \quad m(1-t)(1+k) = t(1-m)(1+k) \quad \Rightarrow$$

$$m - mt = t - mt \quad \Rightarrow \quad m = t\,.$$

Po dosazení $m = t$ do dosud nevyužité 1. rovnice soustavy (2.8) obdržíme

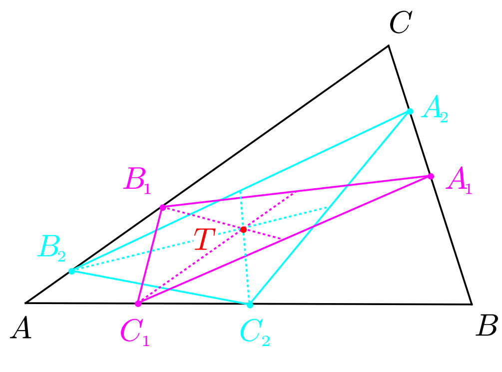
$$t - t^2 = kt - 2kt^2 + kt \quad \Rightarrow \quad t^2(1-2k) - t(1-2k) = 0 \quad \Rightarrow \quad t(1-t)(1-2k) = 0$$

Protože $t \neq 0, 1$, musí být $1 - 2k = 0$, takže hledaný poměr má hodnotu $k = \frac{1}{2}$. $\square$

Úloha 2.2.28: *Na stranách AB, AC, BC daného trojúhelníku ABC jsou dány dvojice různých bodů označených po řadě C_1 a C_2, B_1 a B_2, A_1 a A_2. Dokažte, že trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ mají společné těžiště právě tehdy, když platí rovnosti*

$$\frac{|C_1C_2|}{|AB|} = \frac{|B_1B_2|}{|AC|} = \frac{|A_1A_2|}{|BC|}$$

a dané body leží na hranici trojúhelníku v jednom z pořadí A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2, resp. A, C_2, C_1, B, A_2, A_1, C, B_2, B_1.[39]



[39] [gol–08], str. 64, úloha 4.

Řešení:
Podle první věty zadání existují nenulová reálná čísla p, q, r, pro něž platí

$$\overrightarrow{C_1C_2} = p\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{B_1B_2} = q\overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{A_1A_2} = r\overrightarrow{BC}\,,$$

neboli

$$C_2 = C_1 + p\overrightarrow{AB}\,, \qquad B_2 = B_1 + q\overrightarrow{CA}\,, \qquad A_2 = A_1 + r\overrightarrow{BC}\,. \tag{2.9}$$

Naším úkolem je dokázat ekvivalenci

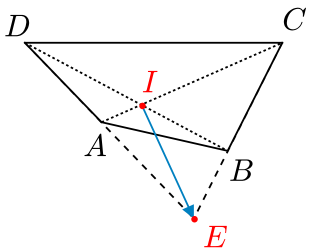
$$\frac{1}{3}(A_1 + B_1 + C_1) = \frac{1}{3}(A_2 + B_2 + C_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = q = r\,,$$

neboť $|p| = |q| = |r|$ vyjadřuje rovnost poměrů délek úseček a $\operatorname{sgn} p = \operatorname{sgn} q = \operatorname{sgn} r$ popsaná pořadí bodů ze zadání úlohy. Levou rovnost ekvivalentně upravíme, a to tak, že do ní nejprve dosadíme vyjádření (2.9) a pak využijeme rovnost $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$:

$$A_1 + B_1 + C_1 = A_1 + r\overrightarrow{BC} + B_1 + q\overrightarrow{CA} + C_1 + p\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad r\overrightarrow{BC} + q\overrightarrow{CA} + p\overrightarrow{AB} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow$$
$$r\overrightarrow{BC} + q(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + p\overrightarrow{AB} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad (p-q)\overrightarrow{AB} + (r-q)\overrightarrow{BC} = \vec{o}\,.$$

Protože body A, B, C tvoří trojúhelník, vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{BC}$ jsou lineárně nezávislé a poslední rovnost je tedy ekvivalentní s rovností $p = q = r$. □

Úloha 2.2.29: *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme I průsečík úhlopříček AC, BD a předpokládejme, že přímky AD a BC se protínají v bodě E. Dokažte, že trojúhelníky EDC a IAB mají společné těžiště právě tehdy, když $AB \parallel CD$ a $|IC|^2 = |IA| \cdot |AC|$.*[40]



Řešení:
Bod I leží uvnitř úseček AC a BD, existují tedy reálná čísla $m, n > 0$ tak, že

$$\overrightarrow{IC} = -m\overrightarrow{IA}\,, \qquad \overrightarrow{ID} = -n\overrightarrow{IB}\,.$$

Parametry m, n jsou pro řešení úlohy podstatné, neboť podmínku $AB \parallel CD$ lze vyjádřit rovností $m = n$ a vztah $|IC|^2 = |IA| \cdot |AC|$ lze po vydělení číslem $|IA|^2$ a s přihlédnutím k rovnosti $|AC| = |IA| + |IC|$ zapsat jako $m^2 = m + 1$. Bod E leží na přímkách AD a BC, proto existují reálná čísla a, b tak, že

[40] [and–05], str. 57–56, úloha 1.

$$\overrightarrow{IE} = a\overrightarrow{IC} + (1-a)\overrightarrow{IB} = -am\overrightarrow{IA} + (1-a)\overrightarrow{IB}\,,$$
$$\overrightarrow{IE} = b\overrightarrow{ID} + (1-b)\overrightarrow{IA} = (1-b)\overrightarrow{IA} - bn\overrightarrow{IB}\,.$$

Protože vektory $\overrightarrow{IA}$ a $\overrightarrow{IB}$ jsou lineárně nezávislé, musí se koeficienty u těchto dvou vyjádření vektoru $\overrightarrow{IE}$ rovnat:

$$-am = 1 - b \qquad \text{a} \qquad 1 - a = -bn\,.$$

Z těchto rovnic snadno vypočteme neznámé a, b ve tvaru

$$a = \frac{1+n}{1-mn} \qquad \text{a} \qquad b = \frac{1+m}{1-mn}$$

(podmínka $mn \neq 1$ je vyjádřením existence průsečíku E) a po dosazení dostaneme

$$\overrightarrow{IE} = \frac{mn+m}{mn-1}\overrightarrow{IA} + \frac{mn+n}{mn-1}\overrightarrow{IB}\,.$$

Těžiště trojúhelníků EDC a IAB splývají právě tehdy, když

$$E + D + C = I + A + B\,, \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\,,$$

odtud pak po dosazení za $\overrightarrow{IC}$ a $\overrightarrow{ID}$ dostaneme ekvivalentní vztah

$$\overrightarrow{IE} = (1+m)\overrightarrow{IA} + (1+n)\overrightarrow{IB}\,.$$

Díky lineární nezávislosti vektorů $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$ tak zkoumané splynutí těžišť nastane právě tehdy, když bude platit dvojice rovností

$$\frac{mn+m}{mn-1} = 1 + m \qquad \text{a} \qquad \frac{mn+n}{mn-1} = 1 + n\,,$$

které lze po odečtení 1 zapsat takto:

$$\frac{m+1}{mn-1} = m \qquad \text{a} \qquad \frac{n+1}{mn-1} = n\,. \tag{2.10}$$

Soustavu (2.10) teď v oboru kladných čísel m, n vyřešíme. Předně si všimneme, že v důsledku (2.10) se výraz

$$\frac{(m+1)(n+1)}{mn-1}$$

rovná jak $m(n+1)$, tak $n(m+1)$. Z rovnosti $m(n+1) = n(m+1)$ plyne $m = n$. Proto se soustava (2.10) redukuje na jedinou rovnici

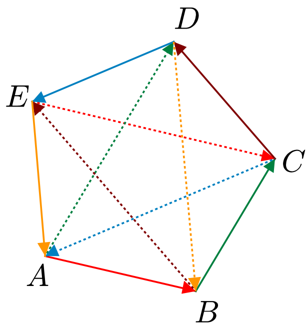
$$\frac{m+1}{m^2-1} = m\,,$$

z níž plyne

$$m + 1 = \frac{m+1}{m^2-1} + 1 = \frac{m+m^2}{m^2-1} = \frac{m}{m-1}\,,$$

odtud po násobení číslem $m-1$ vychází $m^2 - 1 = m$, neboli $m^2 = m + 1$. Proto soustavě rovnic (2.10) vyhovují právě ty dvojice kladných čísel m, n, pro které platí $m = n \neq 1$ a $m^2 = m + 1$. $\square$

Úloha 2.2.30: *V konvexním pětiúhelníku ABCDE platí* $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$ *a* $AE \parallel BD$. *Dokažte, že rovněž* $AB \parallel CE$.[41]



Řešení:
Podle zadání existují nenulová čísla k_1, k_2, k_3, k_4 taková, že

$$\overrightarrow{EA} = k_1\overrightarrow{DB}\,, \quad \overrightarrow{DE} = k_2\overrightarrow{CA}\,, \quad \overrightarrow{CD} = k_3\overrightarrow{BE}\,, \quad \overrightarrow{BC} = k_4\overrightarrow{AD}\,,$$

a tedy

$$A - E = k_1(B - D)\,, \tag{2.11}$$

$$E - D = k_2(A - C)\,, \tag{2.12}$$

$$D - C = k_3(E - B)\,, \tag{2.13}$$

$$C - B = k_4(D - A)\,. \tag{2.14}$$

Sečtením rovností (2.11) a (2.12) dostaneme

$$(k_2 - 1)A + (1 - k_1)D = -k_1 B + k_2 C\,, \tag{2.15}$$

odtud v případě $k_1 \neq k_2$ bychom dostali, že přímky AD a BC mají společný bod s dvojím vyjádřením

$$\frac{k_2 - 1}{k_2 - k_1}A + \frac{1 - k_1}{k_2 - k_1}D = \frac{-k_1}{k_2 - k_1}B + \frac{k_2}{k_2 - k_1}C\,,$$

což odporuje tomu, že $AD \parallel BC$. Platí tedy, že $k_1 = k_2$, takže rovnost (2.15) lze upravit do tvaru

$$(1 - k_1)(D - A) = k_1(C - B)\,.$$

Porovnáním s rovností (2.14) dostaneme

$$k_4 = \frac{1 - k_1}{k_1} \quad \text{neboli} \quad k_1 k_4 + k_1 = 1\,. \tag{2.16}$$

Analogicky předchozímu postupu po sečtení rovnic (2.13) a (2.14) díky podmínce $AE \parallel BD$ dojdeme k závěru, že $k_3 = k_4$ a $k_1 k_4 + k_4 = 1$, což spolu s rovností (2.16) celkově znamená, že

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k\,, \quad \text{kde} \quad k^2 + k - 1 = 0\,. \tag{2.17}$$

[41] [pra–86], str. 100, úloha 5.4, řešení této převzaté úlohy je původní.

Sečtením rovností (2.12) a (2.13) pro $k_2 = k_3 = k$ dostaneme

$$E - C = k(A - C) + k(E - B) = k(A - B) + k(E - C)\,.$$

Odtud vychází $(1 - k)(E - C) = k(A - B)$, takže s ohledem na rovnici (2.17), kterou číslo k splňuje, docházíme k závěru, že rovněž $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EC}$.

Poznámka:
V průběhu řešení jsme ukázali, že ve zkoumaném pětiúhelníku $ABCDE$ platí pro poměry rovnoběžných úseček rovnosti

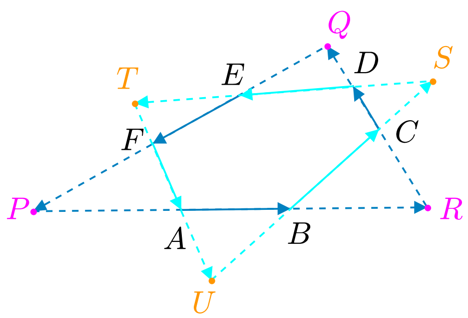
$$\frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|DE|}{|CA|} = \frac{|CD|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|EC|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Ani tyto rovnosti ještě nezaručují, že zkoumaný pětiúhelník je pravidelný. Vrcholy A, B, C lze totiž zvolit libovolně a k nim určit vrcholy D a E pomocí rovností

$$D = A - \frac{\sqrt{5}+1}{2}B + \frac{\sqrt{5}+1}{2}C\,, \qquad E = \frac{\sqrt{5}+1}{2}A - \frac{\sqrt{5}+1}{2}B + C\,. \qquad \square$$

Úloha 2.2.31: *Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník. Přímky AB a EF, EF a CD, CD a AB se protínají postupně v bodech P, Q, R. Přímky BC a DE, DE a FA, FA a BC se protínají postupně v bodech S, T, U. Dokažte ekvivalenci*[42]

$$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|CD|}{|RQ|} = \frac{|EF|}{|QP|} \iff \frac{|BC|}{|US|} = \frac{|DE|}{|ST|} = \frac{|FA|}{|TU|}\,.$$



Řešení:
S ohledem na symetrii stačí dokázat pouze implikaci zleva doprava. Předpokládejme tedy, že pro některé $k > 0$ jsou splněny rovnosti

$$\frac{|AB|}{|PR|} = \frac{|CD|}{|RQ|} = \frac{|EF|}{|QP|} = \frac{1}{k}\,.$$

[42] [bal–97], str. 48–51, úloha 9, řešení vlastní.

Pak pro odpovídající vektory platí

$$R - P = k(B - A)\,, \qquad Q - R = k(D - C)\,, \qquad P - Q = k(F - E)\,.$$

Sečtením těchto tří vektorových rovností s ohledem na $k \neq 0$ dostaneme

$$\vec{o} = (B - A) + (D - C) + (F - E) \quad \text{neboli} \quad A - F = (B - C) + (D - E)\,.$$

Naším cílem je dokázat, že konstanty k_1, k_2, k_3 z rovností

$$S - U = k_1(C - B)\,, \qquad T - S = k_2(E - D)\,, \qquad U - T = k_3(A - F)$$

se navzájem rovnají (neboť pak se budou rovnat i podíly z pravé strany ekvivalence ze zadání úlohy). Sečtením těchto tří rovností dostaneme

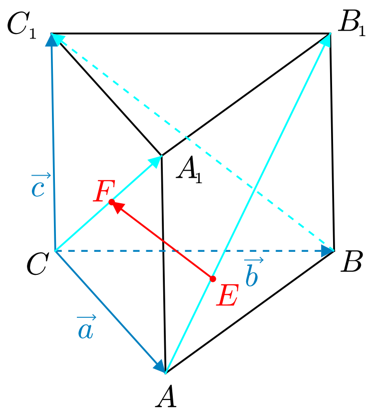
$$\vec{o} = k_1(C - B) + k_2(E - D) + k_3(A - F)\,,$$

odtud po dosazení za $A - F$ z dříve odvozené rovnosti obdržíme

$$\vec{o} = (k_1 - k_3)(C - B) + (k_2 - k_3)(E - D)\,.$$

To vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{DE}$ znamená, že $k_1 - k_3 = k_2 - k_3 = 0$ neboli $k_1 = k_2 = k_3$. □

Úloha 2.2.32: *Na úhlopříčkách AB_1 a CA_1 bočních stěn trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$ jsou vybrány po řadě body E a F tak, že přímky EF a BC_1 jsou rovnoběžné. Vypočtěte poměr délek úseček EF a BC_1.*[43]



Řešení:
Vyjádřeme nejprve vektory úhlopříček $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ (které jsou zřejmě lineárně nezávislé):

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,,$$

[43] [jur–96], str. 96–97, úloha 3.8.

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{c}\,, \qquad \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\vec{b} + \vec{c}\,.$$

Bod E leží na úsečce AB_1, existuje tedy reálné číslo $x \in (0,1)$ takové, že

$$\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB_1} = x(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,, \quad \text{odkud} \quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = (1-x)\vec{a} + x\vec{b} + x\vec{c}\,.$$

Podobně bod F leží na úsečce CA_1, existuje tedy reálné číslo $y \in (0,1)$ takové, že

$$\overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CA_1} = y\vec{a} + y\vec{c}\,.$$

Vektor $\overrightarrow{EF}$, který má tudíž vyjádření

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CE} = (x+y-1)\vec{a} - x\vec{b} + (y-x)\vec{c}\,,$$

je ovšem podle zadání rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{BC_1}$. Existuje tedy reálné číslo z, pro které platí

$$\overrightarrow{EF} = z\overrightarrow{BC_1} = -z\vec{b} + z\vec{c}\,.$$

Porovnáním koeficientů u obou vyjádření vektoru $\overrightarrow{EF}$ jako kombinací lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dostáváme soustavu rovnic

$$x + y - 1 = 0\,, \qquad -x = -z\,, \qquad y - x = z\,.$$

Řešením této soustavy je $x = z = \frac{1}{3}$ a $y = \frac{2}{3}$. Pro hledaný poměr dostáváme

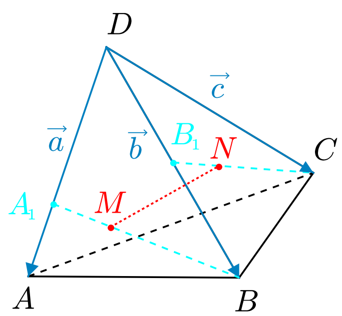
$$\frac{|EF|}{|BC_1|} = |z| = \frac{1}{3}\,.$$

□

Úloha 2.2.33: *Na hranách DA, DB čtyřstěnu $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body A_1, B_1, na úsečkách BA_1, CB_1 pak po řadě body M, N, přičemž úsečka MN je rovnoběžná s rovinou ACD. Z rovností*

$$|DB_1| = m|DB|\,, \qquad |CN| = p|CB_1|\,, \qquad |BM| = q|BA_1|$$

vyjádřete číslo q pomocí čísel m a p.[44]



[44] [jur–96], str. 97–98, úloha 3.9.

Řešení:
Zaveďme ještě číslo n rovností $|DA_1| = n|DA|$ a označme $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ (tyto vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé). Tři zadané a jednu zavedenou rovnost zapišme vektorově

$$\overrightarrow{DA_1} = n\vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{DB_1} = m\vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{BM} = q\overrightarrow{BA_1}\,, \qquad \overrightarrow{CN} = p\overrightarrow{CB_1}$$

a vyjádřeme vektory $\overrightarrow{DM}$ a $\overrightarrow{DN}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + q\overrightarrow{BA_1} = \vec{b} + q\left(\overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{DB}\right) = qn\vec{a} + (1-q)\vec{b}\,,$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \vec{c} + p\overrightarrow{CB_1} = \vec{c} + p\left(\overrightarrow{DB_1} - \overrightarrow{DC}\right) = pm\vec{b} + (1-p)\vec{c}\,.$$

Odtud pro vektor $\overrightarrow{MN}$ dostáváme

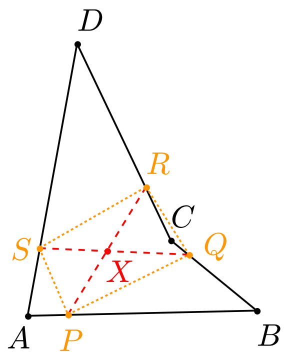
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -qn\vec{a} + (pm - 1 + q)\vec{b} + (1-p)\vec{c}\,.$$

Podle zadání je vektor $\overrightarrow{MN}$ rovnoběžný s rovinou ACD, což znamená, že je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$, $\vec{c}$, a proto koeficient u vektoru $\vec{b}$ v předchozím vyjádření vektoru $\overrightarrow{MN}$ je nulový (vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tvoří bázi). Platí tedy rovnost

$$pm - 1 + q = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad q = 1 - pm\,,$$

což je hledaný vztah mezi čísly m, p, q ze zadání úlohy. □

Úloha 2.2.34: *Nechť A, B, C, D jsou čtyři nekomplanární body v prostoru. Najděte množinu středů všech rovnoběžníků, jejichž vrcholy leží postupně na úsečkách AB, BC, CD, DA.*[45]



Řešení:
Vrcholy P, Q, R, S uvažovaných rovnoběžníků, které leží po řadě na úsečkách AB, BC, CD, DA, můžeme zapsat ve tvaru

$$P = tA + (1-t)B\,, \qquad Q = uB + (1-u)C\,,$$

[45] [bar–95], str. 16, úloha 184.

$$R = vC + (1-v)D\,, \qquad S = wD + (1-w)A\,,$$

kde $t, u, v, w \in \langle 0, 1\rangle$. Čtyřúhelník $PQRS$ je rovnoběžník právě tehdy, když se jeho úhlopříčky navzájem půlí, tedy právě když mají společný střed X:

$$X = \frac{1}{2}(P+R) = \frac{1}{2}(Q+S)\,.$$

Po dosazení do této rovnice za body P, Q, R, S dostaneme

$$tA + (1-t)B + vC + (1-v)D = uB + (1-u)C + wD + (1-w)A\,.$$

Protože body A, B, C, D nejsou komplanární, musí se koeficienty u jednotlivých bodů na obou stranách rovnice rovnat, což vede na soustavu rovnic

$$t = 1-w\,, \qquad 1-t = u\,, \qquad v = 1-u\,, \qquad 1-v = w\,.$$

Čísla u, v, w vyjádříme v závislosti na t:

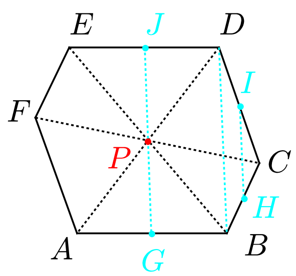
$$u = 1-t\,, \qquad v = 1-u = t\,, \qquad w = 1-v = 1-t\,.$$

Střed X rovnoběžníku $PQRS$ má pak vyjádření

$$X = \frac{1}{2}\left(tA + (1-t)B + tC + (1-t)D\right) = t\cdot\frac{A+C}{2} + (1-t)\cdot\frac{B+D}{2}\,,$$

kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. Středy všech popsaných rovnoběžníků $PQRS$ tedy leží na úsečce spojující středy úseček AC a BD. Naopak každý bod X této úsečky je středem toho rovnoběžníku, jehož vrcholy mají vyjádření z úvodu řešení, ve kterých položíme $u = w = 1-t$ a $v = t$, kde t je jako dříve zmíněný parametr bodu X na nalezené úsečce. Tato úsečka je tedy hledanou množinou. □

Úloha 2.2.35: *Je dán nerovinný šestiúhelník, jehož protější strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že středy všech šesti jeho stran leží v jedné rovině.*[46]



Řešení:
Označme šestiúhelník $ABCDEF$ a uvažujme vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$,

[46] [bar–95], str. 40, úloha 424.

$\vec{f} = \overrightarrow{AF}$. Protože podle zadání jsou protilehlé strany rovnoběžné, existují reálná čísla u, v, w taková, že

$$\vec{b} = u(\vec{d} - \vec{e}), \qquad \vec{c} - \vec{b} = v(\vec{e} - \vec{f}), \qquad \vec{d} - \vec{c} = w\vec{f}.$$

Kdyby byly vektory $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ lineárně závislé, v rovině jimi určené by ležely i vektory $\vec{b}$, $\vec{c} - \vec{b}$ a $\vec{d} - \vec{c}$, a tedy i vektory $\vec{b}$ a $\vec{c}$, takže šestiúhelník $ABCDEF$ by byl (v rozporu se zadáním) rovinný. Tak jsme vysvětlili, že vektory $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ jsou lineárně nezávislé. Sečtením vypsaných tří rovnic dostaneme

$$\vec{d} = u\vec{d} + (v - u)\vec{e} + (w - v)\vec{f}.$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých lineárně nezávislých vektorů na obou stranách rovnice dostáváme, že $u = 1$, $v = 1$ i $w = 1$. Protilehlé strany šestiúhelníku jsou tedy nejen rovnoběžné, ale taky stejně dlouhé. Protože úhlopříčky každého rovnoběžníku se navzájem půlí, z rovnoběžníků $ABDE$, $BCEF$ a $CDFA$ vidíme, že úsečky AD, BE a CF mají společný střed, který označíme P. Šestiúhelník je tedy středově souměrný podle středu P. Stačí tedy dokázat, že středy $G = \frac{1}{2}(A + B)$, $H = \frac{1}{2}(B + C)$, $I = \frac{1}{2}(C + D)$, $J = \frac{1}{2}(D + E)$ stran AB, BC, CD, DE leží ve stejné rovině, neboť v ní leží i střed P úsečky GJ, a tedy i středy zbylých stran EF a FA, které jsou souměrně sdružené se středy H, I podle středu P. Všimněme si, že platí

$$\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}(C + D - B - C) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}(D + E - A - B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{BD},$$

kde rovnost $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$ jsme získali z rovnoběžníku $ABDE$. To znamená, že $HI \parallel BD \parallel GJ$, a tedy body G, H, I, J jsou skutečně komplanární. □

Úloha 2.2.36: *V rovině nebo prostoru je dáno šest bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 takových, že existuje šest trojúhelníků $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$, $A_4A_5A_6$, $A_5A_6A_1$, $A_6A_1A_2$. Víme navíc, že jejich těžiště tvoří v uvedeném pořadí vrcholy šestiúhelníku. Dokažte, že tento šestiúhelník je středově souměrný, a pak rozhodněte, zda je nutně rovinný (nebo může být i prostorový).*[47]

Řešení:
Těžiště $T_1, \ldots, T_6$ uvedených trojúhelníků mají vyjádření

$$T_1 = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3), \qquad T_2 = \frac{1}{3}(A_2 + A_3 + A_4), \qquad T_3 = \frac{1}{3}(A_3 + A_4 + A_5),$$

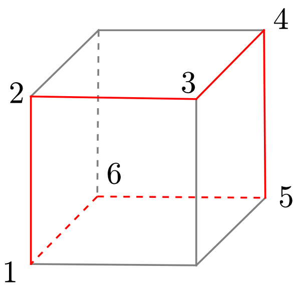
$$T_4 = \frac{1}{3}(A_4 + A_5 + A_6), \qquad T_5 = \frac{1}{3}(A_5 + A_6 + A_1), \qquad T_6 = \frac{1}{3}(A_6 + A_1 + A_2).$$

Odtud pro středy úhlopříček T_1T_4, T_2T_5 a T_3T_6 zkoumaného šestiúhelníku $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ platí

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_4) = \frac{1}{6}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = \frac{1}{2}(T_2 + T_5) = \frac{1}{2}(T_3 + T_6).$$

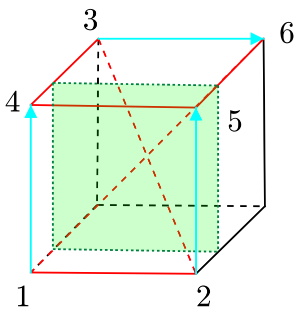
Všechny tři úsečky proto mají společný střed, šestiúhelník je tedy středově souměrný podle středu $O = \frac{1}{6}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)$.

[47][bom–96], str. 110-111, úloha 9.5, řešení str. 113-114.



Na příkladu ukážeme, že zkoumaný středově souměrný šestiúhelník nemusí být rovinný. Zvolíme-li body $A_1, \dots, A_6$ ve vrcholech krychle podle obrázku (pro jednoduchost píšeme jen indexy bodů), budou jednotlivá těžiště $T_1, \dots, T_6$ podle kritéria dokázaného v následující Poznámce tvořit nerovinný šestiúhelník; vektory $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$ totiž neleží v jedné rovině. $\square$

Poznámka:
K úloze doplňme vlastní výsledek o tom, že *zkoumaný šestiúhelník $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ je rovinný právě tehdy, když jsou vektory $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$ komplanární.* Před důkazem zdůrazněme, že poslední podmínku splňují i některé nerovinné šestiúhelníky $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Příklad je možné sestrojit opět na vrcholech krychle (viz obrázek s vyznačenou trojicí závislých vektorů; všech šest těžišť T_i zřejmě leží v rovině rovnoběžné s přední a zadní stěnou, jež má od nich vzdálenosti v poměru $1:2$).



Důkaz kritéria rovinnosti:
Povšimněme si, že z právě dokázané souměrnosti podle středu O plyne, že je šestiúhelník $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ rovinný právě tehdy, když jsou vektory $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{OT_2}$, $\overrightarrow{OT_3}$ lineárně závislé. Vyjádřeme je jako lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$:

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{6}(2A_1 + 2A_2 + 2A_3 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6) = \frac{1}{6}(A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 - A_6) =$$

$$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{A_1A_4} - \frac{1}{6}\overrightarrow{A_2A_5} - \frac{1}{6}\overrightarrow{A_3A_6}\,,$$

$$\overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{6}(2A_2 + 2A_3 + 2A_4 - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 - A_6) = \frac{1}{6}(A_2 + A_3 + A_4 - A_1 - A_5 - A_6) =$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{A_1A_4} - \frac{1}{6}\overrightarrow{A_2A_5} - \frac{1}{6}\overrightarrow{A_3A_6}\,,$$

$$\overrightarrow{OT_3} = \frac{1}{6}(2A_3+2A_4+2A_5-A_1-A_2-A_3-A_4-A_5-A_6) = \frac{1}{6}(A_3+A_4+A_5-A_1-A_2-A_6) =$$

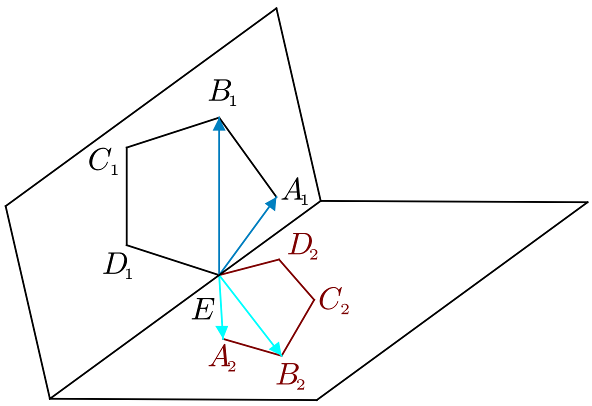
$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{A_1A_4} + \frac{1}{6}\overrightarrow{A_2A_5} - \frac{1}{6}\overrightarrow{A_3A_6}\,.$$

Z koeficientů nalezených lineárních kombinací sestavíme determinat

$$D = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{216} + \frac{1}{216} - \frac{1}{216} - \frac{1}{216} - \frac{1}{216} - \frac{1}{216} = -\frac{1}{54} \neq 0\,.$$

Protože determinant je nenulový, vektory $\overrightarrow{OT_1}$, $\overrightarrow{OT_2}$, $\overrightarrow{OT_3}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jsou lineárně závislé vektory $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_2A_5}$, $\overrightarrow{A_3A_6}$. Tím je kritérium rovinnosti dokázáno.

Úloha 2.2.37: *V prostoru jsou dány dva pravidelné pětiúhelníky $A_1B_1C_1D_1E$ a $A_2B_2C_2D_2E$ se společným vrcholem E, které neleží v jedné rovině. Dokažte, že přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 jsou rovnoběžné s některou rovinou.*[48]



Řešení:
Vektory $\overrightarrow{EC_1}$ a $\overrightarrow{ED_1}$ vyjádříme jako lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů $\overrightarrow{EA_1}$, $\overrightarrow{EB_1}$. Existuje zřejmě jednoznačně daná čtveřice čísel $p\,, q\,, r\,, s \in \mathbf{R}$ taková, že

$$\overrightarrow{EC_1} = p\overrightarrow{EA_1} + q\overrightarrow{EB_1}\,, \qquad \overrightarrow{ED_1} = r\overrightarrow{EA_1} + s\overrightarrow{EB_1}\,.$$

Podobně vektory $\overrightarrow{EC_2}$ a $\overrightarrow{ED_2}$ vyjádříme jako lineární kombinace lineárně nezávislých vektorů $\overrightarrow{EA_2}$, $\overrightarrow{EB_2}$. Protože každé dva pravidelné pětiúhelníky jsou navzájem podobné, musí být koeficienty v těchto lineárních kombinacích stejné jako v prvním případě:

$$\overrightarrow{EC_2} = p\overrightarrow{EA_2} + q\overrightarrow{EB_2}\,, \qquad \overrightarrow{ED_2} = r\overrightarrow{EA_2} + s\overrightarrow{EB_2}\,.$$

[48][jur–96], str. 100, úloha 3.6*.

Předchozí rovnosti využijeme k vyjádření vektorů $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$:

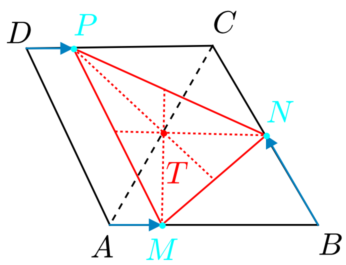
$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{EC_2} - \overrightarrow{EC_1} = p(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + q(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = p\overrightarrow{A_1A_2} + q\overrightarrow{B_1B_2}\,,$$

$$\overrightarrow{D_1D_2} = \overrightarrow{ED_2} - \overrightarrow{ED_1} = r(\overrightarrow{EA_2} - \overrightarrow{EA_1}) + s(\overrightarrow{EB_2} - \overrightarrow{EB_1}) = r\overrightarrow{A_1A_2} + s\overrightarrow{B_1B_2}\,.$$

Vektory $\overrightarrow{C_1C_2}$ a $\overrightarrow{D_1D_2}$ jsou tedy rovnoběžné s rovinou určenou vektory $\overrightarrow{A_1A_2}$ a $\overrightarrow{B_1B_2}$. Všechny čtyři přímky A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 jsou tedy rovnoběžné s rovinou určenou vektory $\overrightarrow{A_1A_2}$ a $\overrightarrow{B_1B_2}$. $\square$

Na závěr této kapitoly vyřešíme několik úloh, které svým zadáním sice nepatří do afinní geometrie, avšak v jejich řešeních hrají afinní výpočty rozhodující roli.

Úloha 2.2.38: *Nechť $ABCD$ je kosočtverec a M, N, P jsou vnitřní body stran AB, BC, CD. Ukažte, že těžiště trojúhelníku MNP leží na přímce AC, právě když $|AM| + |DP| = |BN|$.*[49]



Řešení:
Nechť body M, N, P dělí strany AB, BC, CD v poměrech daných čísly $m, n, p \in (0,1)$:

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{DP} = p\overrightarrow{DC}\,.$$

Z těchto vektorových rovností pro body M, N, P plynou vyjádření

$$M = (1-m)A + mB\,, \qquad N = (1-n)B + nC\,, \qquad P = (1-p)D + pC\,.$$

Protože $ABCD$ je podle zadání úlohy kosočtverec, a tedy platí $|AB| = |BC| = |BD|$, je podmínka ze zadání $|AM| + |DP| = |BN|$ ekvivalentní podmínce $m|AB| + p|DC| = n|BC|$, neboli $m + p = n$.

Pro těžiště T trojúhelníku MNP platí

$$T = \frac{1}{3}(M + N + P) = \frac{1}{3}\left((1-m)A + mB + (1-n)B + nC + (1-p)D + pC\right) =$$

[49] [bech–02], str. 20, úloha 4.

$$= \frac{1}{3}\left((1-m)A + (1-n+m)B + (n+p)C + (1-p)D\right) .$$

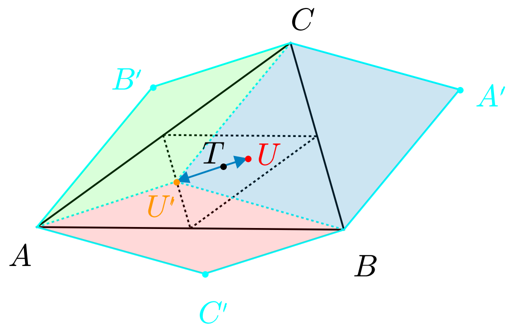
Protože $ABCD$ je kosočtverec, platí $D - C = A - B$. Po dosazení do předchozího vyjádření za bod $D = C + A - B$ dostaneme

$$T = \frac{1}{3}\left((1-m)A + (1-n+m)B + (n+p)C + (1-p)(C+A-B)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left((2-m-p)A + (m+p-n)B + (n+1)C\right) .$$

Bod T leží na přímce AC jen tehdy, když je lineární kombinací bodů A a C (body A, B, C tvoří trojúhelník), takže koeficient u bodu B v nalezené kombinaci musí být nulový, neboli $m+p=n$, což jsme měli ukázat. □

Úloha 2.2.39: *Je dán trojúhelník ABC s obsahem S, uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.*[50]



Řešení:

Označme $\mathcal{T}$ trojúhelník, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC (jde tedy o trojúhelník tvořený středními příčkami trojúhelníku ABC). Jestliže bod U je totožný s těžištěm T trojúhelníku ABC ($U = T$), je tvrzení úlohy splněno, neboť pak pro obsahy dílčích trojúhelníků platí

$$S_{A'BC} = S_{UBC} , \qquad S_{B'AC} = S_{UAC} , \qquad S_{C'AB} = S_{UAB} .$$

V případě $U \neq T$, označme U' prozatím libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Protože obsah zkoumaného šestiúhelníku je roven součtu obsahů tří čtyřúhelníků $AC'BU'$, $BA'CU'$, $CB'AU'$, bude tvrzení úlohy zřejmě platit, když se nám (pro dané U) podaří bod U' vybrat tak, aby všechny tři zmíněné čtyřúhelníky byly rovnoběžníky. Protože pro bod U platí

$$U = \frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}(C + C') ,$$

[50] [cze–11], úloha 2, krajské kolo MO, kategorie A, 18. ledna 2011.

mají body A', B', C' vyjádření

$$A' = 2U - A\,, \qquad B' = 2U - B\,, \qquad C' = 2U - C\,.$$

Zmíněné čtyřúhelníky budou rovnoběžníky právě tehdy, když budou mít úsečky AB a $C'U'$, BC a $A'U'$, AC a $B'U'$ společný střed (tj. když bodou odpovídající dvojice bodů ekvipolentní), neboli

$$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(C'+U')\,, \qquad \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(A'+U')\,, \qquad \frac{1}{2}(A+C) = \frac{1}{2}(B'+U')\,.$$

Předchozí rovnosti budou zřejmě splněny právě tehdy, když bod U' bude mít vyjádření

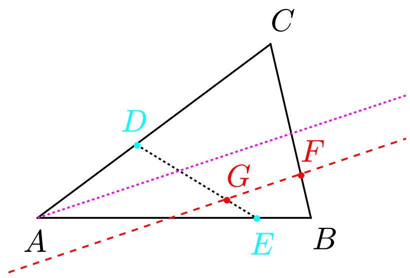
$$U' = A+B+C-2U\,, \quad \text{neboli} \quad U' = 3T - 2U\,, \quad \text{neboli} \quad U' - T = -2(U-T)\,,$$

kde $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$ je těžiště trojúhelníku ABC. Poslední odvozená rovnost znamená, že hledaný bod U' je obrazem bodu U ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V této stejnolehlosti je ovšem obrazem trojúhelníku $\mathcal{T}$ výchozí trojúhelník ABC, takže vnitřní bod U trojúhelníku $\mathcal{T}$ se opravdu zobrazí na vnitřní bod U' trojúhelníku ABC, jak jsme potřebovali dokázat. □

Úloha 2.2.40: *Nechť D a E jsou body zvolené po řadě na stranách AC a AB trojúhelníku ABC tak, že úsečka DE není rovnoběžná se stranou BC. Nechť F a G jsou body zvolené po řadě na úsečkách BC a ED tak, že*

$$\frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|EG|}{|GD|} = \frac{|BE|}{|CD|}\,.$$

Dokažte, že přímka GF je rovnoběžná s osou úhlu BAC.[51]



Řešení:
Body D a E leží postupně na úsečkách AC a AB, existují tedy čísla $p, q \in \langle 0, 1\rangle$, pro která platí

$$E = (1-p)A + pB\,, \qquad D = (1-q)A + qC\,,$$

odkud plyne

$$|BE| = (1-p)|AB| \qquad \text{a} \qquad |CD| = (1-q)|AC|\,.$$

[51] [kin–02], str. 1–2 a 4, příklad 2 – Crux Problem 2333.

Nyní označme poměr ze zadání

$$t = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|EG|}{|GD|} = \frac{|BE|}{|CD|} > 0\,.$$

Z těchto podílů délek plynou dvě vektorové a jedna skalární rovnost

$$\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{FC}\,, \qquad \overrightarrow{EG} = t\overrightarrow{GD}\,, \qquad |BE| = t|CD|\,.$$

Z poslední rovnosti po dosazení délek z první věty řešení obdržíme:

$$(1-p)|AB| = t(1-q)|AC|\,. \tag{2.18}$$

Pro body F, G pak po úpravě a dosazení za E a D dostáváme vyjádření

$$F = \frac{B+tC}{t+1}\,, \qquad G = \frac{E+tD}{t+1} = \frac{(1-p)A+pB+t((1-q)A+qC)}{t+1}\,.$$

Odtud pro vektor $\overrightarrow{GF}$ vychází

$$\overrightarrow{GF} = F - G = \frac{B+tC-(1-p)A-pB-t(1-q)A-tqC}{t+1} =$$

$$= \frac{(1-p)B-(1-p)A-t(1-q)A+t(1-q)C}{t+1} = \frac{(1-p)\overrightarrow{AB}+t(1-q)\overrightarrow{AC}}{t+1} =$$

$$= \frac{(1-p)\cdot|AB|}{t+1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}\right)\,,$$

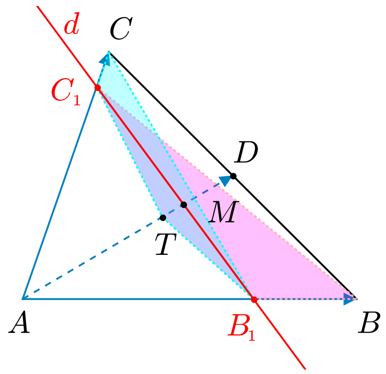
přičemž pro poslední rovnost jsme využili vztahu (2.18). To ovšem znamená, že vektor $\overrightarrow{GF}$ je reálným násobkem vektoru $\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$, což je směrový vektor osy úhlu BAC, neboť sčítané vektory jsou jednotkové směrové vektory jeho ramen. $\square$

Úloha 2.2.41: *Nechť T je těžiště trojúhelníku ABC a nechť d je přímka protínající strany AB a AC v bodech B_1 a C_1 tak, že body A a T nejsou touto přímkou odděleny. Dokažte, že pro obsahy čtyřúhelníků BB_1TC_1, CC_1TB_1 a obsah trojúhelníku ABC platí*

$$S_{BB_1TC_1} + S_{CC_1TB_1} \geq \frac{4}{9}S_{ABC}\,.$$

Dále určete, kdy v dané nerovnosti nastane rovnost.[52]

[52][bech–07], str. 38–39, úloha 6.3.



Řešení:
Označme D střed strany BC trojúhelníku ABC a M průsečík úseček AD a B_1C_1. Dále zaveďme následující poměry

$$\frac{|AC_1|}{|AC|} = \alpha\,, \qquad \frac{|AB_1|}{|AB|} = \beta\,, \qquad \frac{|AM|}{|AD|} = \gamma\,,$$

kde α, β, γ jsou kladná reálná čísla menší nebo rovna 1. Pro dotyčné vektory pak platí

$$\overrightarrow{AC_1} = \alpha\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{AM} = \gamma\overrightarrow{AD}\,, \qquad \overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\,, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\,.$$

Nejprve najdeme číslo γ v závislosti na α a β. Pro vektory $\overrightarrow{MB_1}$ a $\overrightarrow{MC_1}$ můžeme psát následující rovnosti:

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{AB} - \frac{\gamma}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)\overrightarrow{AB} - \frac{\gamma}{2}\overrightarrow{AC}\,,$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AC} - \gamma\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AC} - \frac{\gamma}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\gamma}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)\overrightarrow{AC}\,.$$

Nenulové vektory $\overrightarrow{MB_1}$ a $\overrightarrow{MC_1}$ jsou ovšem lineárně závislé, existuje tedy reálné číslo k takové, že $\overrightarrow{MC_1} = k\overrightarrow{MB_1}$, po dosazení

$$-\frac{\gamma}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\alpha - \frac{\gamma}{2}\right)\overrightarrow{AC} = k\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right)\overrightarrow{AB} - \frac{k\gamma}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ jsou lineárně nezávislé, a tedy koeficienty u těchto vektorů na obou stranách rovnosti se musí rovnat, odtud

$$k = \frac{\alpha - \frac{\gamma}{2}}{-\frac{\gamma}{2}} = \frac{-\frac{\gamma}{2}}{\beta - \frac{\gamma}{2}}\,, \qquad \text{po úpravě} \qquad \gamma = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}\,.$$

Protože body A a T podle zadání nejsou od sebe přímkou $d = B_1C_1$ odděleny, je

$$\gamma = \frac{|AM|}{|AD|} \geq \frac{|AT|}{|AD|} = \frac{2}{3}\,, \qquad \text{odtud} \qquad \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} \geq \frac{2}{3}\,. \tag{2.19}$$

Pro obsah čtyřúhelníku BB_1TC_1 platí:

$$S_{BB_1TC_1} = S_{ABC_1} - S_{ATC_1} - S_{ATB_1}\,.$$

Nyní najdeme poměry obsahů jednotlivých užitých trojúhelníků k obsahu trojúhelníku ABC. Využijeme přitom pravidlo: Shodují-li se dva trojúhelníky v jedné straně a v jednom k ní přilehlém úhlu, pak jejich obsahy jsou ve stejném poměru jako jejich druhé strany přilehlé k onomu úhlu.

$$\frac{S_{ABC_1}}{S_{ABC}} = \frac{|AC_1|}{|AC|} = \alpha\,, \qquad \frac{S_{ATC_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ATC_1}}{2S_{ADC}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AT|}{|AD|}\cdot\frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{\alpha}{3}\,,$$

$$\frac{S_{ATB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ATB_1}}{2S_{ADB}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|AT|}{|AD|}\cdot\frac{|AB_1|}{|AB|} = \frac{\beta}{3}\,.$$

Po dosazení tak dostáváme

$$S_{BBTC_1} = \alpha S_{ABC} - \frac{\alpha}{3}S_{ABC} - \frac{\beta}{3}S_{ABC} = \frac{2\alpha-\beta}{3}S_{ABC}\,.$$

Analogicky lze odvodit vyjádření

$$S_{CCTB_1} = \frac{2\beta-\alpha}{3}S_{ABC}\,.$$

Po dosazení dokazovaná nerovnost ze zadání přejde do tvaru

$$\frac{2\alpha-\beta}{3} + \frac{2\beta-\alpha}{3} \geq \frac{4}{9}\,, \qquad \text{neboli} \qquad \alpha+\beta \geq \frac{4}{3}\,.$$

Z již dříve odvozené podmínky (2.19) pro čísla α, β plyne $3\alpha\beta \geq \alpha+\beta$, odtud pak s ohledem na zřejmou nerovnost $(x+y)^2 \geq 4xy$ máme

$$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \geq \frac{4}{3}(\alpha+\beta)\,,$$

odkud po vydělení číslem $\alpha+\beta$ plyne

$$\alpha+\beta \geq \frac{4}{3}\,.$$

Tím je nerovnost dokázána.

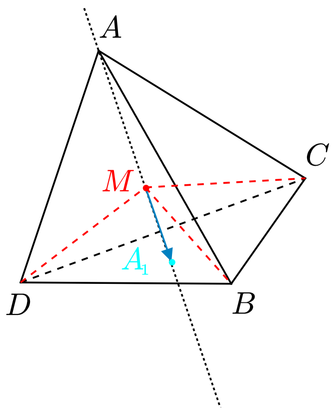
Rovnost nastane, jen když $\alpha = \beta$ a zároveň $\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{2}{3}$, což znamená $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$. Právě tehdy úsečka B_1C_1 prochází těžištěm T a je rovnoběžná s přímkou BC. □

Úloha 2.2.42: *Nechť M je vnitřní bod čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že*

$$V_{MBCD}\cdot\overrightarrow{MA} + V_{MACD}\cdot\overrightarrow{MB} + V_{MABD}\cdot\overrightarrow{MC} + V_{MABC}\cdot\overrightarrow{MD} = \vec{o}\,,$$

kde V_{XYZW} označuje objem čtyřstěnu $XYZW$.[53]

[53] [dju–06], str. 72, úloha 5. Rovinnou analogii výsledku uvedeme později jako příklad 3.1.21 a důkaz provedeme odlišným způsobem založeným na užití skalárního součinu.



Řešení:
Označme postupně A_1, B_1, C_1, D_1 průsečíky přímek AM, BM, CM, DM s protilehlými stěnami čtyřstěnu. Protože pro objemy jehlanů se společnou podstavou platí například

$$V_{MBCD} = \frac{|MA_1|}{|AA_1|} \cdot V_{ABCD}\,,$$

je dokazovaná rovnost ze zadání ekvivalentní s rovností

$$\frac{|MA_1|}{|AA_1|} \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{|MB_1|}{|BB_1|} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{|MC_1|}{|CC_1|} \cdot \overrightarrow{MC} + \frac{|MD_1|}{|DD_1|} \cdot \overrightarrow{MD} = \vec{o}\,.$$

Protože bod M leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, existují kladná reálná čísla a, b, c, d taková, že $a + b + c + d = 1$ a bod M má vyjádření

$$M = aA + bB + dC + dD\,.$$

Protože bod A_1 leží v rovině BCD, existují reálná čísla b', c', d' taková, že

$$A_1 = b'B + c'C + d'D\,.$$

Při označení $\lambda = \frac{|MA_1|}{|AA_1|}$ pro odpovídající vektory platí

$$\overrightarrow{MA_1} = \lambda\overrightarrow{AA_1}\,, \quad \text{odtud} \quad M = \lambda A + (1-\lambda)A_1\,.$$

Dosazením dříve vypsaných vyjádření za M a A_1 do předchozí rovnosti dostáváme

$$aA + bB + dC + dD = \lambda A + (1-\lambda)(b'B + c'C + d'D)\,.$$

Porovnáním koeficientů u bodu A (body A, B, C, D jsou nekomplanární, a tedy příslušné koeficienty z obou stran se musí rovnat) dostaneme $\lambda = a$. Odtud plyne první ze čtyř analogických rovností

$$\frac{|MA_1|}{|AA_1|} = a\,, \qquad \frac{|MB_1|}{|BB_1|} = b\,, \qquad \frac{|MC_1|}{|CC_1|} = c\,, \qquad \frac{|MD_1|}{|DD_1|} = d\,.$$

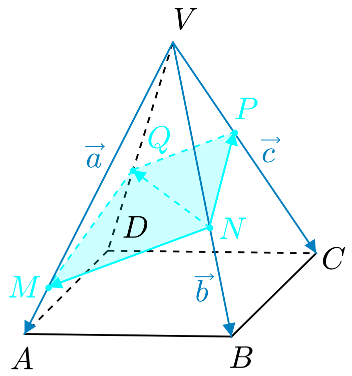
Z vyjádření pro bod M, které přepíšeme do tvaru

$$\vec{o} = a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BM} + c\overrightarrow{CM} + d\overrightarrow{DM}\,,$$

po dosazení nalezených poměrů za a, b, c, d již dostaneme rovnost, o které jsme v úvodu řešení dokázali, že je ekvivalentní s rovností ze zadání úlohy. $\square$

Úloha 2.2.43: *Nechť daná rovina protíná boční hrany VA, VB, VC, VD pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ ve vnitřních bodech, které označíme postupně M, N, P, Q. Dokažte rovnost*[54]

$$\frac{1}{|VM|} + \frac{1}{|VP|} = \frac{1}{|VN|} + \frac{1}{|VQ|}\,.$$



Řešení:
Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|VA| = |VB| = |VC| = |VD| = 1$. Dále označme velikosti

$$|VM| = m\,, \qquad |VN| = n\,, \qquad |VP| = p\,, \qquad |VQ| = q\,.$$

Vyjádřeme vektory $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a} = \overrightarrow{VA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{VB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{VC}$ (které jsou lineárně nezávislé):

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{VM} - \overrightarrow{VN} = m\vec{a} - n\vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{VP} - \overrightarrow{VN} = p\vec{c} - n\vec{b}\,,$$

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{VQ} - \overrightarrow{VN} = q\overrightarrow{VD} - n\vec{b} = q(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{AD}) - n\vec{b} = q(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{BC}) - n\vec{b} =$$

$$= q(\vec{a} + \overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VB}) - n\vec{b} = q\vec{a} - (n+q)\vec{b} + q\vec{c}\,,$$

(přitom jsme využili rovnosti $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$). Protože body M, N, P, Q leží podle zadání v jedné rovině, vektory $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ jsou lineárně závislé. Determinant sestavený z koeficientů u lineárních kombinací těchto vektorů je tedy nulový (neboť vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně nezávislé). Platí tedy

$$\det\begin{pmatrix} m & -n & 0 \\ 0 & -n & p \\ q & -n-q & q \end{pmatrix} = 0\,,$$

[54] [jur–96], str. 96, úloha 3.7.

odtud

$$-mnq - npq + mp(n+q) = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad mnq + npq = mnp + mpq\,.$$

Po vydělení poslední rovnosti nenulovým číslem $mnpq$ (protože M, N, P, Q jsou podle zadání vnitřní body hran, je $m, n, p, q \neq 0$ a tedy také $mnpq \neq 0$) dostáváme

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}\,. \qquad \square$$

Kapitola 3

Aplikace skalárního součinu

3.1 Příklady teoretického významu

Obecná tvrzení o vektorech

Příklad 3.1.1: *Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Dokažte.*[1]

Řešení:
Užitím vlastností skalárního součinu upravíme levou stranu dokazované rovnosti

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\rangle + \langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)\,. \qquad \square$$

Příklad 3.1.2: *Pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ právě tehdy, když $\vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}$. Dokažte.*[2]

Řešení:
Na rovnost $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle (\vec{a}+\vec{b}) - \vec{b}, (\vec{a}-\vec{b}) + \vec{b}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{b}\rangle \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle + \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{b}\rangle - \langle \vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{b}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}\,. \qquad \square$$

Na dokázaný výsledek se budeme mnohokrát v dalším textu odvolávat jako na vztah

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}+\vec{b} \perp \vec{a}-\vec{b}\,. \tag{3.1}$$

Příklad 3.1.3: *Dokažte, že pro libovolné čtyři body A, B, C, D v rovině či prostoru vždy platí*[3]

$$|AB|^2 + |CD|^2 - |BC|^2 - |AD|^2 = 2\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\right\rangle .$$

[1] [pra–86], str. 100, úloha 2.
[2] [pra–86], str. 100, úloha 3.
[3] [eng–97], str. 293, úloha E8.

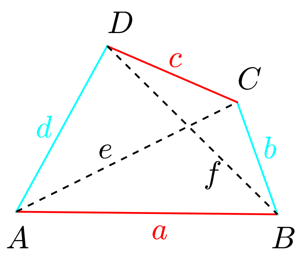
Řešení:
V levé straně dokazovaného vztahu přejdeme k velikostem vektorů a získaný výraz ekvivalentně upravíme:

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}|^2-|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}|^2=$$
$$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2-|\overrightarrow{DC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BD}|^2-2\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DC}\rangle-2\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\rangle=$$
$$=-2\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}\rangle=2\langle\overrightarrow{DB},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\rangle\,.$$

Protože druhý vektor v posledním skalárním součinu je roven vektoru $\overrightarrow{AC}$, je zadaná rovnost dokázána. □

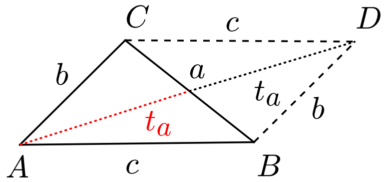
Poznámka:
Dokázané tvrzení má následující důsledky.

- V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$, jakož i ve čtyřstěnu $ABCD$ platí:
$$AC\perp BD \Leftrightarrow |AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2\,.$$
- Pro délky stran a úhlopříček libovolného lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí rovnost $e^2+f^2=b^2+d^2+2ac$, kterou dostaneme z odvozené rovnosti záměnou bodů B a C:
$$e^2+f^2-b^2-d^2=|AC|^2+|BD|^2-|CB|^2-|AD|^2=2\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=2ac\,,$$
neboť vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ jsou souhlasně rovnoběžné.[4]



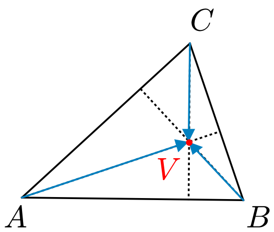
- Rovnoběžníková rovnost $e^2+f^2=2(a^2+b^2)$ (viz dále příklad 3.1.5), která se odvodí stejně jako předchozí „lichoběžníková“ rovnost, když se položí $d=b$ a $c=a$.
- Vyjádření délky těžnice trojúhelníku pomocí délek jeho stran. K tomu účelu doplníme trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCD$ s úhlopříčkami a a $2t_a$. Podle rovnoběžníkové rovnosti platí
$$a^2+4t_a^2=2b^2+2c^2\,,\quad \text{odtud}\quad t_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)\,.$$

[4]Dodejme, že v každém konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí nerovnost $e^2+f^2\le b^2+d^2+2ac$ podle Poznámky za úlohou 3.2.50.



Příklad 3.1.4: *Dokažte, že pro libovolné čtyři body A, B, C, V v rovině nebo prostoru platí*[5]

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CV} \rangle + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BV} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AV} \rangle = 0\,.$$



Řešení:
Vyjádřeme všechny vektory na levé straně rovnosti pomocí vektorů s počátečním bodem A a pak zkoumaný součet upravme:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CV} \rangle + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BV} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AV} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AV} \rangle + \langle -\overrightarrow{AC}, -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AV} \rangle + \langle -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AV} \rangle =$$

$$= -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AV} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle - \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AV} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AV} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AV} \rangle = 0\,.$$

Tím je rovnost ze zadání úlohy dokázána. □

Poznámka:
Jsou-li body A, B, C vrcholy libovolného trojúhelníku, pak dokázaná rovnost znamená, že průsečíkem dvou výšek prochází výška třetí, neboť jsou-li dva ze sčítanců v dokázané rovnosti rovny nule, je roven nule i třetí sčítanec.

Jsou-li body A, B, C, V vrcholy libovolného čtyřstěnu, vyjadřuje dokázaná rovnost tvrzení, že jsou-li dvě a dvě protější hrany čtyřstěnu na sebe kolmé, je na sebe kolmá i třetí dvojice protilehlých hran.

[5] [kuř–89], str. 84.

Rovnoběžnost a kolmost ve čtyřúhelníku

Příklad 3.1.5: *Dokažte* rovnoběžníkovou rovnost $2(a^2+b^2)=e^2+f^2$, *kde* a, b *jsou délky sousedních stran libovolného rovnoběžníku a* e, f *jsou délky jeho úhlopříček.*

Řešení:
V rovnoběžníku $ABCD$ označíme $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{e}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{f}=\overrightarrow{DB}$. Pak zřejmě $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{f}=\vec{b}-\vec{a}$, takže pro délky úhlopříček platí

$$e^2=|\vec{e}\,|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=a^2+b^2+2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle\,,\qquad f^2=|\vec{f}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=b^2+a^2-2\langle\vec{b},\vec{a}\rangle\,.$$

Sečtením těchto dvou rovností dostaneme

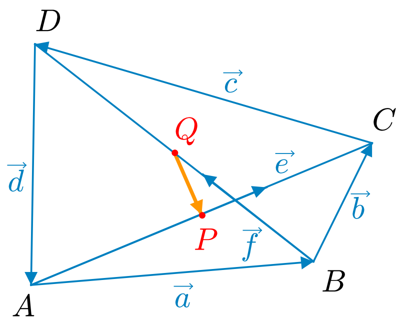
$$e^2+f^2=a^2+b^2+2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle+b^2+a^2-2\langle\vec{b},\vec{a}\rangle=2(a^2+b^2)\,.$$

Tím je důkaz hotov. Zopakovali jsme vlastně postup z řešení Příkladu 3.1.3. □

Příklad 3.1.6: *Nechť* P, Q *jsou středy úhlopříček libovolného čtyřúhelníku* $ABCD$. *Dokažte* Eulerovu rovnost:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4|PQ|^2\,,$$

kde a, b, c, d *jsou délky stran dotyčného čtyřúhelníku a* e, f *jsou délky jeho úhlopříček.*[6]



Řešení:
Označíme vektory $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{d}=\overrightarrow{DA}$, $\vec{e}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{f}=\overrightarrow{BD}$. Protože $ABCD$ je čtyřúhelník, je $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{o}$. Pro střed P úsečky AC a střed Q úsečky BD platí

$$P=\frac{1}{2}\,(A+C)\qquad\text{a}\qquad Q=\frac{1}{2}\,(B+D)\,.$$

Dále označíme s výraz rovný rozdílu délek úseček z dokazované rovnosti

$$s=a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2-4|PQ|^2\,.$$

Podobně jako při řešení Úlohy 3.1.5 můžeme psát:

$$e^2=|\vec{e}\,|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=a^2+b^2+2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle\,,\qquad f^2=|\vec{e}\,|^2=|\vec{d}+\vec{a}|^2=a^2+d^2+2\langle\vec{a},\vec{d}\,\rangle\,,$$

[6] [pra–86], str. 105, úloha 5.42.

$$|PQ|^2 = \left|\frac{1}{2}(B+D-A-C)\right|^2 = \frac{1}{4}\cdot|\vec{a}+\vec{c}|^2 = \frac{1}{4}(a^2+c^2+2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle)\,.$$

Tato tři vyjádření nyní využijeme k určení dříve definovaného rozdílu s:

$$s = a^2+b^2+c^2+d^2-a^2-b^2-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-a^2-d^2-2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle-a^2-c^2-2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle =$$

$$= -2a^2-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle = -2\langle\vec{a},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\rangle = -2\langle\vec{a},\vec{o}\rangle = 0\,.$$

Tím je Eulerova rovnost dokázána. □

Poznámka 1:
Protože některý čtyřúhelník je rovnoběžník, právě když středy jeho úhlopříček splývají, má dokázaná Eulerova rovnost tento důsledek: Délky stran a úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$ splňují vztah

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = e^2+f^2$$

tehdy a jen tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník. V kladném případě přejde uvedená rovnost (po dosazení $c=a$, $d=b$) v rovnoběžníkovou rovnost $2(a^2+b^2)=e^2+f^2$ z Úlohy 3.1.5.

Poznámka 2:
Uvedený důkaz Eulerovy věty vede rovněž k závěru, že pro libovolné čtyři body A, B, C, D v prostoru platí rovnost

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 = |AC|^2+|BD|^2+4|PQ|^2\,,$$

kde P, Q jsou středy dvojic bodů A, C a B, D. Odtud plyne obecná nerovnost

$$|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2 \ge |AC|^2+|BD|^2\,, \tag{3.2}$$

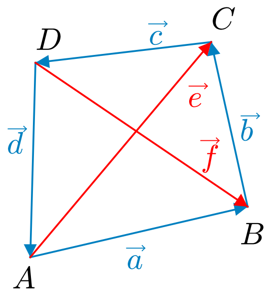
v níž rovnost nastane v jediném případě – když $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Vylepšení tohoto výsledku v podobě nerovnosti

$$2|AB|\cdot|CD|+|BC|^2+|DA|^2 \ge |AC|^2+|BD|^2 \tag{3.3}$$

uvedeme v Úloze 3.2.50.[7] Ještě však dodejme, že rovnost v nerovnosti (3.3) nastane právě tehdy, když vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ jsou buď souhlasně rovnoběžné, nebo je aspoň jeden z nich roven $\vec{o}$, podmínka $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ tedy není nutná.

[7] Díky zřejmému odhadu $x^2+y^2\ge 2xy$ ($x,y\in\mathbf{R}$) je skutečně (3.2) důsledkem (3.3).

Příklad 3.1.7: *Úhlopříčky čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé, právě když pro délky jeho stran platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Dokažte.*[8]



Řešení:
Vektory určené stranami a úhlopříčkami čtyřúhelníku $ABCD$ označme jako obvykle (viz obrázek) a na zadanou rovnost aplikujeme ekvivalentní úpravy:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

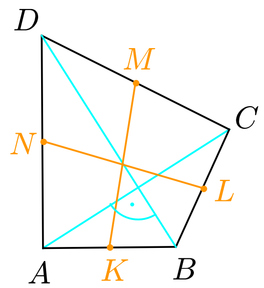
$$\Leftrightarrow \quad |\vec{e} - \vec{b}|^2 + |-\vec{e} - \vec{d}|^2 - |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |\vec{e}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle \vec{e}, \vec{b} \rangle + |\vec{e}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\langle \vec{e}, \vec{d} \rangle - |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{e}, \vec{e} - \vec{b} + \vec{d} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{e}, -\vec{c} - \vec{b} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{e}, \vec{f} \rangle = 0\,.$$

Skalární součin $\langle \vec{e}, \vec{f} \rangle$ se rovná nule, právě když jsou vektory $\vec{e}$ a $\vec{f}$, a tedy i úhlopříčky AC a BD, navzájem kolmé. □

Příklad 3.1.8: *Úhlopříčky čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé právě tehdy, když spojnice středů jeho protilehlých stran mají shodné délky. Dokažte.*[9]



Řešení:
Nechť K, L, M, N jsou postupně středy stran AB, BC, CD, AD čtyřúhelníku $ABCD$:

$$K = \frac{1}{2}(A + B)\,, \qquad L = \frac{1}{2}(B + C)\,, \qquad M = \frac{1}{2}(C + D)\,, \qquad N = \frac{1}{2}(A + D)\,.$$

[8][eng–97], str. 293, úloha E6; [pra–86], str. 100, úloha 5.5. Tvrzení rovněž plyne z výsledku Příkladu 3.1.3, jak jsme uvedli v Poznámce za jeho řešením.

[9][eng–97], str. 293, úloha E7. Tvrzení lze také snadno dokázat geometrickou úvahou o tom, kdy je Varignonův rovnoběžník z Příkladu 2.1.4 pravoúhelníkem.

Máme dokázat, že platí ekvivalence

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \quad \Leftrightarrow \quad \big|\overrightarrow{MK}\big|^2 = \big|\overrightarrow{NL}\big|^2 ,$$

upravujme proto ekvivalentně rovnost z její pravé strany:

$$\big\langle K-M, K-M \big\rangle - \big\langle L-N, L-N \big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}\big\langle C+D-A-B, C+D-A-B \big\rangle - \frac{1}{4}\big\langle A+D-B-C, A+D-B-C \big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

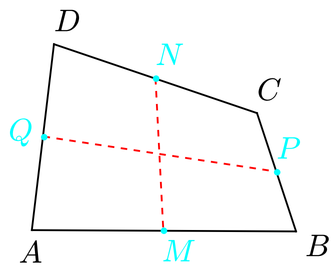
$$\Leftrightarrow \quad \big|\overrightarrow{AC}\big|^2 + \big|\overrightarrow{BD}\big|^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle - \big|\overrightarrow{CA}\big|^2 - \big|\overrightarrow{BD}\big|^2 - 2\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \, . \qquad \square$$

Příklad 3.1.9: *Dokažte* Eulerovu větu: *V libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ platí*

$$|AC|^2 + |BD|^2 = 2(|MN|^2 + |PQ|^2) ,$$

kde MN a PQ jsou spojnice středů jeho protilehlých stran.[10]



Řešení:
Jsou-li body M, N, P, Q po řadě středy stran AB, CD, BC, DA, platí pro ně vyjádření

$$M = \frac{1}{2}(A+B) , \qquad N = \frac{1}{2}(C+D) , \qquad P = \frac{1}{2}(B+C) , \qquad Q = \frac{1}{2}(A+D) ,$$

odtud

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(C+D-A-B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) , \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(A+D-B-C) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right) ,$$

a proto platí

$$|MN|^2 + |PQ|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|^2 + \frac{1}{4}|-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|^2 + \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle +$$

$$+ \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|^2 - \frac{1}{2}\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{1}{2}|AC|^2 + \frac{1}{2}|BD|^2 ,$$

což je požadovaná rovnost. $\square$

[10] [eng–97], str. 298, úloha 7.

Příklad 3.1.10: *Pro libovolný čtyřúhelník $ABCD$ dokažte větu: Pro každý bod X platí rovnost $|AX|^2 + |CX|^2 = |BX|^2 + |DX|^2$ právě tehdy, když $ABCD$ je pravoúhelník.*[11]

Řešení:
Na rovnost přepsanou pro velikosti vektorů

$$\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CX}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BX}\right|^2 + \left|\overrightarrow{DX}\right|^2$$

budeme po přechodu ke skalárním součinům aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$\left|\overrightarrow{AX}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{DX}\right|^2 = 0\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BX}\right|^2 - \left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CX}\right|^2 = 0\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BX}\right\rangle - \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 - 2\left\langle\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CX}\right\rangle = 0\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CX}\right\rangle - \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 - 2\left\langle\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CX}\right\rangle = 0\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right\rangle + 2\left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CX}\right\rangle - \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 - 2\left\langle\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CX}\right\rangle = 0\,,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{DC}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right\rangle + 2\left\langle\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CX}\right\rangle = 0\,.$$

Poslední rovnost je splněna pro každý bod X právě tehdy, když platí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (neboť hodnota skalárního součinu $\langle\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CX}\rangle$ je nezávislá na volbě bodu X jedině tehdy, když vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ je nulový; pak má i rozdíl $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{DC}|^2$ nulovou hodnotu) a zároveň $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$. První podmínka znamená, že $ABCD$ je rovnoběžník a druhá podmínka, že vektory $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{AB}$ jsou navzájem kolmé. To nastane zároveň právě tehdy, když $ABCD$ je pravoúhelník. □

Příklad 3.1.11: *Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník právě tehdy, když se pro libovolný bod M skalární součin $\langle\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\rangle$ liší od skalárního součinu $\langle\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\rangle$ o stejnou hodnotu, která na volbě bodu M nezávisí. Dále ukažte, že v případě rovnoběžníku $ABCD$ je tato hodnota rozdílu skalárních součinů rovna nule, právě když je $ABCD$ pravoúhelník.*[12]

Řešení:
Označme

$$s(M) = \left\langle\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right\rangle$$

a pro libovolné dva body M_1, M_2 najděme vztah mezi hodnotami $s(M_1)$, $s(M_2)$. Platí

$$s(M_2) = \left\langle\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_2C}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{M_2B}, \overrightarrow{M_2D}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1C}\right\rangle -$$

$$-\left\langle\overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1D}\right\rangle = \left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|^2 + \left\langle\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_1C}\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_2M_1}\right\rangle +$$

$$+\left\langle\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1C}\right\rangle - \left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|^2 - \left\langle\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_1D}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_2M_1}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1D}\right\rangle =$$

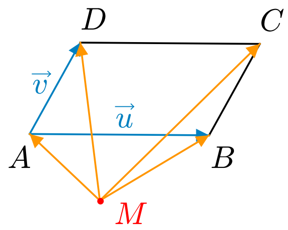
[11] [eng–97], str. 298, úloha 2.
[12] První část z [pra–86], str. 102, úloha 5.16, druhá část z [eng–97], str. 298, úloha 10.

$$= \langle \overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1C} \rangle - \langle \overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1D} \rangle + \langle \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_1C} + \overrightarrow{M_1A} \rangle - \langle \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_1D} + \overrightarrow{M_1B} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1C} \rangle - \langle \overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1D} \rangle + \langle \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1C} - \overrightarrow{M_1B} - \overrightarrow{M_1D} \rangle =$$

$$= s(M_1) + \langle \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} \rangle$$

Má-li platit $s(M_1) = s(M_2)$, musí být $\langle \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} \rangle = 0$. To má být splněno pro libovolné body M_1, M_2, a tedy musí platit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Naopak z této rovnosti (jež charakterizuje rovnoběžníky $ABCD$) podle odvozené rovnosti obecně platí $s(M_1) = s(M_2)$. Tím je první tvrzení příkladu dokázáno.



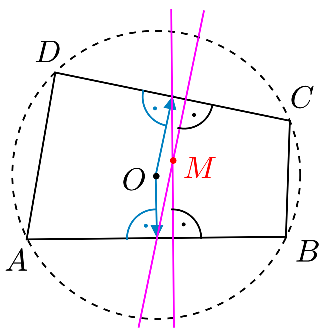
V případě rovnoběžníku $ABCD$ do rovnosti definující hodnotu $s(M)$ dosadíme za vektory $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \vec{u}$, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \vec{v}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \vec{u} + \vec{v}$, kde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Dostaneme

$$s(M) = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC} \rangle - \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD} \rangle = \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA} + \vec{u} + \vec{v} \rangle - \langle \overrightarrow{MA} + \vec{u}, \overrightarrow{MA} + \vec{v} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA} \rangle + \langle \overrightarrow{MA}, \vec{u} \rangle + \langle \overrightarrow{MA}, \vec{v} \rangle - \langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA} \rangle - \langle \overrightarrow{MA}, \vec{v} \rangle - \langle \overrightarrow{MA}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle ,$$

takže $s(M) = 0$ pro každý bod M právě tehdy, když $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ neboli $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. □

Příklad 3.1.12: *Pro libovolný tětivový čtyřúhelník (tj. čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici) dokažte: Šest přímek vedených vždy středem jedné strany kolmo k protilehlé straně prochází jedním bodem M. Úhlopříčky jsou zde rovněž považovány za dvě protilehlé strany. (Bod M se nazývá* Mongeovým bodem *daného tětivového čtyřúhelníku.)*[13]



[13] [eng–97], str. 299, úloha 17.

ŘEŠENÍ:
Označme O střed kružnice opsané uvažovanému tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$. Z rovnosti $|OC| = |OD|$ v trojúhelníku OCD je jasné, že vektor kolmý ke straně CD je například vektor $\frac{1}{2}(C+D)-O$, tedy vektor ze středu O do středu úsečky CD. Je to i ve shodě s výsledkem (3.1), podle kterého z rovnosti $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$ plyne

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = 2\left(\frac{C+D}{2} - O\right).$$

Proto přímka procházející středem strany AB a kolmá na stranu CD má rovnici

$$p_{AB}: \ X = \frac{1}{2}(A+B) + t\cdot\frac{1}{2}(C+D-2O), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Analogicky rovnice přímky procházející středem strany CD a kolmé na stranu AB má tvar

$$p_{CD}: \ X = \frac{1}{2}(C+D) + s\cdot\frac{1}{2}(A+B-2O), \quad s \in \mathbf{R}.$$

Nyní zapíšeme rovnici pro společné body přímek p_{AB} a p_{CD} (jež mohou být i totožné)

$$p_{AB} \cap p_{CD}: \quad A+B+t(C+D-2O) = C+D+s(A+B-2O),$$

$$A+B+tC+tD-2tO = sA+sB+C+D-2sO.$$

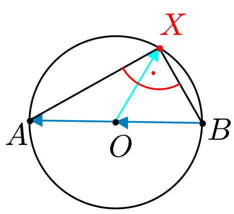
Protože poslední rovnice je splněna pro $s = t = 1$, na obou přímkách leží bod M s vyjádřením

$$M = \frac{1}{2}(A+B+C+D-2O).$$

Jelikož vzorec pro bod M se nezmění při jakékoliv permutaci bodů A, B, C, D, procházejí bodem M i ostatní čtyři, analogickým způsobem značené, přímky p_{BC}, p_{AD}, p_{AC}, p_{BD}. □

Vlastnosti obecného trojúhelníku

Příklad 3.1.13: *Dokažte* Thaletovu větu*: Je-li bod O střed úsečky AB o délce $2r$, pak pro každý bod X různý od bodů A, B je úhel AXB pravý právě tehdy, když $|OX| = r$.*[14]



[14] Vektorový důkaz tohoto klasického výsledku je převzat z [kuř–89], str. 88.

Řešení:
Protože podle zadání $|OA| = |OB| = r$, je podmínka $|OX| = r$ ekvivalentní s rovností skalárních součinů
$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle .$$
Na tuto rovnost aplikujeme ekvivalentní úpravy s přihlédnutím k rovnosti $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$:
$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} \rangle - \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OA} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{BO} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\sphericalangle AXB| = \frac{\pi}{2} .$$
Tím je Thaletova věta dokázána. □

Příklad 3.1.14: *Jako doplněk k Thaletově větě z Příkladu* 3.1.13 *dokažte následující tvrzení: Všechny body X dané roviny ABC, které vyhovují podmínce*
$$\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{CX} \rangle = \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AX} \rangle ,$$
tvoří Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem AB.[15]

Řešení:
Zkoumanou rovnost postupně upravíme:
$$\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{CX} \rangle = \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AX} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{CB} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle X - A, X - B \rangle = 0 .$$
Odvozená rovnost je vyjádřením podmínky, že úhel AXB je pravý. Jak víme z elementární geometrie, vyhovující body X vyplní Thaletovu kružnici nad průměrem AB. Přesvědčíme se o tom nezávisle na Příkladu 3.1.13 následující úpravou získané rovnice:
$$\left\langle X - \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}, X - \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right\rangle = 0 ,$$
$$\left(X - \frac{A+B}{2} \right)^2 = \left(\frac{A-B}{2} \right)^2 .$$
To znamená, že se skutečně jedná o kružnici $k = (S, r)$ se středem $S = \frac{1}{2}(A+B)$, tj. středem úsečky AB, a poloměrem $r = \frac{1}{2}|A - B|$, tj. polovinou velikosti vektoru $\overrightarrow{AB}$. □

Příklad 3.1.15: *Dokažte, že výšky trojúhelníku leží na třech přímkách, které procházejí jedním bodem (zvaným* ortocentrum *daného trojúhelníku). (Výškou trojúhelníku rozumíme každou ze tří úseček spojujících vždy vrchol trojúhelníku s jeho kolmým průmětem na přímku protější strany.)*[16]

[15] [eng–97], str. 298, úloha 8.
[16] Stejně jako v Příkladu 3.1.13 uvádíme vektorový důkaz z [kuř–89], str. 84.

Řešení:
Nechť bod V je průsečík přímek, na kterých leží výšky vedené z bodu A a z bodu B trojúhelníku ABC. Pak platí

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{VA} \rangle = 0 \qquad \text{a} \qquad \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{VB} \rangle = 0\,.$$

Zřejmé rovnosti $\overrightarrow{VC} = \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{VC} = \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{AC}$ skalárně vynásobíme po řadě vektory $\overrightarrow{CA}$ a $\overrightarrow{BC}$:

$$\langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{CA} \rangle = \langle \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle \qquad \text{a} \qquad \langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle\,.$$

Sečtením těchto rovností a úpravou získáme

$$\langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \overrightarrow{VB}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{VA}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle\,.$$

Jelikož první a třetí sčítanec na pravé straně jsou rovny nule, dostaneme

$$\langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \rangle = \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle - \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC} \rangle\,, \qquad \text{neboli} \qquad \langle \overrightarrow{VC}, \overrightarrow{BA} \rangle = 0\,.$$

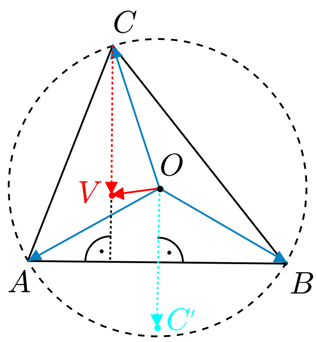
To znamená, že buď platí $C = V$, nebo je přímka CV kolmá na stranu AB, proto na ní leží výška z vrcholu C. V obou případech je tvrzení dokázáno. □

Příklad 3.1.16: *Tvrzení z Příkladu* 3.1.15 *o existenci ortocentra V obecného trojúhelníku ABC dokažte znovu společně s rovnostmi*

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,, \tag{3.4}$$

$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,, \qquad \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\,, \qquad \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\,, \tag{3.5}$$

kde O je střed kružnice opsané dotyčnému trojúhelníku.[17]



[17] [bud–71], str. 87–88, věta 3.6; [pra–86], část 2, str. 101, úloha 5.8.

Řešení:
Označme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Dále označme C' bod určený vektorovou rovností $\overrightarrow{OC'} = \vec{a} + \vec{b}$. Protože $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, je podle (3.1) $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$, neboli $\overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{AB}$. Ukážeme, že dokazovaná rovnost (3.4) určuje takový bod V, který skutečně leží na přímkách všech tří výšek. Jestliže je tedy jistý bod V zadán rovností

$$\overrightarrow{OV} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

pak $\overrightarrow{OV} - \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ neboli $\overrightarrow{CV} = \overrightarrow{OC'}$. Protože $\overrightarrow{OC'} \perp \overrightarrow{AB}$, je také $\overrightarrow{CV} \perp \overrightarrow{AB}$, to znamená, že bod V leží na kolmici vedené bodem C na stranu AB, tedy na stejné přímce jako výška z bodu C. Při cyklické záměně bodů A, B, C má bod V stále stejné vyjádření, a proto je společným bodem přímek všech tří výšek.

Z dokázané rovnosti $\overrightarrow{CV} = \overrightarrow{OC'}$ plyne vektorová rovnost $\overrightarrow{CV} = \vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Ze symetrie plynou i zbylé z rovností (3.5). □

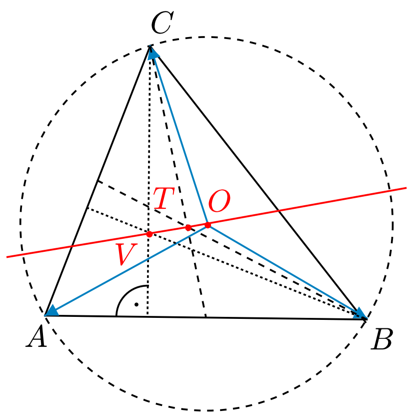
Poznámka:
Význam vzorce (3.4) výrazně doceníme v druhé části Kapitoly 3, kde ho uplatníme v řešení samostatné početné skupiny úloh. Již nyní však porovnejme vzorec (3.4) pro polohový vektor $\overrightarrow{OV}$ ortocentra V se vzorcem pro polohový vektor $\overrightarrow{OT}$ těžiště T trojúhelníku ABC, který jsme odvodili v Příkladu 2.1.2. Z rovností

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

okamžitě plyne vztah

$$\overrightarrow{OV} = 3\overrightarrow{OT}\,, \tag{3.6}$$

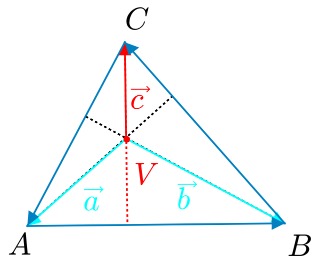
který znamená, že buď platí $O = T = V$ (trojúhelník ABC je pak rovnostranný), nebo O, T, V jsou tři různé body, které leží v uvedeném pořadí na jedné přímce, a to tak, že $|OT| : |TV| = 1 : 2$. Říká se jí *Eulerova přímka* daného trojúhelníku ABC (libovolného trojúhelníku, který není rovnostranný).



Další poznatky spojené s Eulerovou přímkou uvedeme v Příkladu 3.1.19.

Příklad 3.1.17: *Po příkladech* 3.1.15 *a* 3.1.16 *podejte třetí důkaz existence ortocentra* V *obecného trojúhelníku* ABC*, tentokrát společně s poznatkem, že bod* V *je jediný bod roviny trojúhelníku* ABC*, který splňuje soustavu rovnic*[18]

$$\langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV} \rangle = \langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{CV} \rangle = \langle \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV} \rangle . \tag{3.7}$$



Řešení:
Označme (pro zatím libovolný bod V) vektory $\vec{a} = \overrightarrow{VA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{VB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{VC}$. Je-li V průsečík kolmice z vrcholu A k přímce BC a kolmice z vrcholu B k přímce CA, pro odpovídající skalární součiny směrových vektorů platí

$$\langle \vec{a}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0 \qquad \text{a} \qquad \langle \vec{b}, \overrightarrow{CA} \rangle = 0 ,$$

což s ohledem na rovnosti $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ a $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$ po řadě znamená, že

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \qquad \text{a} \qquad \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle .$$

Odtud již plyne, že také platí

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle , \qquad \text{neboli} \qquad \langle \vec{c}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0 ,$$

takže bod V leží i na kolmici z bodu C k přímce AB. Tím je existence průsečíku tří přímek, na nichž leží výšky trojúhelníku, dokázána. Jako vedlejší produkt našeho postupu jsme dostali, že ortocentrum V splňuje soustavu rovností $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$, neboli (3.7).

Zbývá dokázat, že pokud naopak nějaký bod V roviny trojúhelníku ABC splňuje soustavu (3.7), pak leží na všech třech přímkách jeho výšek (je tedy ortocentrem). Předpokládejme proto, že platí (3.7), pak pro dříve zavedené vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ z první rovnosti $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ plyne

$$0 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} - \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \overrightarrow{CB} \rangle ,$$

což znamená, že bod V leží na kolmici z bodu A k přímce BC. Podobně bychom ukázali, že bod V leží také na kolmici z bodu B na přímku AC a na kolmici z bodu C k přímce AB. Bod V splňující (3.7) je tedy skutečně ortocentrem trojúhelníku ABC. □

[18] Původní formulace inspirovaná učebnicovým důkazem z [koč–09], str. 45.

Příklad 3.1.18: *Dokažte, že pro vzdálenost ortocentra V od středu O kružnice opsané trojúhelníku ABC platí vzorec*

$$|OV| = \sqrt{9r^2 - a^2 - b^2 - c^2}\,,$$

kde a, b, c jsou délky jeho stran a r je poloměr zmíněné kružnice.[19]

Řešení:
Pro délku c strany AB platí

$$c^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = \langle \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \rangle = 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle\,.$$

Z této a analogických rovností pro a^2, b^2 obdržíme pro skalární součiny vektorů $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vyjádření

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}c^2\,, \qquad \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}b^2\,, \qquad \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = r^2 - \frac{1}{2}a^2\,.$$

Pro vzdálenost středu O kružnice opsané od ortocentra V pak podle vzorce (3.4) platí

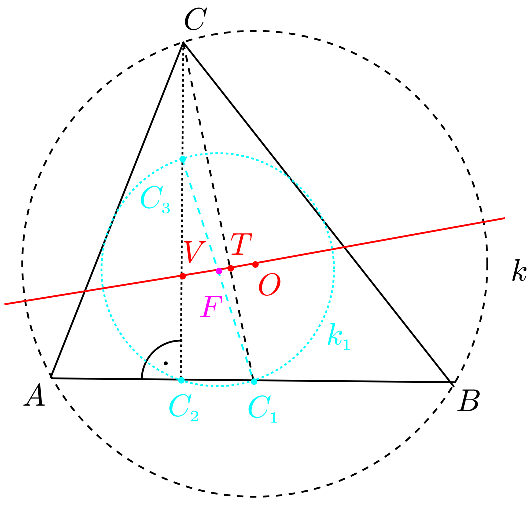
$$|\overrightarrow{OV}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = r^2 + r^2 + r^2 + 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle =$$
$$= 3r^2 + 2(3r^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2) = 9r^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

a vzorec ze zadání příkladu je tak dokázán. Dodejme, že jeho důsledkem je nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9r^2\,,$$

v níž nastane rovnost jedině v případě $V = O$, kdy je daný trojúhelník rovnostranný. □

Příklad 3.1.19: *Nechť $k = (O, r)$ je kružnice opsaná trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Středy stran, paty výšek a středy úseček AV, BV, CV leží vždy na jediné (tzv.* Feuerbachově*) kružnici $k_1 = (F, \frac{r}{2})$, přičemž střed F leží na Eulerově přímce (přímce OV) a půlí úsečku OV. Dokažte.*[20]



[19]Na námět školitele, který původ výsledku nezná.
[20][bud–71], str. 89–91, věta 3.8; [gar–05], str. 219, úloha 1. Feuerbachově kružnici se také běžně říká *kružnice devíti bodů* (bodů, o kterých je řeč právě v zadání příkladu).

Řešení:
Zaveďme nejprve polohové vektory vrcholů $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Pro polohový vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ ortocentra V využijeme vyjádření $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ odvozené jako významný vzorec (3.4) v Úloze 3.1.16. Definujeme nyní bod F jako střed úsečky OV. Pak pro jeho polohový vektor $\vec{f} = \overrightarrow{OF}$ platí

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Střed strany AB označíme C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2}(A + B)\,,$$

patu výšky z vrcholu C označíme C_2 a střed úsečky CV označíme C_3 :

$$C_3 = \frac{1}{2}(C + V) = \frac{1}{2}(C + O + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\,.$$

Nyní dokážeme, že $|FC_1| = |FC_2| = |FC_3| = \frac{r}{2}$. Z vyjádření bodů F a C_1 máme

$$\overrightarrow{FC_1} = C_1 - F = \frac{1}{2}(A + B) - O - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{c},$$

a odtud $|\overrightarrow{C_1F}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CO}| = \frac{1}{2}r$. Podobně

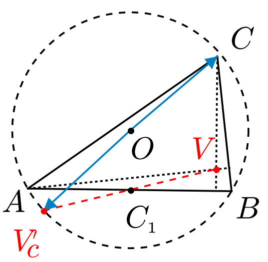
$$\overrightarrow{FC_3} = C_3 - F = \frac{1}{2}(C + O + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - O - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{c},$$

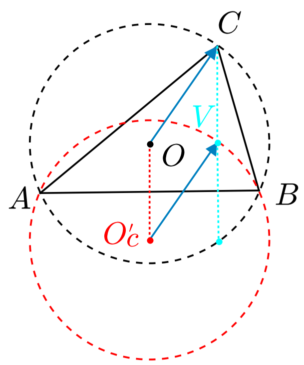
a odtud $|\overrightarrow{C_3F}| = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}r$. Body C_1 a C_3 na kružnici $k_1 = (F, \frac{r}{2})$ proto leží. Navíc z předchozích rovností plyne $\overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FC_3} = \vec{o}$, takže úsečka C_1C_3 má střed v bodě F a je tudíž průměrem uvažované kružnice k_1. Z Thaletovy věty pro pravoúhlý trojúhelník $C_1C_2C_3$ plyne, že na téže kružnici k_1 také leží bod C_2. Cyklickou záměnou bodů A, B, C dostaneme stejné tvrzení pro středy stran BC, AC, paty výšek vedených z vrcholů A, B a pro středy úseček AV, BV. $\square$

Příklad 3.1.20: *Na kružnici opsané libovolnému trojúhelníku ABC leží body souměrně sdružené s jeho ortocentrem V*

1. *podle středů stran AB, BC, AC,*
2. *podle os, kterými jsou přímky AB, BC, AC.*

Dokažte.[21]





[21] [kin–04], str.1–2 a 4, příklad 2.

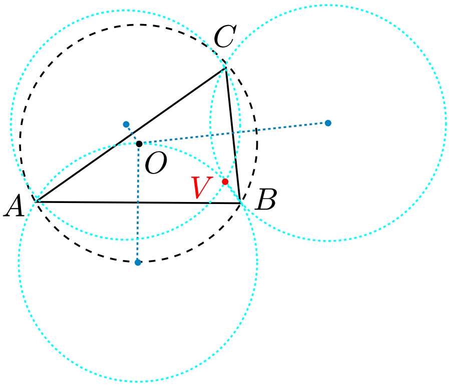
Řešení:

1. Zvolme střed O kružnice opsané za počátek a zaveďme polohové vektory
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}\,, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB}\,, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OC}\,.$$
Polohové vektory středu C_1 strany AB a ortocentra V (podle (3.4)) jsou
$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}\,)\,, \qquad \overrightarrow{OV} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,.$$
Pro bod V'_c souměrně sdružený s ortocentrem V podle středu C_1 platí
$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OV'_c} + \overrightarrow{OV}\right) = \overrightarrow{OC_1}\,,$$
takže polohový vektor bodu V'_c má vyjádření
$$\overrightarrow{OV'_c} = 2\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OV} = (\vec{a} + \vec{b}\,) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,) = -\vec{c}\,.$$
Odtud plyne, že velikost vektoru $\overrightarrow{OV'_c}$ je rovna poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC, bod V'_c tedy leží na kružnici opsané, a to tak, že úsečka CV'_c je jejím průměrem. Podobně bychom ukázali, že rovněž body V'_a, V'_b, souměrně sdružené s ortocentrem V po řadě podle středů stran BC, AC, leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Tím je důkaz části 1 hotov.

2. Označme ještě k kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Uvažujme osovou souměrnost podle přímky AB. Tvrzení, že obraz ortocentra V v osové souměrnosti s osou AB leží na kružnici k, je ekvivalentní s tvrzením, že bod V leží na kružnici k', která je obrazem kružnice k v uvažované osové souměrnosti podle přímky AB. Toto tvrzení nyní dokážeme. Protože $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$, střed O'_c kružnice k' je určen rovností:
$$\overrightarrow{OO'_c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}\,,$$
odtud plyne
$$\overrightarrow{O'_cV} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OO'_c} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,) - (\vec{a} + \vec{b}\,) = \vec{c}\,.$$
Bod V má tedy od středu O'_c vzdálenost $|\vec{c}\,|$ rovnou poloměru obou shodných kružnic k a k', takže skutečně platí $V \in k'$ a důkaz druhé části je hotov. □

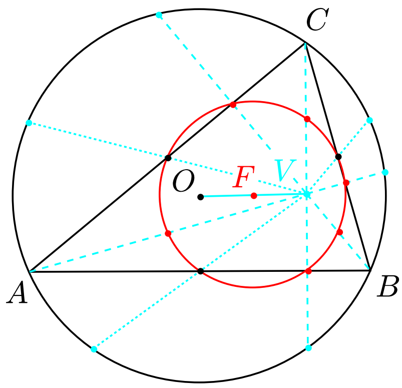
Poznámka 1:
Výsledek druhé části předchozí úlohy lze, jak jsme viděli v průběhu řešení, vyjádřit takto: *Tři kružnice, které jsou souměrně sdružené s kružnicí opsanou danému trojúhelníku podle přímek jeho stran, procházejí jedním bodem, totiž jeho ortocentrem.* Pro každý trojúhelník ABC, který není pravoúhlý, a jeho ortocentrum V to znamená, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ABV, ACV, BCV jsou shodné, tzn. mají stejný poloměr. Body A, B, C, V mají v takové situaci rovnocenné role: Každý z nich je ortocentrem trojúhelníku, jehož vrcholy jsou zbylé tři body.[22]

[22]Taková čtveřice komplanárních bodů se někdy nazývá *ortocentrická*.



Poznámka 2:
Dokázali jsme, že na kružnici opsané trojúhelníku ABC, jejíž střed budeme značit O, leží (kromě vrcholů A, B, C) ještě šest dalších, obecně vzato různých, významných bodů, totiž obrazy ortocentra V v šesti souměrnostech podle středů stran AB, BC, AC a podle přímek, na kterých leží strany trojúhelníku. Zobrazíme-li opsanou kružnici ve stejnolehlosti se středem V a koeficientem $\frac{1}{2}$, dostaneme kružnici polovičního poloměru, jejíž střed F je středem úsečky OV a která prochází těmito devíti body: středy úseček AV, BV, CV, středy stran trojúhelníku ABC a patami výšek. Dokázali jsme tak podruhé tvrzení z Příkladu 3.1.19 o Feuerbachově kružnici. Zopakujme, že její střed F je určen polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OV} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\,. \tag{3.8}$$



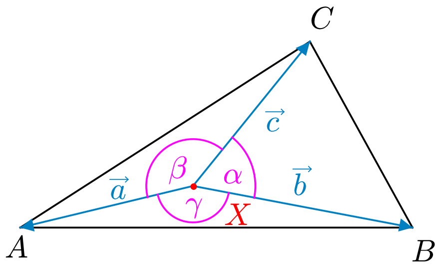
Příklad 3.1.21:

1. *Dokažte rovnost* $S_{BXC} \cdot \overrightarrow{XA} + S_{AXC} \cdot \overrightarrow{XB} + S_{AXB} \cdot \overrightarrow{XC} = \vec{o}$*, kde* X *je libovolný vnitřní bod trojúhelníku* ABC *a kde* S_{KLM} *značí obsah trojúhelníku* KLM*.*
2. *Dokažte rovnost* $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{o}$*, kde* I *značí střed kružnice vepsané trojúhelníku* ABC *o stranách délek* $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$*.*
3. *Dokažte rovnost* $d_a \cdot \overrightarrow{XA} + d_b \cdot \overrightarrow{XB} + d_c \cdot \overrightarrow{XC} = \vec{o}$*, kde* d_a, d_b, d_c *značí vzdálenosti libovolného bodu* X *rovnostranného trojúhelníku* ABC *od přímek jeho stran v pořadí* BC, AC, AB*.*[23]

[23] [pra–86], str. 101, úloha 5.9.

ŘEŠENÍ:

1.



Nejprve označíme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{XA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{XB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{XC}$ a velikosti úhlů $\alpha = |\sphericalangle BXC|$, $\beta = |\sphericalangle CXA|$ a $\gamma = |\sphericalangle AXB|$. Dále označíme

$$\vec{x} = S_{BXC} \cdot \overrightarrow{XA} + S_{AXC} \cdot \overrightarrow{XB} + S_{AXB} \cdot \overrightarrow{XC}$$

a dokážeme, že $\vec{x} = \vec{o}$.

Pro obsahy trojúhelníků platí

$$S_{BXC} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \qquad S_{AXC} = \frac{1}{2} ac \sin\beta \qquad S_{AXB} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma\,.$$

Odtud pro vektor $\vec{x}$ dostáváme

$$\vec{x} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} ac \sin\beta \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} ab \sin\gamma \cdot \vec{c}\,.$$

Nyní vypočítáme skalární součiny $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$, $\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle$ a $\langle \vec{x}, \vec{c} \rangle$. Pro první z nich máme

$$\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \frac{1}{2} ac \sin\beta \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \frac{1}{2} ab \sin\gamma \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = \frac{1}{2} bc \sin\alpha \cdot a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} ac \sin\beta \cdot ba \cos\gamma + \frac{1}{2} ab \sin\gamma \cdot ca \cos\beta = \frac{1}{2} a^2 bc (\sin\alpha + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta) =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 bc \left(\sin\alpha + \sin(\beta+\gamma)\right)\,.$$

Protože $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, je $\beta + \gamma = 2\pi - \alpha$. Dosazením dostáváme

$$\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \frac{1}{2} a^2 bc \left(\sin\alpha + \sin(2\pi - \alpha)\right) = 0\,.$$

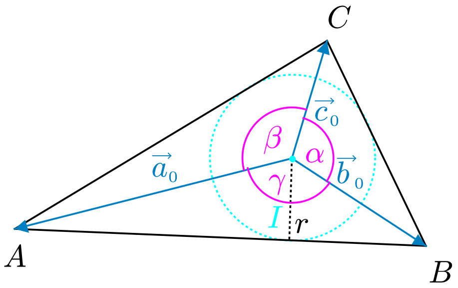
Analogicky

$$\langle \vec{x}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} ab^2 c (\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta + \sin\gamma\cos\alpha) = \frac{1}{2} ab^2 c \left(\sin\beta + \sin(\alpha+\gamma)\right) = 0$$

$$\langle \vec{x}, \vec{c} \rangle = \frac{1}{2} abc^2 (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma) = \frac{1}{2} abc^2 \left(\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta)\right) = 0\,.$$

Z rovností $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{c} \rangle = 0$ již plyne $\vec{x} = \vec{o}$.

2.



Označíme vektory $\vec{a}_0 = \overrightarrow{IA}$, $\vec{b}_0 = \overrightarrow{IB}$, $\vec{c}_0 = \overrightarrow{IC}$ a velikosti úhlů $\gamma = |\sphericalangle AIB|$, $\alpha = |\sphericalangle BIC|$, $\beta = |\sphericalangle AIC|$. Dále označíme

$$\vec{x} = a\vec{a}_0 + b\vec{b}_0 + c\vec{c}_0\,.$$

Pro obsah trojúhelníku AIB platí

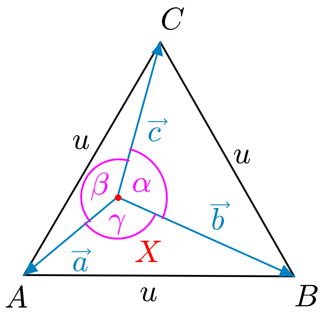
$$S_{\triangle AIB} = \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}a_0b_0\sin\gamma, \quad \text{odtud} \quad c = \frac{1}{r}a_0b_0\sin\gamma$$

a analogicky

$$a = \frac{1}{r}b_0c_0\sin\alpha, \qquad b = \frac{1}{r}a_0c_0\sin\beta\,.$$

Podobně jako v části 1 lze dokázat, že $\langle\vec{x},\vec{a}_0\rangle = \langle\vec{x},\vec{b}_0\rangle = \langle\vec{x},\vec{c}_0\rangle = 0$ (výpočty zde nebudeme opakovat), a tedy $\vec{x} = \vec{o}$.

3.



Nejprve označíme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{XA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{XB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{XC}$, u velikost strany rovnostranného trojúhelníku ABC a zavedeme úhly $\alpha = |\sphericalangle BXC|$, $\beta = |\sphericalangle CXA|$ a $\gamma = |\sphericalangle AXB|$. Naším cílem je dokázat, že vektor

$$\vec{x} = d_a\vec{a} + d_b\vec{b} + d_c\vec{c}$$

(kde d_a, d_b, d_c jsou vzdálenosti zavedené v zadání úlohy) je nulový. Pro obsah trojúhelníku AXB platí

$$S_{\triangle AXB} = \frac{1}{2}d_cu = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,, \quad \text{odtud} \quad d_c = \frac{1}{u}ab\sin\gamma\,,$$

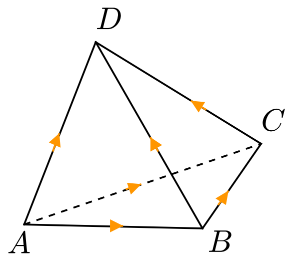
a podobně

$$d_b = \frac{1}{u}ac\sin\beta, \qquad d_a = \frac{1}{u}bc\sin\alpha\,.$$

Podobně jako v částech 1 a 2 lze dokázat, že $\langle\vec{x},\vec{a}\rangle = \langle\vec{x},\vec{b}\rangle = \langle\vec{x},\vec{c}\rangle = 0$, a tedy $\vec{x} = \vec{o}$. $\square$

Základní vlastnosti čtyřstěnu

Příklad 3.1.22: *Jestliže v daném čtyřstěnu jsou dvě dvojice protilehlých hran navzájem kolmé, pak je i třetí dvojice protilehlých hran navzájem kolmá. Dokažte.*[24]



Řešení:
Označme daný čtyřstěn $ABCD$ tak, aby podle zadání platilo $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$. Příslušné skalární součiny jsou tedy nulové:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0\,, \qquad \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0\,.$$

Ukážeme, že rovněž skalární součin vektorů $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{AD}$ zbývajících dvou protilehlých hran je roven nule (sčítání a odečítání vektorů lze sledovat podle šipek na obrázku):

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle =$$

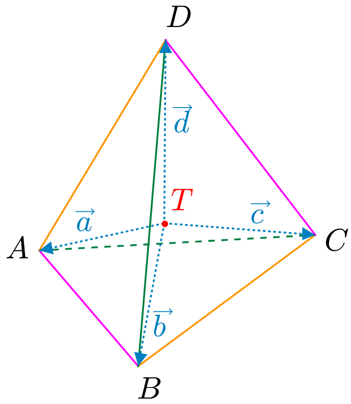
$$= \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle -$$

$$- \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle - \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0 - 0 = 0\,.$$

Tím je důkaz vztahu $BC \perp AD$ hotov. □

Příklad 3.1.23: *V rovnostranném trojúhelníku střed O kružnice opsané, střed I kružnice vepsané a těžiště T zřejmě splývají. Pokud naopak nějaké dva z bodů O, I, T splývají, je příslušný trojúhelník rovnostranný. Podobně v pravidelném čtyřstěnu body O, I, T s analogickým významem zřejmě splývají, platí i v této situaci obrácené tvrzení?*[25]

[24] [lar–90], str. 392, úloha 8.3.18. O čtyřstěnech majících každé dvě protilehlé hrany navzájem kolmé pojednáme v Příkladu 3.1.27.
[25] [bar–95], str. 45, úloha 479.



Řešení:
Obrácené tvrzení neplatí. Ukážeme totiž, že v nepravidelném čtyřstěnu, ve kterém každé dvě protilehlé hrany jsou stejně dlouhé, body T, O a I také splývají. Takový nepravidelný čtyřstěn $ABCD$ zřejmě existuje a podle jeho těžiště T zavedeme vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{TA}\,, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{TB}\,, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{TC}\,, \qquad \vec{d} = \overrightarrow{TD}\,.$$

Protože protilehlé hrany čtyřstěnu jsou stejně dlouhé, dostáváme podmínky

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{c} - \vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a} - \vec{c}\,|^2 = |\vec{b} - \vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a} - \vec{d}\,|^2 = |\vec{b} - \vec{c}\,|^2\,. \tag{3.9}$$

Z rovnosti $T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$ plyne $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}$, odkud

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c} + \vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a} + \vec{c}\,|^2 = |\vec{b} + \vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a} + \vec{d}\,|^2 = |\vec{b} + \vec{c}\,|^2\,. \tag{3.10}$$

Užitím rovnosti $|\vec{x} \pm \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 \pm 2\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle$ po sečtení odpovídajících si rovnic z (3.9) a (3.10) dostaneme

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}\,|^2 + |\vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}\,|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{d}\,|^2\,, \qquad |\vec{a}|^2 + |\vec{d}\,|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}\,|^2\,.$$

Odtud zřejmě plyne, že $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}\,|^2 = |\vec{d}\,|^2$, neboli $|TA| = |TB| = |TC| = |TD|$, což znamená, že T je střed opsané kulové plochy čtyřstěnu $ABCD$, tj. body T a O splývají.

Úvahu o středu I vepsané kulové plochy začneme následovně. V uvažovaném čtyřstěnu, ve kterém jsou protilehlé hrany stejně dlouhé, jsou zřejmě všechny čtyři stěny čtyřstěnu shodné trojúhelníky. S ohledem na objem čtyřstěnu musí být tedy stejně dlouhé všechny čtyři jeho tělesové výšky. Protože těžiště T rozděluje každou těžnici čtyřstěnu (spojnici vrcholu s těžištěm protilehlé stěny) v poměru $3 : 1$, vzdálenost těžiště T od každé stěny je $\frac{1}{4}$ odpovídající výšky. Bod T je tudíž stejně vzdálený od všech stěn čtyřstěnu, a tedy splývá nejen se středem O opsané kulové plochy (viz výše), ale rovněž se středem I vepsané kulové plochy. □

Příklad 3.1.24: *Středem každé hrany libovolného čtyřstěnu veďme rovinu kolmou k protější (mimoběžné) hraně. Dostaneme tak šest navzájem různoběžných rovin procházejících jedním bodem, dokažte. (Zmíněný bod se nazývá* Mongeův bod *daného čtyřstěnu.)* [26]

Řešení:
Pro daný čtyřstěn $ABCD$ zavedeme polohové vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OC}, \qquad \vec{d} = \overrightarrow{OD},$$

kde O je střed opsané kulové plochy. Protože $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$, pro každé dva různé vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z množiny $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ platí podle (3.1), že $\vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y}$, neboli $\langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0$.

Ukážeme, že bod M určený polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \tag{3.11}$$

je průsečíkem všech šesti rovin ze zadání úlohy, které jsou zřejmě navzájem různoběžné, neboť žádné dvě z hran čtyřstěnu nejsou rovnoběžné.

Označme S střed strany AB určený polohovým vektorem $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ a ověřme, že bod M leží v rovině procházející bodem S kolmo na hranu CD. K tomu stačí ukázat, že přímka SM je kolmá na hranu CD, neboli že $\langle \overrightarrow{SM}, \overrightarrow{CD} \rangle = 0$. Vyjádřeme potřebné vektory

$$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}, \qquad \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}).$$

Odtud již pro uvedený skalární součin dostáváme, co jsme chtěli ukázat:

$$\langle \overrightarrow{SM}, \overrightarrow{CD} \rangle = -\frac{1}{2}\langle \vec{c} + \vec{d}, \vec{c} - \vec{d} \rangle = 0.$$

S ohledem na symetrii bod M leží i ve zbylých pěti uvažovaných rovinách, je tedy společným bodem všech šesti rovin a důkaz je hotov. □

Příklad 3.1.25: *Dokažte, že pro libovolný čtyřstěn $ABCD$ jsou následující podmínky ekvivalentní:* [27]

(i) *Tělesové výšky čtyřstěnu $ABCD$ leží na čtyřech přímkách, které procházejí jedním bodem.* [28]

(ii) *Platí současně $AB \perp CD$, $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$.*

(iii) *Platí $|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.*

(iv) *Spojnice středů protilehlých hran čtyřstěnu $ABCD$ jsou tři úsečky téže délky.*

[26] Vlastní aplikace sestavená na námět klasického výsledku.
[27] Vlastní aplikace sestavená na námět klasického výsledku.
[28] Takový čtyřstěn se nazývá *ortocentrický* a zmíněnému společnému bodu všech čtyř přímek tělesových výšek (který některé čtyřstěny nemají) se říká *ortocentrum* příslušného čtyřstěnu.

Řešení:
Pro daný čtyřstěn $ABCD$ zavedeme polohové vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}\,, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB}\,, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OC}\,, \qquad \vec{d} = \overrightarrow{OD}\,,$$

kde O je střed kulové plochy opsané tomuto čtyřstěnu. Protože $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = r$, pro každé dva různé vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ z množiny $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ podle (3.1) platí

$$\vec{x} + \vec{y} \perp \vec{x} - \vec{y}\,, \qquad \text{neboli} \qquad \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = 0\,. \tag{3.12}$$

- Nejprve ukážeme, že jsou ekvivalentní podmínky (i) a (ii) pomocí dvou implikací.
  (i) $\Rightarrow$ (ii):
  Předpokládejme, že platí (i), že tedy existuje bod V splňující zároveň čtyři podmínky $AV \perp (BCD)$, $BV \perp (ACD)$, $CV \perp (ABD)$, $DV \perp (ABC)$. Odtud pro skalární součin vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ plyne

$$\big\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \big\rangle = \big\langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{CD} \big\rangle - \big\langle \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CD} \big\rangle = 0\,,$$

  přitom první skalární součin v poslední rovnosti je nulový, protože vektor $\overrightarrow{AV}$ je kolmý na rovinu BCD, tedy i na vektor $\overrightarrow{CD}$; druhý skalární součin je nulový, protože vektor $\overrightarrow{BV}$ je kolmý na rovinu ACD, tedy i na vektor $\overrightarrow{CD}$. To znamená, že $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. Podobně bychom ukázali, že $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ a $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$.
  (ii) $\Rightarrow$ (i):
  Předpokládejme, že platí (ii) neboli – vyjádřeno pomocí skalárních součinů a zavedených polohových vektorů –

$$\big\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{c} \big\rangle = 0\,, \qquad \big\langle \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \big\rangle = 0\,, \qquad \big\langle \vec{d} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{b} \big\rangle = 0\,. \tag{3.13}$$

  Ukážeme, že pak Mongeův bod M čtyřstěnu $ABCD$, určený podle Příkladu 3.1.24 rovností (3.11)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})\,,$$

  leží na každé z přímek jeho tělesových výšek. K důkazu $AM \perp (BCD)$ určíme skalární součiny (s využitím (3.12) a (3.13)):

$$\begin{aligned}
\big\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \big\rangle &= \big\langle \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \big\rangle = \big\langle \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \vec{a}, \vec{c} - \vec{b} \big\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} - \vec{b} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{d} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = 0\,, \\
\big\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD} \big\rangle &= \big\langle \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} \big\rangle = \big\langle \tfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \big\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\langle \vec{b} + \vec{d}, \vec{d} - \vec{b} \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{c} - \vec{a}, \vec{d} - \vec{b} \rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

  Odtud již plyne, že vektor $\overrightarrow{AM}$ je kolmý na rovinu (BCD), neboť její vektory $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{BD}$ jsou lineárně nezávislé. S ohledem na symetrii bychom stejně ukázali, že platí také $BM \perp (ACD)$, $CM \perp (ABD)$, $DM \perp (ABC)$.

- Nyní ukážeme, že jsou ekvivalentní podmínky (ii) a (iii). První z nich je vyjádřena soustavou rovností (3.13), které můžeme ještě přepsat do tvaru

$$\langle\vec{a},\vec{d}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{d}\rangle\,, \qquad \langle\vec{a},\vec{d}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{c},\vec{d}\rangle\,,$$

$$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{d}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{c},\vec{d}\rangle\,.$$

  Při označení

$$s_1 = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{c},\vec{d}\rangle\,, \qquad s_2 = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{d}\rangle\,, \qquad s_3 = \langle\vec{a},\vec{d}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle$$

  je tak podmínka (ii) ze zadání úlohy ekvivalentní podmínce $s_1 = s_2 = s_3$. Vyjádřeme nyní pomocí skalárních součinů součty z podmínky (iii):

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 + |\vec{d}-\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle - 2\langle\vec{c},\vec{d}\rangle = 4r^2 - 2s_1\,,$$

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |\vec{c}-\vec{a}|^2 + |\vec{d}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle = 4r^2 - 2s_2\,,$$

$$|AD|^2 + |BC|^2 = |\vec{d}-\vec{a}|^2 + |\vec{c}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle = 4r^2 - 2s_3\,.$$

  Vidíme, že (iii) platí právě tehdy, když $s_1 = s_2 = s_3$, což je právě tehdy, když platí (ii).

- Nakonec ukážeme, že jsou ekvivalentní podmínky (ii) a (iv). Vyjádřeme druhé mocniny vzdáleností d_1, d_2, d_3 po řadě středů hran AB a CD, AC a BD, AD a BC:

$$d_1^2 = \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}\,) - \frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d}\,)\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}\,|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(4r^2 + 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle - 2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle - 2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle + 2\langle\vec{c},\vec{d}\rangle\Big) = r^2 + \frac{1}{2}(s_1 - s_2 - s_3)\,,$$

$$d_2^2 = \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}\,) - \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d}\,)\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\,|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(4r^2 - 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle + 2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle - 2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle + 2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle - 2\langle\vec{c},\vec{d}\rangle\Big) = r^2 + \frac{1}{2}(-s_1 + s_2 - s_3)\,,$$

$$d_3^2 = \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{d}\,) - \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}\,)\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}\,|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(4r^2 - 2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle - 2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle + 2\langle\vec{a},\vec{d}\rangle + 2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle - 2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle - 2\langle\vec{c},\vec{d}\rangle\Big) = r^2 + \frac{1}{2}(-s_1 - s_2 + s_3)\,.$$

  Rovnosti $d_1 = d_2 = d_3$ vyjadřující podmínku (iv) tedy nastanou právě tehdy, když budou splněny rovnosti

$$s_1 - s_2 - s_3 = -s_1 + s_2 - s_3 = -s_1 - s_2 + s_3\,,$$

  což je zřejmě ekvivalentní s rovnostmi $s_1 = s_2 = s_3$, neboli podmínkou (ii). □

Příklad 3.1.26: *Dokažte, že čtyři přímky, které procházejí těžišti stěn čtyřstěnu a jsou na příslušnou stěnu kolmé, procházejí jedním bodem právě tehdy, když procházejí jedním bodem čtyři přímky, na kterých leží tělesové výšky čtyřstěnu.*[29]

Řešení:
V libovolném čtyřstěnu $ABCD$ označme

$$T_A = \frac{1}{3}(B+C+D)\,, \quad T_B = \frac{1}{3}(A+C+D)\,, \quad T_C = \frac{1}{3}(A+B+D)\,, \quad T_D = \frac{1}{3}(A+B+C)$$

postupně těžiště stěn BCD, ACD, ABD, ABC.

- Předpokládejme, že existuje průsečík čtyř kolmic na stěny čtyřstěnu vedených jejich těžišti, označme ho P. Pak vektor $\overrightarrow{PT_A}$ je kolmý na stěnu BCD, $\overrightarrow{PT_B}$ je kolmý na ACD, $\overrightarrow{PT_C}$ je kolmý na ABD a $\overrightarrow{PT_D}$ je kolmý na ABC. Pro libovolný bod přímky v_A vedené z vrcholu A a kolmo ke stěně BCD pak platí

  $$v_A: \quad X = A + k(T_A - P) = \frac{1}{3}(3A + kB + kC + kD - 3kP)\,, \quad k \in \mathbf{R}\,,$$

  analogicky pak pro body na přímkách výšek v_B, v_C, v_D platí

  $$v_B: \quad X = B + l(T_B - P) = \frac{1}{3}(lA + 3B + lC + lD - 3lP)\,, \quad l \in \mathbf{R}\,,$$
  $$v_C: \quad X = C + m(T_C - P) = \frac{1}{3}(mA + mB + 3C + mD - 3mP)\,, \quad m \in \mathbf{R}\,,$$
  $$v_D: \quad X = D + n(T_D - P) = \frac{1}{3}(nA + nB + nC + 3D - 3nP)\,, \quad n \in \mathbf{R}\,.$$

  Vidíme, že pro $k = l = m = n = 3$ má bod X všech čtyř výšek stejné vyjádření, tento bod je tedy společným bodem všech čtyř přímek v_A, v_B, v_C, v_D.

- Předpokládejme naopak, že přímky všech čtyř výšek mají společný bod, a označme jej V. Pak vektor $\overrightarrow{AV}$ je kolmý na stěnu BCD, $\overrightarrow{BV}$ je kolmý na ACD, $\overrightarrow{CV}$ je kolmý na ABD, $\overrightarrow{DV}$ je kolmý na ABC. Pro libovolné body Y kolmic p_A, p_B, p_C, p_D ke stěnám BCD, ACD, ABD, ABC procházejících jejich těžišti T_A, T_B, T_C, T_D platí:

  $$p_A: \quad Y = T_A + \alpha(A - V) = \frac{1}{3}(3\alpha A + B + C + D - 3\alpha V)\,, \quad \alpha \in \mathbf{R}\,,$$
  $$p_B: \quad Y = T_B + \beta(B - V) = \frac{1}{3}(A + 3\beta B + C + D - 3\beta V)\,, \quad \beta \in \mathbf{R}\,,$$
  $$p_C: \quad Y = T_C + \gamma(C - V) = \frac{1}{3}(A + B + 3\gamma C + D - 3\gamma V)\,, \quad \gamma \in \mathbf{R}\,,$$
  $$p_D: \quad Y = T_D + \delta(D - V) = \frac{1}{3}(A + B + C + 3\delta D - 3\delta V)\,, \quad \delta \in \mathbf{R}\,.$$

  Pro $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{3}$ dostáváme, že příslušný bod Y je společným bodem těchto čtyř kolmic. □

[29] [gel–07], str. 206, úloha 586. O čtyřstěnech, jejichž tělesové výšky procházejí jedním bodem, jsme pojednali v Příkladu 3.1.25.

Poznámka:
Geometrický důkaz uvedené ekvivalence lze podat úvahou o těžišti T daného čtyřstěnu $ABCD$, který má podle Příkladu 2.1.6 vyjádření

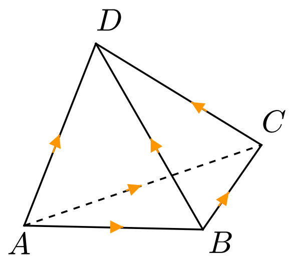
$$T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$$

a splňuje vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{TT_A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{TA}\,, \qquad \overrightarrow{TT_B} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{TB}\,, \qquad \overrightarrow{TT_C} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{TC}\,, \qquad \overrightarrow{TT_D} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{TD}\,.$$

Z nich plyne, že obrazem uvažované čtveřice přímek v_A, v_B, v_C, v_D ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{3}$ je právě čtveřice přímek p_A, p_B, p_C, p_D. Proto přímky jedné čtveřice mají společný bod, právě když ho mají přímky druhé čtveřice.

Příklad 3.1.27: *Dokažte, že v každém čtyřstěnu, ve kterém protilehlé hrany svírají tři úhly téže velikosti, jsou tyto úhly pravé. Jsou-li navíc každé dvě jeho protilehlé hrany stejně dlouhé, je takový čtyřstěn pravidelný, zdůvodněte.*[30]



Řešení:
Postup založíme na tvrzení, které nejprve samostatně zformulujeme a dokážeme.

Lemma: Pro libovolné body K, L, M, N v prostoru, které neleží v jedné rovině, platí nerovnost

$$|KM| \cdot |LN| < |KL| \cdot |MN| + |LM| \cdot |KN|\,.$$

Důkaz:
Označme K_1, L_1, M_1, N_1 kolmé průměty bodů K, L, M, N do roviny ϱ zvolené tak, aby byla rovnoběžná s (dle předpokladu mimoběžnými) přímkami KM a LN. Potom platí

$$|KM| = |K_1M_1|\,, \qquad |LN| = |L_1N_1|\,, \qquad |KL| > |K_1L_1|\,,$$

$$|KN| > |K_1N_1|\,, \qquad |LM| > |L_1M_1|\,, \qquad |MN| > |M_1N_1|\,,$$

neboť ze zadání plyne, že přímky KL, KN, LM a MN jsou s rovinou ϱ různoběžné. Dokazovaná nerovnost tak plyne ze známé Ptolemaiovy nerovnosti (viz např. [lei–06]), podle níž pro libovolné komplanární body K_1, L_1, M_1, N_1 platí

$$|K_1M_1| \cdot |L_1N_1| \le |K_1L_1| \cdot |M_1N_1| + |L_1M_1| \cdot |K_1N_1|\,. \qquad \diamond$$

[30] [neg–05], str. 14, úloha 31; [bech–04], str. 58, úloha 2.

Nyní se vrátíme k řešení původní úlohy. V uvažovaném čtyřstěnu $ABCD$ označme α shodný úhel mezi jeho protilehlými hranami. Podle tvrzení z Příkladu 3.1.4 pro obecnou čtveřici bodů A, B, C, D platí

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0\,,$$

odkud v našem případě po dosazení za skalární součiny dostáváme

$$\cos\alpha\,(\pm|AB|\cdot|CD| \pm |AC|\cdot|BD| \pm |AD|\cdot|BC|) = 0\,.$$

Je-li $\cos\alpha = 0$, znamená to, že $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$, jak jsme měli dokázat. Připusťme, že $\cos\alpha \neq 0$, pak

$$\pm|AB|\cdot|CD| \pm |AC|\cdot|BD| \pm |AD|\cdot|BC| = 0\,,$$

tedy jeden z kladných součinů $|AB|\cdot|CD|$, $|AC|\cdot|BD|$, $|AD|\cdot|BC|$ je roven součtu dalších dvou. Existuje proto pořadí K, L, M, N bodů A, B, C, D, při kterém platí

$$|KL|\cdot|MN| = |KM|\cdot|LN| + |KN|\cdot|LM|\,,$$

což je v rozporu s Lemmatem. Možnost $\cos\alpha \neq 0$ je tak vyloučena a první tvrzení příkladu je tím dokázáno.

V druhé části řešení budeme předpokládat, že úsečky v každém z již dokázaných vztahů $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$ mají stejné délky. Předně využijeme prvního důsledku z Poznámky za řešením Příkladu 3.1.3, podle kterého z $AC \perp BD$ plyne

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2\,,$$

analogicky pak

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2\,, \qquad |AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2\,.$$

S využitím předpokládaných rovností $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$ a $|AC| = |BD|$ odtud dostáváme $|AB| = |AC| = |AD|$, čili velikosti všech šesti hran se rovnají a $ABCD$ je pravidelný čtyřstěn. □

3.2 Další řešené úlohy

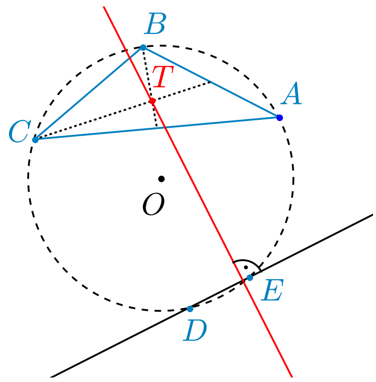
Kolmost součtu a rozdílu dvou vektorů

V řešení úloh tohoto paragrafu budeme využívat ekvivalenci (3.1)

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$$

dokázanou v Příkladu 3.1.2. Geometrický význam této ekvivalence je, že úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé. Tato ekvivalence byla využita již v předchozí části této kapitoly v příkladech 3.1.12, 3.1.16, 3.1.24, 3.1.25. Dále bude využita v řešení náročnějších úloh 3.2.28, 3.2.46, 3.2.70, 3.2.74, 3.2.75, zařazených do jiných paragrafů.

Úloha 3.2.1: *Na kružnici je dáno pět různých bodů. Každé tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku, jehož těžištěm vedeme přímku kolmou na tětivu spojující zbylé dva dané body. Takto dostaneme celkem 10 přímek; dokažte, že všechny procházejí jedním bodem.*[31]



Řešení:
Dané body na kružnici se středem O označme A, B, C, D, E a uvažme jednu z 10 popsaných přímek, která prochází těžištěm T trojúhelníku ABC kolmo na přímku DE. Těžiště T je určeno polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) ,$$

z rovnosti $|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OE}|$ podle (3.1) plyne, že vektor $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{DE}$, takže je směrovým vektorem uvažované přímky. Ta je proto tvořena body X, pro které platí

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TX} = \overrightarrow{OT} + t\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) + t\left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right) , \quad t \in \mathbf{R} .$$

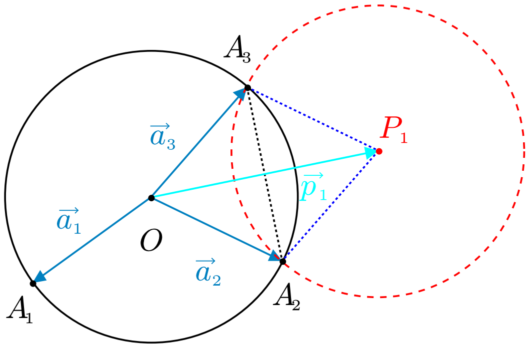
Zvolíme-li $t = \frac{1}{3}$, dostaneme bod X s polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}\right) ,$$

jehož vyjádření nezáleží na pořadí bodů A, B, C, D, E. Takový bod X proto leží na všech deseti uvažovaných přímkách, neboť nezáleží na tom, který z deseti trojúhelníků s vrcholy v množině $\{A, B, C, D, E\}$ vybereme. $\square$

Úloha 3.2.2: *Nechť O je střed jednotkové kružnice procházející body A_1, A_2 a A_3, dále nechť P_1 je střed druhé z obou jednotkových kružnic, které procházejí body A_2, A_3. Středy P_2 a P_3 jsou definovány podobně. Dokažte, že body P_1, P_2 a P_3 leží na jednotkové kružnici, jejíž střed označíme Q_4. Nyní přidejme čtvrtý bod A_4 na původní kružnici a zopakujme celý výše uvedený postup s každou skupinou tří bodů z A_1, A_2, A_3, A_4. Tak dostaneme čtyři kružnice se středy Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Dokažte, že body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 leží na jednotkové kružnici a najděte její střed v závislosti na bodech A_1, A_2, A_3, A_4.*[32]

[31] Na námět školitele, který původ výsledku nezná.
[32] [gar–05], str. 220, úloha 5.



Řešení:
Označme vektory $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{a}_3 = \overrightarrow{OA_3}$. Druhá jednotková kružnice procházející body A_2, A_3 je kružnice, jejíž střed je souměrně sdružený se středem O původní kružnice podle osy A_2A_3, a tedy pro vektor $\vec{p}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ z kosočtverce $OA_2P_1A_3$ plyne podle pravidla (3.1)

$$\vec{p}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3\,,$$

analogicky pro vektory $\vec{p}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ a $\vec{p}_3 = \overrightarrow{OP_3}$ platí

$$\vec{p}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3\,, \qquad \vec{p}_3 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2\,.$$

Ověřme, že střed Q_4 jednotkové kružnice procházející body P_1, P_2, P_3 (jejíž existenci máme dokázat) je určený vektorem $\overrightarrow{OQ_4} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Pro takový bod Q_4 z předchozích rovností plyne $\overrightarrow{P_1Q_4} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{P_2Q_4} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{P_3Q_4} = \vec{a}_3$, tudíž body P_1, P_2 a P_3 skutečně leží na kružnici se středem Q_4 o poloměru $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = 1$.

Analogicky najdeme středy Q_1, Q_2, Q_3 určené rovnostmi:

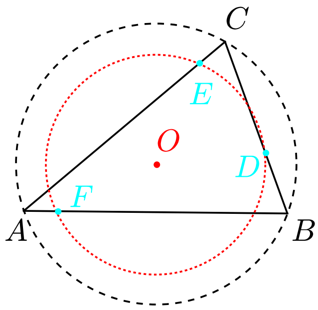
$$\overrightarrow{OQ_1} = \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4\,, \qquad \overrightarrow{OQ_2} = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4\,, \qquad \overrightarrow{OQ_3} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_4\,.$$

Definujeme-li nyní bod X polohovým vektorem $\overrightarrow{OX} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$, pak $\overrightarrow{XQ_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{XQ_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{XQ_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{XQ_4} = \vec{a}_4$. Body Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 tedy leží na kružnici se středem X a poloměrem $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = |\vec{a}_4| = 1$. □

Úloha 3.2.3: *Uvnitř stran BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body D, E, F. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC a DEF jsou soustředné právě tehdy, když platí*[33]

$$|DB| \cdot |DC| = |EC| \cdot |EA| = |FA| \cdot |FB|\,. \tag{3.14}$$

[33] Vlastní námět.



Řešení:
Nejprve dokážeme pomocné tvrzení.

Lemma: Pro libovolný bod X přímky AB platí

$$\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle = |OX|^2 - r^2 \,, \tag{3.15}$$

má-li daný bod O od obou různých bodů A, B stejnou vzdálenost r.

Důkaz:
Z rovnosti $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = r$ podle (3.1) vyplývá $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, neboli $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Pro skalární součin vektorů $\overrightarrow{AX}$, $\overrightarrow{BX}$ s libovolným koncovým bodem X úpravou dostáváme:

$$\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle = \langle \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OB} \rangle = |OX|^2 - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \rangle + \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle =$$

$$= |OX|^2 - \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \rangle + \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \rangle - \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle =$$

$$= |OX|^2 + \langle \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \rangle - r^2 = |OX|^2 - r^2 + \langle \overrightarrow{XA}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \rangle \,.$$

Předpokládáme-li, že bod X leží na přímce AB, je vektor $\overrightarrow{XA}$ rovnoběžný s vektorem $\overrightarrow{BA}$, který je kolmý na vektor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, odtud plyne, že taky $\overrightarrow{XA} \perp \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Skalární součin v poslední rovnosti je tedy nulový a dostáváme tak dokazovanou rovnost (3.15). ⋄

Nyní se vraťme k řešení úlohy. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a r její poloměr. Pak pro bod D na úsečce BC (a podobně pro body E, F na úsečkách CA, AB) podle předchozího Lemmatu pro skalární součin dvou nesouhlasně rovnoběžných vektorů platí:

$$-|DB| \cdot |DC| = \langle \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD} \rangle = |OD|^2 - r^2 \,,$$

$$-|EA| \cdot |EC| = \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE} \rangle = |OE|^2 - r^2 \,,$$

$$-|FA| \cdot |FB| = \langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BF} \rangle = |OF|^2 - r^2 \,.$$

Odtud již vidíme, že rovnosti (3.14) platí právě tehdy, když $|OD|^2 = |OE|^2 = |OF|^2$, neboli když O je střed kružnice opsané trojúhelníku DEF. □

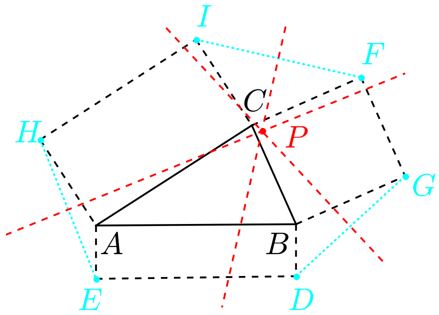
Poznámka:
Naším Lemmatem jsme vlastně dokázali tvrzení o *mocnosti bodu ke kružnici*: Vedeme-li daným bodem X libovolnou přímku, která protne danou kružnici $k(O,r)$ v bodech A, B, pak hodnota skalárního součinu $\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle$ je pro všechny takové přímky stejná:

$$\langle \overrightarrow{AX}, \overrightarrow{BX} \rangle = |OX|^2 - r^2 \,.$$

Důkazy incidence přímek

Netriviální situace, kdy dané přímky (v počtu větším než 2) procházejí jedním bodem, jsme zkoumali již v Kapitole 2 věnované afinním vztahům. Nyní se budeme zabývat touto problematikou v případě, kdy jsou přímky zadané jako různé kolmice, osy úseček apod. Mimo úlohy uvedené v tomto paragrafu byla incidence přímek v této kapitole náplní již dříve uvedených příkladů 3.1.12, 3.1.15, 3.1.16, 3.1.18, 3.1.24 a úlohy 3.2.1.

Úloha 3.2.4: *Vně nad stranami trojúhelníku ABC jsou sestrojeny libovolné (třeba i navzájem ne podobné) pravoúhelníky $ABDE$, $BCFG$, $CAHI$. Ukažte, že osy úseček HE, DG a FI procházejí jedním bodem.*[34]



Řešení:
Nechť P je průsečík os úseček DG a HE. Ukážeme, že pak bod P leží i na ose úsečky FI. K tomu použijeme výsledku Příkladu 3.1.10 na bod P a jednotlivé pravoúhelníky:

$$|PB|^2 + |PE|^2 = |PA|^2 + |PD|^2 \,, \qquad |PA|^2 + |PI|^2 = |PC|^2 + |PH|^2 \,,$$

$$|PC|^2 + |PG|^2 = |PB|^2 + |PF|^2 \,.$$

Protože bod P leží na ose úsečky DG, platí rovnost $|PD|^2 = |PG|^2$. Analogicky platí rovnost $|PH|^2 = |PE|^2$. Odtud plyne, že výsledek sečtení tří výše uvedených rovností lze zjednodušit do tvaru

$$|PI|^2 = |PF|^2 \,,$$

což však znamená, že bod P leží i na ose třetí úsečky IF. □

[34] [eng–97], str. 298, úloha 3.

Úloha 3.2.5: *V rovině jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ takové, že kolmice z bodů A, B, C po řadě na přímky $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ se protínají v jednom bodě. Ukažte, že rovněž kolmice vedené z bodů A', B', C' po řadě na přímky BC, AC, AB se protínají v jednom bodě.*[35]

Řešení:
Označme P průsečík kolmic vedených z bodů A, B, C na přímky $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$. Dále označme P' průsečík kolmic vedených z bodů A', B' na přímky BC, AC. Ukážeme, že skalární součin vektorů $\overrightarrow{P'C'}$ a $\overrightarrow{AB}$ je roven nule. K důkazu využijeme toho, že jsou-li dva libovolné vektory $\overrightarrow{XY}$ a $\overrightarrow{ZW}$ navzájem kolmé, pak pro libovolný bod K platí

$$0 = \left\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{ZW} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{KX} - \overrightarrow{KY}, \overrightarrow{ZW} \right\rangle, \qquad \text{odtud} \qquad \left\langle \overrightarrow{KX}, \overrightarrow{ZW} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{KY}, \overrightarrow{ZW} \right\rangle.$$

Pětinásobným užitím tohoto poznatku, a to postupně k dvojicím vektorů a bodu $\overrightarrow{A'C'} \perp \overrightarrow{PB}$ a P', $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{P'A'}$ a P, $\overrightarrow{A'B'} \perp \overrightarrow{PC}$ a P', $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{P'B'}$ a P, $\overrightarrow{B'C'} \perp \overrightarrow{PA}$ a P', dostáváme

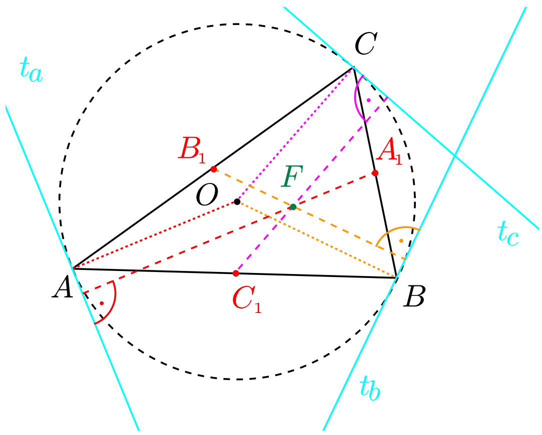
$$\left\langle \overrightarrow{P'C'}, \overrightarrow{PB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'A'}, \overrightarrow{PB} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'A'}, \overrightarrow{PC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{PC} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{PA} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'C'}, \overrightarrow{PA} \right\rangle,$$

což znamená, že

$$\left\langle \overrightarrow{P'C'}, \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{P'C'}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že bod P' leží na kolmici k přímce AB vedené bodem C' (ať je vektor $\overrightarrow{P'C'}$ nulový či nikoliv), což jsme potřebovali dokázat. □

Úloha 3.2.6: *Ke kružnici opsané danému trojúhelníku sestrojme tečny v jeho vrcholech. Ke každé z nich veďme kolmici středem strany protilehlé k vrcholu, kterým tečna prochází. Dokažte, že tyto tři kolmice se protínají v jednom bodě.*[36]



Řešení:
Označme A, B, C vrcholy daného trojúhelníku,

$$A_1 = \frac{1}{2}(B+C), \qquad B_1 = \frac{1}{2}(B+C), \qquad C_1 = \frac{1}{2}(B+C)$$

[35] [gel–07], str. 204.
[36] [kin–04], str.1–2,4; příklad 4, [hon–01], str. 241–242.

středy protilehlých stran a p_a, p_b, p_c kolmice vedené po řadě body A_1, B_1, C_1 k tečnám t_a, t_b, t_c kružnice opsané s body dotyku A, B, C. Její střed označíme O a uvážíme polohové vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Protože vektor $\vec{a}$ je směrový vektor přímky p_a, je tato přímka tvořená body X pro které platí

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1X} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + p\vec{a}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Podobně pro libovolný bod Y přímky p_b a libovolný bod Z přímky p_c můžeme psát

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1Y} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) + q\vec{b}, \quad q \in \mathbf{R},$$

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{C_1Z} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + r\vec{c}, \quad r \in \mathbf{R}.$$

Zvolíme-li za parametry čísla $p = q = r = \frac{1}{2}$, dostaneme stejný bod F určený polohovým vektorem

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}),$$

což mimochodem je (podle Poznámky 2 za Úlohou 3.1.20) střed Feuerbachovy kružnice trojúhelníku ABC. Tímto bodem F proto procházejí všechny tři kolmice p_a, p_b, p_c. □

Úloha 3.2.7: *Nechť O je střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Uvažujme její průměry AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Nechť A_0, B_0, C_0, D_0 jsou postupně těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC. Ukažte, že přímky A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 se protínají v jednom bodě.*[37]

ŘEŠENÍ:
Podle zadání AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jsou průměry kulové plochy, takže bod O je jejich střed, odkud plynou vyjádření

$$A_1 = 2O - A, \qquad B_1 = 2O - B, \qquad C_1 = 2O - C, \qquad D_1 = 2O - D.$$

Těžiště A_0, B_0, C_0, D_0 trojúhelníků ze zadání jsou určena rovnostmi

$$A_0 = \frac{1}{3}(B + C + D), \quad B_0 = \frac{1}{3}(A + C + D), \quad C_0 = \frac{1}{3}(A + B + D), \quad D_0 = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Nechť T je těžiště celého čtyřstěnu, tedy $T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$. Uvažujme dále bod E určený rovností $\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OT}$. Ukážeme, že bod E je průsečík přímek A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1. Vyjádřeme například vektor $\overrightarrow{A_1A_0}$:

$$\overrightarrow{A_1A_0} = \frac{1}{3}(B + C + D) - (2O - A) = \frac{1}{3}(B + C + D - 6O + 3A) =$$

$$= \frac{1}{3}(A + B + C + D - 4O + 2A - 2O) = \frac{4}{3}\overrightarrow{OT} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1E}.$$

[37] [tho–07], str. 28, úloha G-1998-2.

Z určeného vztahu mezi vektory $\overrightarrow{A_1A_0}$, $\overrightarrow{A_1E}$ již plyne, že bod E leží na přímce A_1A_0. Analogicky by se ukázalo, že bod E leží také na přímkách B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1. Tím je tvrzení úlohy dokázáno, navíc se ukázalo, že zkoumaný průsečík E určený polohovým vektorem

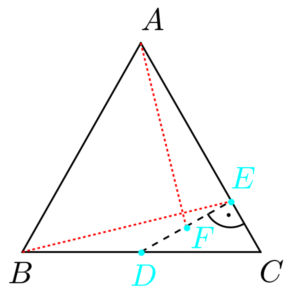
$$\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$$

je Mongeovým bodem čtyřstěnu $ABCD$, o kterém jsme pojednali v Příkladu 3.1.24. □

Ověřování kolmosti

Ověřování kolmosti dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ pomocí rovnosti $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ z Definice 1.2.4 je jednou z nejobvyklejších aplikací skalárního součinu při řešení geometrických úloh. Vezmeme-li přitom za vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ směrové vektory přímek nebo normálové vektory rovin v prostoru, dostaneme prostředek k dokazování vzájemné kolmosti dvou přímek, resp. dvou rovin. Připomeňme, že zřejmým způsobem rozšiřujeme relaci kolmosti také na polopřímky a úsečky: Dva útvary tohoto druhu jsou navzájem kolmé, jsou-li navzájem kolmé přímky, na kterých tyto útvary leží.

Úloha 3.2.8: *V rovnoramenném trojúhelníku ABC označme D střed základny BC, E patu kolmice vedené z bodu D na stranu AC a F střed úsečky DE. Dokažte, že úsečky AF a BE jsou navzájem kolmé.*[38]



Řešení:
Máme-li v řeči vektorů dokázat, že $AF \perp BE$, znamená to ukázat, že skalární součin $\langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE} \rangle$ je nulový. Upravme nejprve tento skalární součin takto:

$$\langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE} \rangle = \langle \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} \rangle = \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD} \rangle + \langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE} \rangle + \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD} \rangle + \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DE} \rangle .$$

Vektor $\overrightarrow{DE}$ je však podle zadání kolmý na vektor $\overrightarrow{AC}$, tedy i na vektor $\overrightarrow{AE}$, což znamená, že $\langle \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE} \rangle = 0$. Spolu s rovností $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ odtud dostaneme

$$\langle \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE} \rangle = \langle \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BD} \rangle + \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD} \rangle + \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DE} \rangle$$

[38] [lar–90], str. 387–388, úloha 8.3.6.

Protože v rovnoramenném trojúhelníku ABC je bod D střed základny BC, je vektor $\overrightarrow{AD}$ kolmý na vektor $\overrightarrow{BC}$ a tedy i na $\overrightarrow{BD}$, odtud $\langle\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}\rangle = 0$. Proto lze vyjádření skalárního součinu upravit do tvaru

$$\langle\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}\rangle = \langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BD}\rangle + \langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD}\rangle + \langle\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DE}\rangle$$

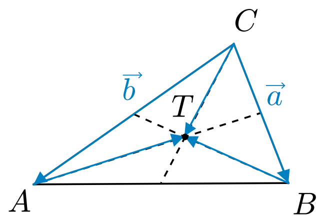
a k další úpravě využít toho, že $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$ a konečně $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{EC}$:

$$\langle\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BE}\rangle = \langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\rangle - \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\rangle - \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DE}\rangle = \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}\rangle - \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DE}\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DE}\rangle = \frac{1}{2}\langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EC}\rangle = 0\,.$$

□

Úloha 3.2.9: *Pro těžiště T libovolného trojúhelníku ABC platí: $AT \perp BT \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$, kde a, b, c jsou obvykle značené délky jeho stran. Dokažte.*[39]



Řešení:
Označme jako na obrázku vektory $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ a $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, pak

$$\overrightarrow{CT} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})\,, \quad \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b})\,, \quad \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}(\vec{b} - 2\vec{a})\,.$$

Proto je kolmost vektorů $AT \perp BT$ ekvivalentní podmínce

$$\langle\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} - 2\vec{a}\rangle = 0\,,$$

na kterou budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle - 2|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + 4\langle\vec{b}, \vec{a}\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2\,.$$

Nyní využijeme toho, že $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ a odtud $2\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2$. Po dosazení dostáváme další ekvivalentní vztahy

$$5|\vec{a}|^2 + 5|\vec{b}|^2 - 5|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2\,,$$

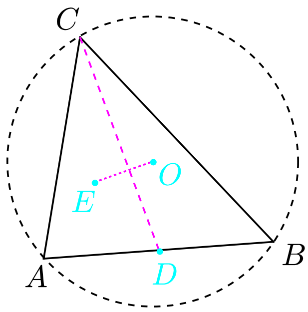
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 5|\vec{a} - \vec{b}|^2\,,$$

což je pravá strana dokazované ekvivalence. □

[39] [eng–97], str. 293, úloha E8.

Úloha 3.2.10: *Buďte O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, D střed strany AB a E těžiště trojúhelníku ADC. Dokažte ekvivalenci*[40]

$$CD \perp OE \Leftrightarrow |AB| = |AC|\,.$$



Řešení:
Označme $r = |OA| = |OB| = |OC|$. Pro střed D strany AB a těžiště E trojúhelníku ACD platí:

$$D = \frac{1}{2}(A+B)\,, \qquad E = \frac{1}{3}(A+C+D) = \frac{1}{3}\left(A+C+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{2}A+\frac{1}{6}B+\frac{1}{3}C\,.$$

Obě strany ekvivalence ze zadání úlohy teď ekvivalentně upravíme.

Pro vztah z levé strany platí ekvivalence

$$\begin{gathered} CD \perp OE \quad\Leftrightarrow\quad \langle D-C, E-O\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad \left\langle \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-C, \frac{1}{2}A+\frac{1}{6}B+\frac{1}{3}C-O\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad \langle A+B-2C, 3A+B+2C-6O\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad \langle (A-O)+(B-O)-2(C-O), 3(A-O)+(B-O)+2(C-O)\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad (3+1-4)r^2 + 4\langle A-O, B-O\rangle - 4\langle A-O, C-O\rangle + 0\langle B-O, C-O\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad -4\langle A-O, C-O\rangle + 4\langle A-O, B-O\rangle = 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad \left\langle \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CB}\right\rangle = 0\,. \end{gathered}$$

Pro vztah z pravé strany dostáváme ekvivalence

$$\begin{gathered} |AB| = |AC| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right|^2 = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad r^2+r^2+2\left\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}\right\rangle - r^2 - r^2 - 2\left\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right\rangle = 0 \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad \left\langle\overrightarrow{AO},\overrightarrow{CB}\right\rangle = 0\,. \end{gathered}$$

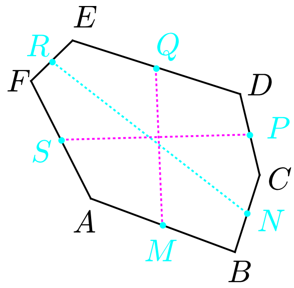
Obě strany ekvivalence jsou tedy ekvivalentní podmínce $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CB}$, která je splněna právě tehdy, když bod A leží na ose strany BC, neboli $|AB| = |AC|$. □

[40] [eng–97], str. 299, úloha 26.

Úloha 3.2.11: *V šestiúhelníku $ABCDEF$ označme M, N, P, Q, R, S po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dokažte, že rovnost*

$$|RN|^2 = |MQ|^2 + |PS|^2 \tag{3.16}$$

nastane, právě když $MQ \perp PS$.[41]



Řešení:
Pro středy M, N, P, Q, R, S stran šestiúhelníku $ABCDEF$ platí rovnosti

$$M = \frac{1}{2}(A+B)\,, \qquad N = \frac{1}{2}(B+C)\,, \qquad P = \frac{1}{2}(C+D)\,,$$

$$Q = \frac{1}{2}(D+E)\,, \qquad R = \frac{1}{2}(E+F)\,, \qquad S = \frac{1}{2}(F+A)\,.$$

V rovnosti (3.16) ze zadání úlohy přejdeme od délek úseček k velikostem vektorů, dosadíme předchozí vyjádření středů jednotlivých stran a na získanou rovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$|\overrightarrow{RN}|^2 = |\overrightarrow{MQ}|^2 + |\overrightarrow{PS}|^2\,,$$

$$\frac{1}{4}|B+C-E-F|^2 = \frac{1}{4}|D+E-A-B|^2 + \frac{1}{4}|F+A-C-D|^2\,,$$

$$|-\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BE}|^2 = |\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|^2 + |-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}|^2\,,$$

$$|\overrightarrow{CF}|^2 + |\overrightarrow{BE}|^2 + 2\langle\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}\rangle = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BE}|^2 + 2\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}\rangle + |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{CF}|^2 - 2\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CF}\rangle\,,$$

$$2|\overrightarrow{AD}|^2 + 2\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}\rangle - 2\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CF}\rangle - 2\langle\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}\rangle = 0\,,$$

$$\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\rangle - \langle\overrightarrow{CF},\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\rangle = 0\,,$$

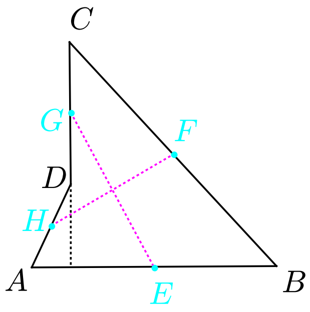
$$\langle\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CF},\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\rangle = 0\,.$$

Protože $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CF} = D-A-F+C = 2(P-S)$ a $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE} = D-A+E-B = 2(Q-M)$, je poslední podmínka ekvivalentní s rovností $\langle\overrightarrow{PS},\overrightarrow{MQ}\rangle = 0$, neboli $MQ \perp PS$. $\square$

[41] [and–06], str. 92, úloha 2.

Úloha 3.2.12: *Označme E, F, G, H po řadě středy stran daného čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou navzájem kolmé právě tehdy, když platí*[42]

$$|AD|^2 + |BC|^2 = 2|EG|^2 + 2|FH|^2 \tag{3.17}$$



Řešení:
Zaveďme polohové vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Pro polohové vektory středů E, F, G, H stran čtyřúhelníku $ABCD$ pak platí rovnosti

$$\vec{e} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})\,, \qquad \vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\,, \qquad \vec{g} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})\,, \qquad \vec{h} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})\,.$$

V rovnosti (3.17) ze zadání úlohy přejdeme od délek úseček k velikostem vektorů, dosadíme polohové vektory stran a předchozí vyjádření středů jednotlivých stran. Na dotyčnou rovnost pak budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$\left|\vec{d} - \vec{a}\right|^2 + \left|\vec{c} - \vec{b}\right|^2 = 2|\vec{g} - \vec{e}|^2 + 2|\vec{h} - \vec{f}|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{d} - \vec{a}\right|^2 + \left|\vec{c} - \vec{b}\right|^2 = \frac{1}{2}|\vec{c} + \vec{d} - \vec{a} - \vec{b}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{d} + \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2(|\vec{d}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{d}\rangle + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle) =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle - 2\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - 2\langle\vec{a}, \vec{d}\rangle - 2\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle - 2\langle\vec{b}, \vec{d}\rangle + 2\langle\vec{c}, \vec{d}\rangle +$$

$$+|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle - 2\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + 2\langle\vec{a}, \vec{d}\rangle + 2\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle - 2\langle\vec{b}, \vec{d}\rangle - 2\langle\vec{c}, \vec{d}\rangle \Leftrightarrow$$

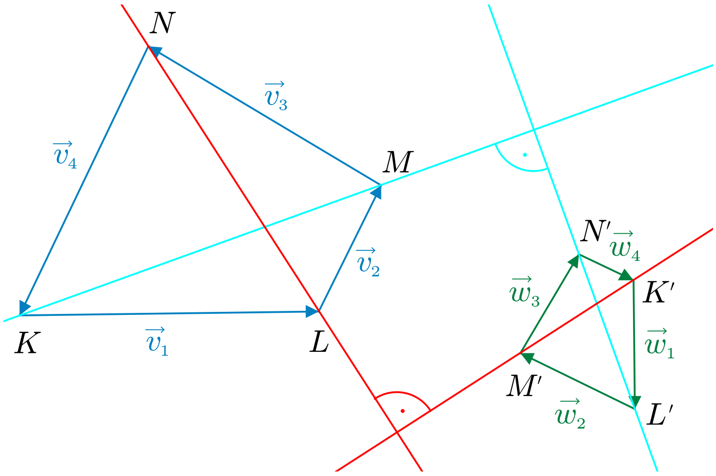
$$-4\langle\vec{a}, \vec{d}\rangle - 4\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle = -4\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - 4\langle\vec{b}, \vec{d}\rangle \quad \Leftrightarrow$$

$$\langle\vec{a}, \vec{d} - \vec{c}\rangle + \langle\vec{b}, \vec{c} - \vec{d}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \qquad \langle\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{d}\rangle = 0\,.$$

Protože $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{DC}$, poslední rovnost je ekvivalentní s tím, že úsečky AB a CD jsou navzájem kolmé. □

[42] [and–06], str. 94, úloha 6.

Úloha 3.2.13: *Nechť $KLMN$ a $K'L'M'N'$ jsou dva čtyřúhelníky, pro jejichž strany platí vztahy $KL \perp K'L'$, $LM \perp L'M'$, $MN \perp M'N'$, $NK \perp N'K'$. Platí-li navíc $KM \perp L'N'$, pak také platí $LN \perp K'M'$. Dokažte.*[43]



Řešení:
Označíme následující vektory $\vec{v}_1 = \overrightarrow{KL}$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{LM}$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{MN}$, $\vec{v}_4 = \overrightarrow{NK}$ a $\vec{w}_1 = \overrightarrow{K'L'}$, $\vec{w}_2 = \overrightarrow{L'M'}$, $\vec{w}_3 = \overrightarrow{M'N'}$, $\vec{w}_4 = \overrightarrow{N'K'}$. Tyto čtveřice vektorů tvoří orientované strany dvou čtyřúhelníků, platí tedy

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{o}\,, \qquad \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 + \vec{w}_4 = \vec{o}\,. \tag{3.18}$$

Ze zadaných podmínek vzájemné kolmosti pro odpovídající skalární součiny plyne

$$\langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}_3, \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_4, \vec{w}_4 \rangle = 0\,, \tag{3.19}$$

$$\langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \rangle = 0\,. \tag{3.20}$$

Naší úlohou je dokázat, že rovněž platí

$$\langle \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = 0\,. \tag{3.21}$$

Rovnost (3.20) upravíme roznásobením a poté užitím vztahů (3.18) a (3.19). Postupně dostaneme

$$0 = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle + \langle \vec{v}_1, \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_2 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle =$$
$$= \langle \vec{v}_1, \vec{w}_2 \rangle + \langle \vec{v}_1, \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle = -\langle \vec{v}_1, \vec{w}_1 + \vec{w}_4 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle = -\langle \vec{v}_1, \vec{w}_4 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle\,,$$

odtud pak

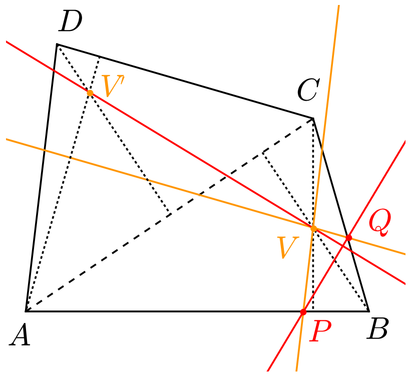
$$\langle \vec{v}_1, \vec{w}_4 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle\,. \tag{3.22}$$

Podobně budeme upravovat levou stranu dokazované rovnosti (3.21), když po užití (3.18) a roznásobení uplatníme (3.19) a nakonec ještě (3.22):

$$\langle \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \langle -\vec{v}_1 - \vec{v}_4, -\vec{w}_3 - \vec{w}_4 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_1, \vec{w}_4 \rangle + \langle \vec{v}_4, \vec{w}_3 \rangle =$$
$$= \langle \vec{v}_1, \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w}_3 \rangle + \langle \vec{v}_4, \vec{w}_3 \rangle = \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4, \vec{w}_3 \rangle = -\langle \vec{v}_3, \vec{w}_3 \rangle = 0\,. \qquad \square$$

[43] [gel–07], str. 206, Lemma k úloze 585.

Úloha 3.2.14: *Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. Předpokládejme, že přímky rovnoběžné s AD a CD procházející ortocentrem V trojúhelníku ABC protnou strany AB a BC po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že kolmice vedená z bodu V na přímku PQ prochází ortocentrem V' trojúhelníku ACD.*[44]



Řešení:
Pro strany čtyřúhelníků $AVCV'$ a $QBPV$ platí $AV \perp QB$, $VC \perp BP$, $CV' \perp PV$ (protože $CV' \perp AD$ a $PV \parallel AD$), $V'A \perp VQ$ (protože $V'A \perp CD$ a $VQ \parallel CD$), navíc i pro jednu dvojici úhlopříček máme $AC \perp BV$. Tvrzení úlohy $VV' \perp PQ$ o druhé dvojici úhlopříček proto plyne z výsledku Úlohy 3.2.13. □

Úloha 3.2.15: *Dokažte, že každé dvě protilehlé strany nerovinného čtyřúhelníku jsou shodné právě tehdy, když přímka spojující středy obou jeho úhlopříček je na tyto úhlopříčky kolmá.*[45]

Řešení:
Daný čtyřúhelník označme $ABCD$, středy úhlopříček pak jsou $\frac{1}{2}(A+C)$ a $\frac{1}{2}(B+D)$. Ekvivalenci, kterou máme dokázat, přepíšeme do tvaru

$$(|AB|^2 = |CD|^2) \wedge (|BC|^2 = |AD|^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\langle \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(B+D), C-A \right\rangle = 0 \quad \wedge \quad \left\langle \frac{1}{2}(A+C) - \frac{1}{2}(B+D), D-B \right\rangle = 0\,,$$

který přehledněji zapíšeme jako (3.23) ∧ (3.24) ⇔ (3.25) ∧ (3.26), kde

$$|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{CD}|^2 = 0\,, \tag{3.23}$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2 = 0\,, \tag{3.24}$$

$$\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0\,, \tag{3.25}$$

$$\langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BD} \rangle = 0\,. \tag{3.26}$$

Ekvivalenci dokážeme postupně jako dvě implikace.

[44] [gel–07], str. 206, úloha 585.
[45] [eng–97], str. 299, úloha 14; [lar–90], str. 388–390, úloha 8.3.8, v ní je jen jedna implikace.

- " $\Rightarrow$ "
  Vyjdeme z rovností (3.23) a (3.24), jejichž sečtením a dalšími úpravami dostaneme:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\left|\overrightarrow{DB}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}\right\rangle + 2\left\langle\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\right\rangle = 0\,.$$

  To je rovnost (3.26). Nyní rovnosti (3.23) a (3.24) odečteme:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 - \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right|^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right\rangle + 2\left\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\right\rangle = 0\,.$$

  To je rovnost (3.25). První implikace je dokázána.
- " $\Leftarrow$ "
  Vyjdeme z rovností (3.25) a (3.26), jejichž sečtením dostaneme:

$$\left\langle\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0$$

  To je rovnost (3.24). Nyní rovnosti (3.25) a (3.26) odečteme:

$$\left\langle\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = 0$$

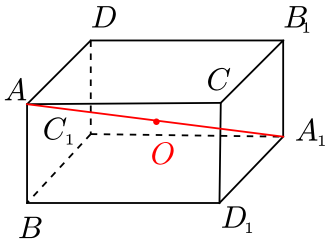
  To je rovnost (3.23). Tím je druhá implikace dokázána. □

Úloha 3.2.16: *Uvažujme všechny čtyřstěny $ABCD$ vepsané do dané kulové plochy. Ukažte, že součet*

$$S = |AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 - |BC|^2 - |CD|^2 - |DB|^2$$

má minimální hodnotu právě tehdy, když všechny úhly mezi hranami dotyčného čtyřstěnu u jeho vrcholu A jsou pravé.[46]

[46] [tho–07], str. 25, úloha G-1993-4.



Řešení:
Nechť O je střed a r poloměr dané kulové plochy. Na součet S budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$S = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}|^2 =$$

$$= |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\rangle + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\rangle + |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\langle\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\rangle -$$

$$-|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 + 2\langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\rangle - |\overrightarrow{OD}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\langle\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\rangle - |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OD}|^2 + 2\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\rangle\,.$$

Nyní využijeme podmínky, že čtyřstěn $ABCD$ je vepsán do kulové plochy, a tedy $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}| = r$. Pro součet S tak dostaneme vyjádření

$$S = 2\Big(\langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\rangle + \langle\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\rangle + \langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\rangle - \langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\rangle - \langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\rangle - \langle\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\rangle\Big) =$$

$$= |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2 - \Big(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2\Big) =$$

$$= -4r^2 + |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2\,.$$

Odtud vidíme, že $S \geq -4r^2$. Ukážeme-li, že existují vepsané čtyřstěny $ABCD$, pro které platí $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{o}$, budou všechny takové čtyřstěny právě ty, pro které je součet S minimální. Hledejme proto všechny čtyřstěny s uvedenou vlastností.

Nechť A' je bod souměrně sdružený s bodem A podle středu O. Úsečka AA' tedy tvoří průměr dané kulové plochy a $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AO}$. Pak platí

$$|\sphericalangle ABA'| = |\sphericalangle ACA'| = |\sphericalangle ADA'| = \frac{\pi}{2}\,,$$

neboť body B, C, D leží na Thaletových kružnicích sestrojených nad průměrem AA'. Díky rovnostem $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$ pro $X = B, C, D$ je podmínka $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{o}$ ekvivalentní podmínce

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OA} = \vec{o}, \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA'}\,.$$

Tato podmínka je díky rovnostem $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XA'}$ pro $X = B, C, D$ ekvivalentní s každou jednotlivou ze tří rovností

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA'}\,, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA'}\,, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA'}\,.$$

Předpokládejme nejprve, že poslední tři vektorové rovnosti platí. Potom s ohledem na výše zmíněné pravé úhly pro skalární součiny dostaneme

$$\langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0\,,$$

$$\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0\,,$$

$$\langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle \overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0\,,$$

neboli

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0\,, \quad \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0\,, \quad \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0\,.$$

Tyto tři rovnosti mohou být splněny jedině tak, že platí

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0\,,$$

což dokazuje, že hrany AB, AC, AD jsou navzájem kolmé.

Předpokládejme nyní naopak, že hrany AB, AC a AD jsou navzájem kolmé. Pak A, B, C, D jsou čtyři vrcholy kvádru $ABD_1CDC_1A_1B_1$ vepsaného do dané kulové plochy, neboť každý čtyřstěn i každý kvádr má *jedinou* opsanou kulovou plochu. Protože tělesová úhlopříčka AA_1 je průměrem kulové plochy opsané kvádru, můžeme ve vektorové rovnosti

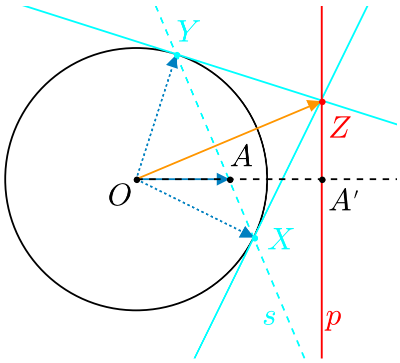
$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

(platné pro každý rovnoběžnostěn) nahradit vektor $\overrightarrow{AA_1}$ vektorem $-2\overrightarrow{OA}$ a dostat tak rovnost $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{OA} = \vec{o}$ z první části řešení, která zaručuje hodnotu $S = -4r^2$. Na závěr dodejme, že kvádry vepsané do dané kulové plochy zřejmě existují (je jich dokonce nekonečně mnoho). □

Poslední dvě úlohy tohoto paragrafu se odlišují od předchozích úloh tím, že jejich náplní je *hledání množin bodů dané vlastnosti.* Klíčovou *kolmost*, která vede k jejich určení, je třeba úvodem řešení objevit.

Úloha 3.2.17: *Nechť A je libovolný bod vnitřní oblasti kružnice k, různý od jejího středu. Pro každou tětivu kružnice k procházející bodem A uvažujme průsečík dvou tečen, které se dotýkají kružnice k v koncových bodech této tětivy. Najděte množinu průsečíků všech takových dvojic tečen.*[47]

[47][kin–04], str.1–2,4; příklad 3.



Řešení:
Označme X, Y průsečíky libovolné sečny s kružnice k vedené bodem A a průsečík tečen ke kružnici k v bodech X a Y označme Z. Dokážeme, že množina všech takových bodů Z je přímka p, která je kolmá na přímku OA a prochází bodem A', kde O je střed kružnice k a bod A' je obraz bodu A v kruhové inverzi určené kružnicí k, tj. ten bod polopřímky OA, pro nějž platí $|OA| \cdot |OA'| = r^2$, kde r je poloměr kružnice k. Pro jednoduchost předpokládejme, že $r = 1$ a zaveďme polohové vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}\,, \qquad \vec{x} = \overrightarrow{OX}\,, \qquad \vec{y} = \overrightarrow{OY}\,, \qquad \vec{z} = \overrightarrow{OZ}\,.$$

Podle zadání platí $0 < |\vec{a}| < 1$, $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1$ a existuje $r \in \mathbf{R}$ takové, že

$$\vec{a} = r\vec{x} + (1-r)\vec{y}\,.$$

Protože bod Z leží na obou uvažovaných tečnách, platí $\vec{z} - \vec{x} \perp \vec{x}$ a $\vec{z} - \vec{y} \perp \vec{y}$, což pomocí skalárního součinu zapíšeme rovnostmi

$$\langle \vec{z} - \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{z} - \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0\,,$$

ze kterých s přihlédnutím k $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 1$ plyne

$$\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle = 1\,.$$

Chceme-li dokázat, že bod Z leží na kolmici p k přímce OA vedené bodem A', musíme ověřit rovnost

$$\left\langle \vec{z} - \overrightarrow{OA'}, \vec{a} \right\rangle = 0 \qquad \text{neboli} \qquad \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = \left\langle \overrightarrow{OA'}, \vec{a} \right\rangle.$$

Protože vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$ jsou souhlasně rovnoběžné, platí

$$\left\langle \overrightarrow{OA'}, \vec{a} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA} \right\rangle = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OA'}| = r^2 = 1\,,$$

tudíž naším úkolem je ověřit rovnost $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 1$, což je snadné:

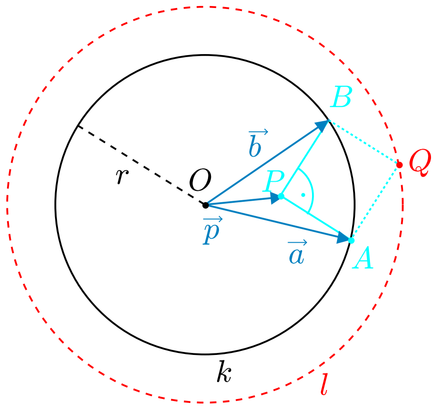
$$\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{z}, r\vec{x} + (1-r)\vec{y} \rangle = r\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle + (1-r)\langle \vec{z}, \vec{y} \rangle = r + (1-r) = 1\,.$$

V druhé části řešení naopak zvolíme libovolný bod Z na přímce p a ukážeme, že je průsečíkem takových dvou tečen ke kružnici k, pro které bod A leží na spojnici jejich bodů dotyku s kružnicí k. Nechť tedy Z je pevně zvolený bod přímky p. To, jak už víme, znamená, že pro polohový vektor $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$ platí $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 1$. Uvažme nyní sečnu s kružnice k vedenou bodem A kolmo na přímku OZ.[48] Je tvořena právě těmi body W, pro jejichž polohové vektory $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ platí $\langle \vec{w} - \vec{a}, \vec{z} \rangle = 0$ neboli

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{z} \rangle = 1\,.$$

Průsečíky X, Y kružnice k se sečnou s určují tětivu XY jdoucí bodem A a pro jejich polohové vektory $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$, $\vec{y} = \overrightarrow{OY}$ podle závěru předchozí věty platí $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 1$. To lze s ohledem na $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1$ zapsat jako $\langle \vec{x}, \vec{z} - \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} - \vec{y} \rangle = 0$ neboli $\vec{x} \perp \vec{z} - \vec{x}$, $\vec{y} \perp \vec{z} - \vec{y}$. Bod Z proto skutečně leží na tečnách ke kružnici k v bodech X a Y. □

Úloha 3.2.18: *Nechť P je daný bod ve vnitřní oblasti dané kružnice $k(O, r)$. Dvě navzájem kolmé polopřímky vycházející z bodu P protínají kružnici k v bodech A, B. Trojúhelník PAB doplňme bodem Q na pravoúhelník $PAQB$. Jakou množinu vyplní všechny body Q, když pro pevný bod P uvážíme všechny dvojice kolmých polopřímek PA, PB?*[49]



Řešení:
K danému bodu P a libovolným dvěma různým bodům A, B na kružnici k doplníme trojúhelník PAB na rovnoběžník $PAQB$ a dokážeme ekvivalenci

$$PA \perp PB \quad \Leftrightarrow \quad |OP|^2 + |OQ|^2 = 2r^2\,.$$

K tomu zavedeme vektory $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ a $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Pak $|\vec{a}| = |\vec{b}| = r$ a z rovnosti $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ plyne $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{p} + (\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{p}$. Odtud

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a} + \vec{b} - \vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 + |(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + \vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a} - \vec{p}|^2 + |\vec{b} - \vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 +$$

[48] Nápovědu, jak k zadanému bodu $Z \in p$ vybrat vhodnou sečnu s, lze získat z první části řešení úlohy. Z rovností $\langle \vec{z}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle = 1$ totiž plyne $\vec{z} \perp \vec{x} - \vec{y}$, takže přímky OZ a XY jsou navzájem kolmé.

[49] [eng–97], str. 299, úloha 23. Ze stejného zdroje je i prostorová analogie uvedené rovinné situace, kterou uvedeme později jinou formou jako úlohu 3.2.32 na výpočet vzdálenosti.

$$+2\langle\vec{a}-\vec{p},\vec{p}\rangle+2\langle\vec{b}-\vec{p},\vec{p}\rangle+2\langle\vec{a}-\vec{p},\vec{b}-\vec{p}\rangle = 2|\vec{p}\,|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{p}\,|^2-2\langle\vec{a},\vec{p}\rangle+|\vec{b}|^2+|\vec{p}\,|^2-2\langle\vec{b},\vec{p}\rangle+2\langle\vec{a},\vec{p}\rangle-$$
$$-2|\vec{p}\,|^2 + 2\langle\vec{b},\vec{p}\rangle - 2|\vec{p}\,|^2 + 2\langle\vec{a}-\vec{p},\vec{b}-\vec{p}\rangle = 2r^2 + 2\langle\vec{a}-\vec{p},\vec{b}-\vec{p}\rangle\,,$$

takže platí ekvivalence

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = 2r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle\vec{a}-\vec{p},\vec{b}-\vec{p}\rangle = 0\,,$$

přičemž rovnost napravo vyjadřuje kolmost vektorů $\vec{a}-\vec{p} = \overrightarrow{PA}$ a $\vec{b}-\vec{p} = \overrightarrow{PB}$. Tím je ekvivalence z úvodu našeho řešení dokázána. Plyne z ní, že v případě $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ platí $|OQ|^2 = 2r^2 - p^2$, tedy bod Q leží na fixní kružnici l se středem O a poloměrem $\sqrt{2r^2-p^2}$, kde $p = |OP|$.

Ukažme nyní, že naopak libovolný bod Q kružnice l je vrcholem jednoho z uvažovaných pravoúhelníků. Pro střed S úsečky PQ platí

$$|\overrightarrow{OS}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}| \le \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{2r^2-p^2}\right) < r$$

(o platnosti poslední nerovnosti za předpokladu $0 \le p < r$ se lze snadno přesvědčit ekvivalentními úpravami), takže bod S leží uvnitř kružnice k a je tudíž středem některé její tětivy AB. Potom však $PAQB$ je rovnoběžník, jehož strany PA, PB jsou navzájem kolmé podle dokázané ekvivalence.

Dokázali jsme, že hledanou množinou bodů je kružnice $l\left(O, \sqrt{2r^2-p^2}\right)$, kde p značí vzdálenost bodů O a P. □

Výpočty délek a vzdáleností

V tomto paragrafu uvedeme dvě skupiny úloh. První z nich obsahuje úlohy 3.2.19 až 3.2.32, v jejichž řešení využíváme k výpočtu délek nebo vzdáleností pouze definičního vztahu (1.1) pro velikost vektoru

$$|\vec{u}| = \sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$$

a základních vlastností skalárního součinu uvedených jako (i)–(iv) v Definici 1.2.1 skalárního součinu, které budeme využívat automaticky, tj. bez odkazů.

Úloha 3.2.19: *Pro tři dané body A, B, C platí $|AC|^2 + |BC|^2 = \frac{1}{2}|AB|^2$. Jaká je vzájemná poloha těchto tří bodů?*[50]

Řešení:
Danou rovnost upravíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0\,,$$

$$2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}|^2 = 0\,,$$

$$2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{CB}|^2 - 2\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\rangle = 0\,,$$

[50] [eng–97], str. 298, úloha 9.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}|^2 = 0\,,$$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \vec{o} \qquad \text{neboli} \qquad (C - A) - (B - C) = \vec{o} \qquad \text{neboli} \qquad C = \frac{A+B}{2}\,.$$

To právě znamená, že bod C je střed úsečky AB. □

Úloha 3.2.20: *Pro libovolné tři body $A \neq B$, M dokažte větu: Rovnost $|QA|^2 + |QB|^2 = 2|QM|^2 + \frac{1}{2}|AB|^2$ platí pro libovolný bod Q právě tehdy, když je bod M střed úsečky AB.*[51]

Řešení:
Na zadanou rovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$2|\overrightarrow{QA}|^2 + 2|\overrightarrow{QB}|^2 - 4|\overrightarrow{QM}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0\,,$$

$$2|\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MA}|^2 + 2|\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MB}|^2 - 4|\overrightarrow{QM}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0\,,$$

$$2|\overrightarrow{QM}|^2 + 2|\overrightarrow{MA}|^2 + 4\langle \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{MA} \rangle + 2|\overrightarrow{QM}|^2 + 2|\overrightarrow{MB}|^2 + 4\langle \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{MB} \rangle - 4|\overrightarrow{QM}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0\,,$$

$$2|MA|^2 + 2|MB|^2 - |AB|^2 + 4\langle \overrightarrow{QM}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \rangle = 0\,.$$

Má-li platit poslední rovnost pro každý bod Q, musí být vektor $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ nulový, tj. musí být $M = \frac{1}{2}(A + B)$, pak již zřejmě platí i $2|MA|^2 + 2|MB|^2 - |AB|^2 = 0$, tedy poslední odvozená rovnost platí. To znamená, že původně zadaná rovnost platí pro každý bod Q právě tehdy, když M je střed AB. □

Úloha 3.2.21: *Najděte bod X s minimálním součtem čtverců vzdáleností od daných bodů A, B, C, které tvoří vrcholy trojúhelníku.*[52]

Řešení:
Dokážeme, že zkoumanou vlastnost má jedině těžiště T daného trojúhelníku ABC. Pro libovolný bod X součet

$$s = \left|\overrightarrow{XA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XC}\right|^2$$

upravíme s využitím těžiště T takto:

$$s = \left|\overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{XT} + \overrightarrow{TC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 + \left|\overrightarrow{TA}\right|^2 + 2\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TA} \rangle + \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 + \left|\overrightarrow{TB}\right|^2 +$$

$$+ 2\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TB} \rangle + \left|\overrightarrow{XT}\right|^2 + \left|\overrightarrow{TC}\right|^2 + 2\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TC} \rangle = |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + 3|XT|^2 +$$

$$+ 2\langle \overrightarrow{XT}, \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} \rangle\,.$$

Jak dobře víme, pro těžiště T platí $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{o}$, a tedy

$$s = |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + 3|XT|^2\,.$$

[51] [eng–97], str. 298, úloha 12.
[52] [eng–97], str. 299, úloha 25, [pra–86], str. 102, úloha 5.15.

Hodnota takového součtu s je nejmenší, jedině když $|XT| = 0$, neboli $X = T$, což znamená, že hledaným bodem X je právě těžiště T. □

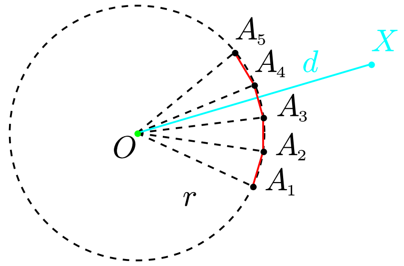
Poznámka:
Z uvedeného řešení plyne, že pro každý bod X platí vzorec

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 = |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2 + 3|XT|^2\,,$$

takže všechny body X se stejnou hodnotou součtu $|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2$ tvoří kružnici se středem T (která v případě minimální hodnoty součtu zdegeneruje do bodu T).

Úloha 3.2.22: *Pravidelný n-úhelník $A_1A_2\dots A_n$ je vepsaný do kružnice se středem O a poloměrem r. Nechť X je libovolný bod, pro který platí $|OX| = d$. Dokažte rovnost*[53]

$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = n\left(r^2 + d^2\right)\,.$$



Řešení:
Nejprve vyjádříme velikosti vektorů $\overrightarrow{A_iX}$ pomocí skalárních součinů takto:

$$\left|\overrightarrow{A_iX}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_iO} + \overrightarrow{OX}\right|^2 = \left|\overrightarrow{A_iO}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OX}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}\right\rangle = d^2 + r^2 + 2\left\langle\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}\right\rangle.$$

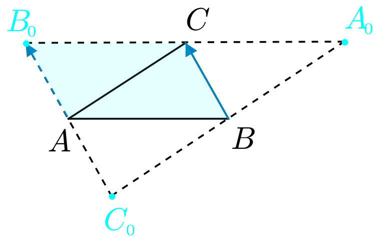
Odtud sečtením pro $i = 1, 2, \dots, n$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} |A_iX|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(d^2 + r^2 + 2\left\langle\overrightarrow{A_iO}, \overrightarrow{OX}\right\rangle\right) = n\left(d^2 + r^2\right) - 2\left\langle\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OX}\right\rangle.$$

Protože $A_1A_2\dots A_n$ je pravidelný n-úhelník se středem O, platí rovnost $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{o}$, neboť vektorový součet z levé strany se nezmění při otočení všech sčítaných vektorů o orientovaný úhel $\frac{2\pi}{n}$. Zrušením skalárního součinu v odvozené rovnosti dostáváme vzorec, který jsme měli dokázat. □

Úloha 3.2.23: *Dokažte, že pro každý trojúhelník ABC existuje v rovině ABC právě jeden bod X takový, že součty čtverců stran trojúhelníků XAB, XBC, XCA se navzájem rovnají. Podejte geometrickou interpretaci takového bodu X.*[54]

[53] [eng–97], str. 298, úloha 4; [pra–86], str. 100, úloha 5.6. Pro $n = 3$ jde o výsledek uvedený v Poznámce za předchozí úlohou 3.2.21.
[54] [eng–97], str. 299, úloha 27.



Řešení:
Pro bod X má platit série rovností

$$|\overrightarrow{AX}|^2 + |\overrightarrow{BX}|^2 + |\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{BX}|^2 + |\overrightarrow{CX}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AX}|^2 + |\overrightarrow{CX}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 \,. \tag{3.27}$$

Z první rovnosti postupně dostáváme ekvivalentní rovnosti:

$$|\overrightarrow{AX}|^2 + |\overrightarrow{BA}|^2 - |\overrightarrow{CX}|^2 - |\overrightarrow{CB}|^2 = 0\,,$$

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX}|^2 + |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{CX}|^2 - |\overrightarrow{CB}|^2 = 0\,,$$

$$2|\overrightarrow{AC}|^2 + 2\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CX}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\rangle = 0\,,$$

$$2\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} - \overrightarrow{BC}\rangle = 0\,,$$

$$\langle C - A, C - A + X - C - C + B\rangle = 0\,,$$

$$\langle C - A, X - C - A + B\rangle = 0\,.$$

Položme $B_0 = C + A - B$. Pak $C - B = B_0 - A$, tedy bod B_0 doplňuje trojúhelník ABC na rovnoběžník $ABCB_0$ (vybarvený na obrázku). Poslední ze série ekvivalentních rovností je vyjádřením vztahu $C - A \perp X - B_0$. Zjistili jsme, že první rovnost v (3.27) platí, právě když bod X leží na kolmici k přímce AC vedené bodem B_0.

Cyklickou záměnou vrcholů A, B, C dostáváme, že druhá rovnost v (3.27) platí právě tehdy, když bod X leží na kolmici k přímce BC vedené bodem $A_0 = B + C - A$. Hledaný bod X tedy existuje, je jediný a geometricky představuje ortocentrum trojúhelníku $A_0B_0C_0$, jehož středy stran jsou dané body A, B, C. $\square$

Úloha 3.2.24: *Úhlopříčky AC a BD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě O. Ukažte, že rovnost*

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = 2(|AO|^2 + |BO|^2 + |CO|^2 + |DO|^2)$$

platí právě tehdy, když úhlopříčky jsou navzájem kolmé nebo když bod O je středem alespoň jedné z nich.[55]

[55] [eng–97], str. 299, úloha 18.

Řešení:

Na zkoumanou rovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$2|\overrightarrow{AO}|^2+2|\overrightarrow{BO}|^2+2|\overrightarrow{CO}|^2+2|\overrightarrow{DO}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{CD}|^2-|\overrightarrow{DA}|^2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2|\overrightarrow{AO}|^2+2|\overrightarrow{BO}|^2+2|\overrightarrow{CO}|^2+2|\overrightarrow{DO}|^2-|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}|^2-$$

$$-|\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}|^2-|\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}|^2=0\quad\Leftrightarrow$$

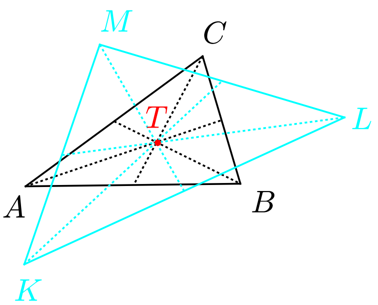
$$\Leftrightarrow\quad 2\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\rangle+2\langle\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\rangle+2\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OC}\rangle+2\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}\rangle=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\rangle+\langle\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\rangle=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \langle\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\rangle=0\,.$$

Není-li bod O ani střed AC, ani střed BD, poslední rovnost je splněna právě tehdy, když nenulové vektory $\frac{1}{2}(A+C)-O$ a $\frac{1}{2}(B+D)-O$ jsou navzájem kolmé. Protože tyto vektory jsou směrovými vektory úhlopříček AC a BD, jde skutečně o podmínku $AC\perp BD$. □

Úloha 3.2.25: *V prostoru jsou dány libovolné dva trojúhelníky ABC a KLM. Přemístíme-li je tak, aby splynula jejich těžiště, pak součet všech devíti hodnot $|XY|^2$, kde $X\in\{A,B,C\}$ a $Y\in\{K,L,M\}$, nebude záviset na tom, v jaké vzájemné poloze přitom přemístěné trojúhelníky budou. Dokažte.*[56]



Řešení:

Označme T společné těžiště trojúhelníků ABC a KLM (po jejich přesunutí), pak platí

$$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{CT}=\vec{o}\qquad\text{a}\qquad\overrightarrow{KT}+\overrightarrow{LT}+\overrightarrow{MT}=\vec{o}\,. \tag{3.28}$$

S využitím vektorů a skalárního součinu vypočtěme nejprve součet tří trojic vzdáleností

$$|AK|^2+|BL|^2+|CM|^2=\left|\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TK}\right|^2+\left|\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{TL}\right|^2+\left|\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{TM}\right|^2=$$

$$=|AT|^2+|BT|^2+|CT|^2+|KT|^2+|LT|^2+|MT|^2+2\langle\overrightarrow{AT},\overrightarrow{TK}\rangle+2\langle\overrightarrow{BT},\overrightarrow{TL}\rangle+2\langle\overrightarrow{CT},\overrightarrow{TM}\rangle\,,$$

[56] [bom–96], str. 111, úloha 9.6, řešení str. 114.

analogicky pak

$$|AL|^2 + |BM|^2 + |CK|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + |KT|^2 + |LT|^2 + |MT|^2 + \\ +2\langle \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{TL} \rangle + 2\langle \overrightarrow{BT}, \overrightarrow{TM} \rangle + 2\langle \overrightarrow{CT}, \overrightarrow{TK} \rangle\,,$$

$$|AM|^2 + |BK|^2 + |CL|^2 = |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + |KT|^2 + |LT|^2 + |MT|^2 + \\ +2\langle \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{TM} \rangle + 2\langle \overrightarrow{BT}, \overrightarrow{TK} \rangle + 2\langle \overrightarrow{CT}, \overrightarrow{TL} \rangle\,.$$

Sečtením odvozených tří rovností dostáváme pro celkový součet S všech devíti hodnot $|XY|^2$ ze zadání vyjádření

$$S = |AK|^2 + |BL|^2 + |CM|^2 + |AL|^2 + |BM|^2 + |CK|^2 + |AM|^2 + |BK|^2 + |CL|^2 =$$

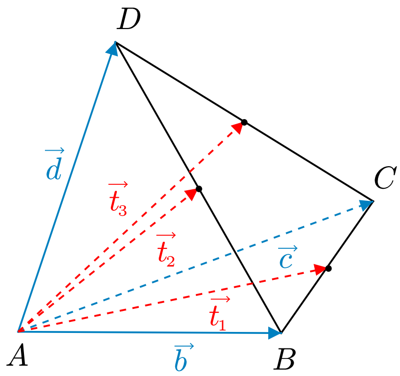
$$= 3(|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + |KT|^2 + |LT|^2 + |MT|^2) + 2\langle \overrightarrow{AT}, \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{TM} \rangle + \\ +2\langle \overrightarrow{BT}, \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{TM} \rangle + 2\langle \overrightarrow{CT}, \overrightarrow{TK} + \overrightarrow{TL} + \overrightarrow{TM} \rangle\,,$$

které se užitím druhé z rovností (3.28) zjednoduší na

$$S = 3(|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + |KT|^2 + |LT|^2 + |MT|^2)\,.$$

Tato hodnota je pro bod T v roli společného těžiště obou trojúhelníků nezávislá na způsobu, jak je kolem pevného bodu T v prostoru pootočíme, což jsme měli dokázat. □

Úloha 3.2.26: *Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, ve kterém těžnice vycházející z bodu A v trojúhelnících ABC, ABD, ACD jsou navzájem kolmé. Dokažte, že všechny tři hrany dotyčného čtyřstěnu vycházející z bodu A jsou stejně dlouhé.*[57]



Řešení:
Označme vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ a vektory odpovídající těžnicím z bodu A v trojúhelnících ABC, ABD, ACD označme postupně $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$. Pro tyto vektory platí

$$\vec{t}_1 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})\,, \qquad \vec{t}_2 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d})\,, \qquad \vec{t}_3 = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})\,.$$

[57] [bech–04], str. 99–100, úloha 5.

Protože jsou těžnice navzájem kolmé, je skalární součin každých dvou z vektorů $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ roven nule, což po dosazení vede k rovnostem

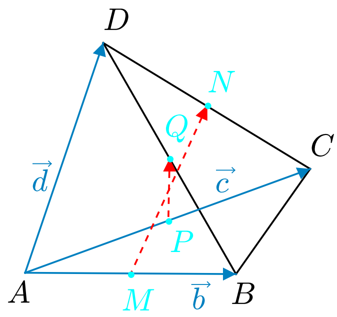
$$\langle \vec{t}_1, \vec{t}_2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{d} \rangle = \frac{1}{4} \left(|\vec{b}|^2 + \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle \right) = 0 \,,$$

$$\langle \vec{t}_1, \vec{t}_3 \rangle = \frac{1}{4} \langle \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{d} \rangle = \frac{1}{4} \left(|\vec{c}|^2 + \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle \right) = 0 \,,$$

$$\langle \vec{t}_2, \vec{t}_3 \rangle = \frac{1}{4} \langle \vec{b} + \vec{d}, \vec{c} + \vec{d} \rangle = \frac{1}{4} \left(|\vec{d}|^2 + \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle \right) = 0 \,.$$

Odtud již vidíme, že $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$, což jsme měli dokázat. Dodejme ještě, že tvrzení úlohy nelze obrátit: Z rovností $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$ plyne pouze, že skalární součiny každých dvou z vektorů $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{t}_3$ mají stejnou (ne nutně nulovou) hodnotu. □

Úloha 3.2.27: *Nechť M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AB, CD, AC, BD čtyřstěnu $ABCD$. Nechť úsečka MN je kolmá na AB i CD a úsečka PQ je kolmá na AC i BD. Dokažte, že pak platí $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$, $|AC| = |BD|$.*[58]



Řešení:
Označme vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Pro středy M, N, P, Q hran AB, CD, AC, BD platí:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) \,, \qquad N = \frac{1}{2}(C + D) \,, \qquad P = \frac{1}{2}(A + C) \,, \qquad Q = \frac{1}{2}(B + D) \,,$$

odtud pro vektory $\overrightarrow{MN}$ a $\overrightarrow{PQ}$ dostáváme:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(C + D - A - B) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \,, \qquad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(B + D - A - C) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}) \,.$$

Podle zadání je $MN \perp AB$ a $MN \perp CD$, a tedy skalární součiny odpovídajících vektorů jsou nulové:

$$0 = \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{1}{2} \langle -\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \left(-|\vec{b}|^2 + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \right) \,,$$

[58] [bech–04], str. 43, úloha 3.

$$0 = \langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{1}{2}\langle -\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, -\vec{c} + \vec{d} \rangle = \frac{1}{2}\left(-|\vec{c}\,|^2 + |\vec{d}\,|^2 + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \right) .$$

Sečtením obou rovností dostaneme, že

$$|\vec{d}\,|^2 = |\vec{b} - \vec{c}\,|^2 , \quad \text{neboli} \quad |AD| = |BC| ,$$

jejich odečtením pak obdržíme

$$|\vec{c}\,|^2 = |\vec{b} - \vec{d}\,|^2 , \quad \text{neboli} \quad |AC| = |BD| .$$

Využitím podmínky ze zadání, že $PQ \perp AC$ a $PQ \perp BD$ dostaneme analogickým postupem třetí z dokazovaných rovností $|AB| = |CD|$ (spolu s již dokázanou rovností $|AD| = |BC|$). □

Úloha 3.2.28: *Těžiště čtyřstěnu $ABCD$ má stejnou vzdálenost od jeho vrcholů A a B. Dokažte rovnost*[59]

$$|AC|^2 + |AD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2 .$$

Řešení:
Dokazovanou rovnost přepíšeme do tvaru

$$|AC|^2 + |AD|^2 - |BC|^2 - |BD|^2 = 0 . \tag{3.29}$$

Těžiště T čtyřstěnu $ABCD$ má tu vlastnost, že pro vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{TA} , \qquad \vec{b} = \overrightarrow{TB} , \qquad \vec{c} = \overrightarrow{TC} , \qquad \vec{d} = \overrightarrow{TD}$$

platí

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o} , \qquad |\vec{a}| = |\vec{b}| \tag{3.30}$$

(druhá rovnost je podmínkou zadání úlohy). Nyní upravíme levou stranu rovnosti (3.29) s využitím (3.30):

$$|AC|^2 + |AD|^2 - |BC|^2 - |BD|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 + |\vec{d} - \vec{a}|^2 - |\vec{c} - \vec{b}|^2 - |\vec{d} - \vec{b}|^2 =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{c}\,|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + |\vec{a}|^2 + |\vec{d}\,|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{d} \rangle - |\vec{b}|^2 - |\vec{c}\,|^2 + 2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - |\vec{b}|^2 - |\vec{d}\,|^2 + 2\langle \vec{b}, \vec{d} \rangle =$$
$$= 2\langle \vec{b}, \vec{c} + \vec{d} \rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{c} + \vec{d} \rangle = 2\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{c} + \vec{d} \rangle = 2\langle \vec{b} - \vec{a}, -\vec{a} - \vec{b} \rangle = -2\langle \vec{b} - \vec{a}, \vec{b} + \vec{a} \rangle = 0 ,$$

přičemž poslední rovnost platí podle vztahu (3.1) s ohledem na druhou z rovností (3.30). □

Úloha 3.2.29: *Vyjádřete vzdálenost hlavního vrcholu V od těžiště T základny ABC trojbokého jehlanu $ABCV$ pomocí součtů*

$$P = |AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 , \qquad Q = |AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 ,$$

pro něž pak dokažte nerovnost $P < 3Q$.[60]

[59] [jur–96], str. 102, úloha 3.16.
[60] [jur–96], str. 101, úloha 3.12.

Řešení:
Pro těžiště T trojúhelníku ABC platí $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$, odtud plyne vektorová rovnost

$$\overrightarrow{VT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}\right).$$

Pro vzdálenost vrcholu V od těžiště T tak získáme vyjádření

$$|VT|^2 = \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VB}, \overrightarrow{VC}\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(Q + 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VB}, \overrightarrow{VC}\rangle\right).$$

Pro součet P užitím skalárního součinu dostáváme

$$P = \left|\overrightarrow{VA} - \overrightarrow{VB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{VA} - \overrightarrow{VC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VC}\right|^2 = 2|AV|^2 + 2|BV|^2 + 2|CV|^2 -$$

$$-2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\rangle - 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}\rangle - 2\langle\overrightarrow{VB}, \overrightarrow{VC}\rangle,$$

odtud pak

$$2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{VB}, \overrightarrow{VC}\rangle = 2Q - P.$$

Dosazením do odvozené rovnosti pro $|VT|^2$ tak obdržíme

$$|VT|^2 = \frac{1}{9}(Q + 2Q - P), \qquad \text{neboli} \qquad |VT| = \frac{1}{3}\sqrt{3Q - P},$$

což je hledané vyjádření, z něhož také plyne nerovnost $P < 3Q$, neboť $|VT| > 0$. □

Úloha 3.2.30: *Kulová plocha vepsaná do čtyřstěnu se dotýká všech čtyř stěn v jejich těžištích. Dokažte, že čtyřstěn je pravidelný.*[61]

Řešení:
Nechť O je střed kulové plochy vepsané do čtyřstěnu $ABCD$. Označme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Nechť T je těžiště stěny ABC, pak pro vektor $\vec{t} = \overrightarrow{OT}$ platí

$$\vec{t} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Podle zadání $|\vec{t}| = r$, kde r je poloměr dané vepsané kulové plochy. Odtud

$$\langle 3\vec{t}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\rangle = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |3\vec{t}|^2 = 9r^2,$$

neboli

$$\langle \vec{t}, \vec{a}\rangle + \langle \vec{t}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{t}, \vec{c}\rangle = 3r^2. \tag{3.31}$$

[61] [mur–88], str. 63–64, úloha S.G./2(1972/2).

Podle zadání je těžiště T bodem dotyku vepsané kulové plochy, vektor $\vec{t}$ je tedy kolmý na rovinu ABC, a tedy na každou přímku této roviny, odtud

$$\langle \vec{t}, \vec{a} - \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{t}, \vec{b} - \vec{c}\,\rangle = 0 \qquad \text{neboli} \qquad \langle \vec{t}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{t}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{t}, \vec{c}\,\rangle\,.$$

Z poslední rovnosti a z rovnosti (3.31) plyne $\langle \vec{t}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{t}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{t}, \vec{c}\,\rangle = r^2$, což po vynásobení třemi a dosazení za vektor $\vec{t}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$3r^2 = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}\,\rangle\,. \tag{3.32}$$

Analogický výsledek obdržíme pro zbývající stěny ABD, ACD a BCD:

$$3r^2 = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{d}, \vec{d}\,\rangle\,, \tag{3.33}$$

$$3r^2 = \langle \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{d}\,\rangle\,, \tag{3.34}$$

$$3r^2 = \langle \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}, \vec{d}\,\rangle\,. \tag{3.35}$$

Z prvních rovností v (3.32) a (3.33) dostaneme $\langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{a}, \vec{d}\,\rangle$; podobně pak z dalších důsledků (3.32) – (3.35) obdržíme, že hodnoty všech skalárních součinů dvou různých vektorů z $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\,\}$ mají tutéž hodnotu, kterou označíme jako λ:

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{a}, \vec{d}\,\rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{b}, \vec{d}\,\rangle = \langle \vec{c}, \vec{d}\,\rangle = \lambda\,.$$

Nyní z (3.32) vyjádříme

$$|\vec{a}|^2 + \langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle + \langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle = 3r^2\,, \qquad \text{neboli} \qquad |\vec{a}|^2 = 3r^2 - 2\lambda\,,$$

podobně pak odvodíme dohromady

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}\,|^2 = |\vec{d}\,|^2 = 3r^2 - 2\lambda\,.$$

Pro druhou mocninu délky hrany AB tudíž platí

$$|AB|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle = 6r^2 - 6\lambda\,,$$

stejně jako pro ostatní hrany obdržíme:

$$|AC|^2 = |AD|^2 = |BC|^2 = |BD|^2 = |CD|^2 = 6r^2 - 6\lambda\,.$$

Čtyřstěn $ABCD$ je tedy pravidelný, jak jsme měli dokázat. □

Úloha 3.2.31: *Určete poloměr kulové plochy S, která prochází těžišti všech stěn daného čtyřstěnu vepsaného do jednotkové koule se středem O. Určete také vzdálenost středu O od středu kulové plochy S v závislosti na délkách hran daného čtyřstěnu.*[62]

[62][dju–06], str. 191, úloha 9, IMO 1985.

Řešení:
Ve zkoumaném čtyřstěnu $ABCD$ pro vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}\,, \qquad \vec{b} = \overrightarrow{OB}\,, \qquad \vec{c} = \overrightarrow{OC}\,, \qquad \vec{d} = \overrightarrow{OD}$$

podle zadání platí $|\vec{a}| = |\vec{b}\,| = |\vec{c}\,| = |\vec{d}\,| = 1$. Těžiště T_1, T_2, T_3, T_4 po řadě stěn BCD, ACD, ABD a ABC mají vyjádření

$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\,)\,, \qquad \overrightarrow{OT_2} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}\,)\,,$$

$$\overrightarrow{OT_3} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}\,)\,, \qquad \overrightarrow{OT_4} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,)\,.$$

Uvažujme nyní bod P, pro který platí $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\,)$, pak

$$\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{3}\vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{T_2P} = \frac{1}{3}\vec{b}\,, \qquad \overrightarrow{T_3P} = \frac{1}{3}\vec{c}\,, \qquad \overrightarrow{T_4P} = \frac{1}{3}\vec{d}\,.$$

Body T_1, T_2, T_3, T_4 mají od bodu P vzdálenost $|\overrightarrow{T_1P}| = |\overrightarrow{T_2P}| = |\overrightarrow{T_3P}| = |\overrightarrow{T_4P}| = \frac{1}{3}$, bod P je tedy středem kulové plochy S ze zadání úlohy a její hledaný poloměr je $\frac{1}{3}$.

Nyní najdeme vzdálenost bodů O a P jako velikost vektoru $\overrightarrow{OP}$:

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}\,|^2 = \frac{1}{9}\left(4 + 2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle + 2\langle\vec{a},\vec{c}\,\rangle + 2\langle\vec{a},\vec{d}\,\rangle + 2\langle\vec{b},\vec{c}\,\rangle + 2\langle\vec{b},\vec{d}\,\rangle + 2\langle\vec{c},\vec{d}\,\rangle\right)\,.$$

Pro velikost hrany AB platí

$$|AB|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 2 - 2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle\,, \qquad \text{odtud} \qquad 2\langle\vec{a},\vec{b}\,\rangle = 2 - |AB|^2\,,$$

analogicky

$$2\langle\vec{a},\vec{c}\,\rangle = 2 - |AC|^2\,, \qquad 2\langle\vec{a},\vec{d}\,\rangle = 2 - |AD|^2\,, \qquad 2\langle\vec{b},\vec{c}\,\rangle = 2 - |BC|^2\,,$$

$$2\langle\vec{b},\vec{d}\,\rangle = 2 - |BD|^2\,, \qquad 2\langle\vec{c},\vec{d}\,\rangle = 2 - |CD|^2\,.$$

Po dosazení do vyjádření $|\overrightarrow{OP}|^2$ a odmocnění dostaneme hledanou vzdálenost

$$|OP| = \frac{1}{3}\sqrt{16 - (|AB|^2 + |AC|^2 + |AD|^2 + |BC|^2 + |BD|^2 + |CD|^2)}\,. \qquad \square$$

Úloha 3.2.32: *Ve vnitřní oblasti kulové plochy $k(O,r)$ je dán bod P. Tři navzájem kolmé polopřímky vedené z bodu P protínají kulovou plochu k v bodech A, B, C. Označme Q ten vrchol kvádru s hranami PA, PB, PC, který s bodem P určuje jeho tělesovou úhlopříčku PQ. Dokažte, že pro všechny uvažované trojice navzájem kolmých polopřímek PA, PB, PC má bod Q od středu O tutéž vzdálenost.*[63]

[63] [eng–97], str. 299, úloha 24.

Řešení:
Podobně jako v Úloze 3.2.18 dokážeme tentokrát pro libovolné tři body A, B, $C \in k$ implikaci

$$PA \perp PB \wedge PA \perp PC \wedge PB \perp PC \quad \Rightarrow \quad |OP|^2 + |OQ|^2 = 3r^2 - p^2\,.$$

Označme $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ a $|\vec{p}| = p$, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Pak $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$ a z rovnosti $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ plyne $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{p}$. Odtud

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{p}|^2 = |\vec{p}|^2 + |(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + (\vec{c} - \vec{p}) + \vec{p}|^2 =$$

$$= |\vec{p}|^2 + |\vec{a} - \vec{p}|^2 + |\vec{b} - \vec{p}|^2 + |\vec{c} - \vec{p}|^2 + |\vec{p}|^2 + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{b} - \vec{p}, \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{c} - \vec{p}, \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{b} - \vec{p}\rangle +$$

$$+ 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{b} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle = 2|\vec{p}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{p}\rangle + |\vec{b}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2\langle\vec{b}, \vec{p}\rangle + |\vec{c}|^2 + |\vec{p}|^2 -$$

$$- 2\langle\vec{c}, \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{a}, \vec{p}\rangle - 2|\vec{p}|^2 + 2\langle\vec{b}, \vec{p}\rangle - 2|\vec{p}|^2 + 2\langle\vec{c}, \vec{p}\rangle - 2|\vec{p}|^2 + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{b} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle +$$

$$+ 2\langle\vec{b} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle = 3r^2 - p^2 + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{b} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{b} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle\,,$$

takže platí ekvivalence

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = 3r^2 - p^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{b} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{a} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle + 2\langle\vec{b} - \vec{p}, \vec{c} - \vec{p}\rangle = 0\,,$$

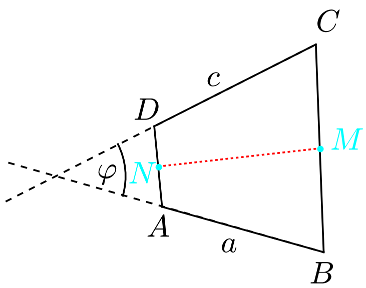
přičemž rovnost napravo bude jistě splněna, budou-li navzájem kolmé vektory $\vec{a} - \vec{p} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{b} - \vec{p} = \overrightarrow{PB}$ a $\vec{c} - \vec{p} = \overrightarrow{PC}$ (opačná implikace zřejmě platit nemusí). Tím je implikace z úvodu našeho řešení dokázána. Plyne z ní, že za podmínek ze zadání úlohy platí $|OQ|^2 = 3r^2 - 2p^2$, tedy bod Q má od středu O fixní vzdálenost $\sqrt{3r^2 - 2p^2}$, kde $p = |OP|$. □

V druhé části tohoto paragrafu uvedeme úlohy, které pro výpočet délek a vzdáleností využívají důsledku (1.5) Definice 1.2.3 odchylky φ dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi\,.$$

Jak víme, tento vztah je vlastně vektorovým ekvivalentem kosinové věty o délce strany BC v trojúhelníku ABC s vektory stran $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Úloha 3.2.33: *Dvě protilehlé strany daného konvexního čtyřúhelníku mají délky a, c a úhel mezi různoběžnými přímkami těchto dvou stran, v němž tento čtyřúhelník leží, má velikost φ. Vypočtěte vzdálenost středů dvou zbývajících stran tohoto čtyřúhelníku.*[64]



[64] [eng–97], str. 299, úloha 21.

Řešení:
Označení zkoumaného čtyřúhelníku zvolme jako na obrázku. Pro středy M a N stran BC, resp. DA platí

$$M = \frac{1}{2}(B+C)\,, \qquad N = \frac{1}{2}(A+D)\,.$$

Z vyjádření vektoru $\overrightarrow{MN}$

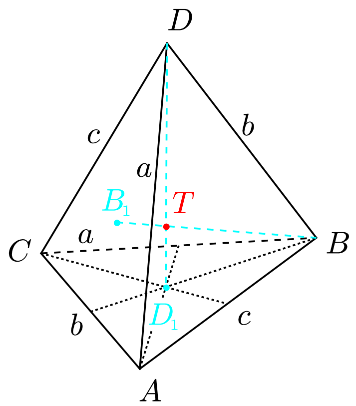
$$\overrightarrow{MN} = N - M = \frac{1}{2}(A+D) - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(D-C)$$

určíme jeho velikost takto:

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \langle\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MN}\rangle = \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle\right) = \frac{1}{4}(a^2+c^2+2ac\cos\varphi) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\varphi}\right)^2 .$$

Délka úsečky MN je tedy $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos\varphi}$. □

Úloha 3.2.34: *Pro délky hran čtyřstěnu $ABCD$ platí $|AD| = |BC| = a$, $|BD| = |AC| = b$ a $|CD| = |AB| = c$. Nechť D_1, B_1 jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC a ADC. Dokažte, že pokud $DD_1 \perp BB_1$, pak $a^2+c^2 = 3b^2$.*[65]



Řešení:
Pro těžiště D_1, B_1 trojúhelníků ABC a ADC platí

$$D_1 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,, \qquad B_1 = \frac{1}{3}(A+D+C)\,.$$

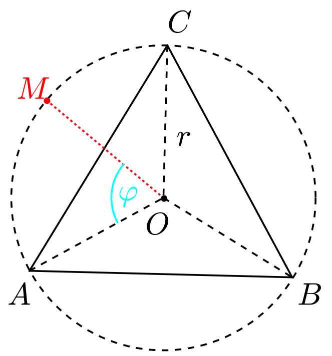
Předpokládejme, že platí $DD_1 \perp BB_1$, a odvozujme důsledky:

$$\langle D_1 - D, B_1 - B\rangle = 0 \quad\Rightarrow\quad \langle A+B+C-3D, A+C+D-3B\rangle = 0 \quad\Rightarrow$$

[65] [eng–97], str. 299, úloha 19.

$$\big\langle (A-D)+(B-D)+(C-D),(A-D)+(C-D)-3(B-D)\big\rangle = 0 \quad \Rightarrow$$
$$a^2+c^2-3b^2+2ac\cos\beta-2ab\cos\gamma-2bc\cos\alpha=0\,,$$
kde $\beta=\sphericalangle ADC$, $\gamma=\sphericalangle ADB$ a $\alpha=\sphericalangle BDC$. Do této rovnosti dosadíme vyjádření
$$2ac\cos\beta=a^2+c^2-b^2,\quad 2ab\cos\gamma=a^2+b^2-c^2,\quad 2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$$
plynoucí z kosinové věty pro trojúhelníky ADC, ADB a BDC. Po dosazení dostaneme:
$$a^2+c^2-3b^2+(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)-(a^2+b^2-c^2)=2(a^2+c^2-3b^2)=0\,.$$
Poslední rovnost je ekvivalentní s rovností $a^2+c^2=3b^2$ ze zadání úlohy. □

Úloha 3.2.35: *Dokažte, že pro libovolný bod M kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC má součet*
$$|MA|^n+|MB|^n+|MC|^n$$
tutéž hodnotu, je-li a) $n=2$, b) $n=4$.[66]



Řešení:

- $n=2$
  Označíme r poloměr kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC a O její střed. Nejprve si vyjádříme druhou mocninu velikosti vektoru $\overrightarrow{MA}$:
  $$\big|\overrightarrow{MA}\big|^2=|A-O+O-M|^2=|\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{OA}|^2+2\langle A-O,O-M\rangle=$$
  $$=2r^2-2\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\rangle\,.$$
  Analogicky platí
  $$\big|\overrightarrow{MB}\big|^2=2r^2-2\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\rangle\,,\qquad \big|\overrightarrow{MC}\big|^2=2r^2-2\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\rangle\,.$$

[66] [eng–97], str. 298, úloha 5 pro $n=2$; [pra–86], str. 100–101, úloha 5.7 pro $n=2,4$.

Sečtením těchto rovností a s využitím faktu, že $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{o}$, dostaneme

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+\left|\overrightarrow{MC}\right|^2=6r^2-2\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\rangle=6r^2\,.$$

Tato hodnota nezávisí na volbě bodu M.[67]

- $n=4$
  Označíme písmenem s součet

$$s=|MA|^4+|MB|^4+|MC|^4\,.$$

S využitím rovností z první části řešení dostáváme

$$s=4r^4+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\big\rangle^2-8r^2\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\big\rangle+4r^4+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\big\rangle^2-$$
$$-8r^2\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\big\rangle+4r^4+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\big\rangle^2-8r^2\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\big\rangle=$$
$$=12r^4-8r^2\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\big\rangle+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\big\rangle^2+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\big\rangle^2+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\big\rangle^2=$$
$$=12r^4+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\big\rangle^2+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\big\rangle^2+4\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\big\rangle^2\,.$$

(Využili jsme rovnost $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{o}$.)

S ohledem na symetrii předpokládejme, že bod M leží jako na obrázku na kratším oblouku AC, a označme $|\sphericalangle AOM|=\varphi$. Protože úhly mezi jednotlivými vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ jsou rovny $\frac{2\pi}{3}$, platí rovnosti $|\sphericalangle BOM|=\varphi+\frac{2\pi}{3}$ a $|\sphericalangle COM|=\varphi+\frac{4\pi}{3}$. Po jejich dosazení do základního vztahu pro skalární součin dvou vektorů obdržíme

$$\begin{aligned}
\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\big\rangle^2&=(r\cdot r\cos\varphi)^2=r^4\cdot\frac{1+\cos2\varphi}{2}\,,\\
\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\big\rangle^2&=\left(r\cdot r\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2=r^4\cdot\frac{1+\cos\left(2\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\,,\\
\big\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}\big\rangle^2&=\left(r\cdot r\cos\left(\varphi+\frac{4\pi}{3}\right)\right)^2=r^4\cdot\frac{1+\cos\left(2\varphi+\frac{8\pi}{3}\right)}{2}\,.
\end{aligned}$$

Dosazením do dříve odvozené rovnosti dostáváme

$$s=12r^4+4r^4\cdot\frac{3+\cos2\varphi+\cos\left(2\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}=$$
$$=12r^4+6r^4+2r^4\left(\cos2\varphi+2\cos2\varphi\cos\frac{2\pi}{3}\right)=12r^4+6r^4=18r^4\,.$$

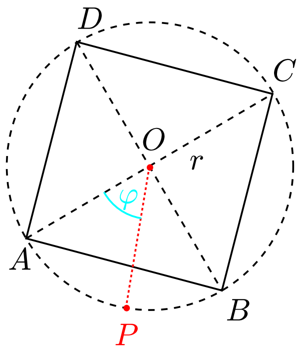
Zkoumaný součet je roven $18r^4$, což je hodnota, která nezávisí na volbě bodu M, jak jsme měli dokázat. □

[67] Tento výsledek plyne i ze vzorce z Poznámky za příkladem 3.2.21, neboť v rovnostranném trojúhelníku splývá střed kružnice opsané s těžištěm.

Úloha 3.2.36: *Dokažte, že pro libovolný bod P kružnice opsané čtverci $ABCD$ má součet*

$$|PA|^n + |PB|^n + |PC|^n + |PD|^n$$

tutéž hodnotu, je-li a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 6$.[68]



Řešení:

- $n = 2$
  Označíme r poloměr kružnice opsané čtverci $ABCD$ a O její střed. Nejprve vektorově vyjádříme druhou mocninu délky úsečky PA:

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 = |P - A|^2 = (P - O + O - A)^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{AO}|^2 + 2\langle P - O, O - A\rangle =$$

$$= 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}\rangle\,,$$

  analogicky

$$\left|\overrightarrow{PB}\right|^2 = 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}\rangle\,, \quad \left|\overrightarrow{PC}\right|^2 = 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC}\rangle\,, \quad \left|\overrightarrow{PD}\right|^2 = 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OD}\rangle\,.$$

  Sečtením těchto rovností s ohledem na $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{o}$ dostaneme

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PD}\right|^2 = 8r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\rangle = 8r^2\,.$$

  Tato hodnota nezávisí na volbě bodu P, jak jsme měli dokázat.

- $n = 4$
  Označme písmenem s součet

$$s = |PA|^4 + |PB|^4 + |PC|^4 + |PD|^4\,.$$

  S ohledem na symetrii předpokládejme, že jako na obrázku bod P leží na kratším oblouku AB, a označme $|\sphericalangle AOP| = \varphi$. Protože úhly mezi jednotlivými vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$

[68] [eng–97], str. 298, úloha 6.

a $\overrightarrow{OD}$ jsou rovny $\frac{\pi}{2}$, platí rovnosti $|\sphericalangle BOP| = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $|\sphericalangle COP| = \pi - \varphi$ a $|\sphericalangle DOP| = \frac{\pi}{2} + \varphi$, podle kterých stejně jako v případě $n = 2$ dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{PA}|^2 &= 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}\rangle = 2r^2 - 2r^2\cos\varphi\,,\\
|\overrightarrow{PB}|^2 &= 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}\rangle = 2r^2 - 2r^2\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)\,,\\
|\overrightarrow{PC}|^2 &= 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OC}\rangle = 2r^2 - 2r^2\cos(\pi - \varphi)\,,\\
|\overrightarrow{PD}|^2 &= 2r^2 - 2\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OD}\rangle = 2r^2 - 2r^2\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi)\,.
\end{aligned}$$

Umocněním těchto rovností na druhou a dosazením do součtu s dostaneme

$$s = 16r^4 + 4r^4\left(\cos^2\varphi + \cos^2(\pi - \varphi) + \cos^2(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \cos^2(\frac{\pi}{2} + \varphi)\right) -$$

$$-8r^4\left(\cos\varphi + \cos(\pi - \varphi) + \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi)\right)\,.$$

Protože platí, že $\cos(\pi-\varphi) = -\cos\varphi$, $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \sin\varphi$ a $\cos(\frac{\pi}{2}+\varphi) = -\sin\varphi$, dostáváme

$$s = 16r^4 + 4r^4\left(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \sin^2\varphi)\right) -$$

$$-8r^4\left(\cos\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \sin\varphi)\right) = 24r^4\,.$$

To je hodnota nezávislá na volbě bodu P.

- $n = 6$
  Označme písmenem S součet

$$S = |PA|^6 + |PB|^6 + |PC|^6 + |PD|^6\,.$$

Při předpokladu a označení z předchozí části umocněním vyjádření $|\overrightarrow{PA}|^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\varphi$ na třetí dostáváme

$$|\overrightarrow{PA}|^6 = 8r^6 - 3\cdot 4r^4\cdot 2r^2\cos\varphi + 3\cdot 2r^2 4r^4\cos^2\varphi - 8r^6\cos^3\varphi =$$

$$= 8r^6 - 24r^6\cos\varphi + 24r^6\cos^2\varphi - 8r^6\cos^3\varphi\,,$$

analogicky

$$|\overrightarrow{PB}|^6 = 8r^6 - 24r^6\sin\varphi + 24r^6\sin^2\varphi - 8r^6\sin^3\varphi\,,$$

$$|\overrightarrow{PC}|^6 = 8r^6 + 24r^6\cos\varphi + 24r^6\cos^2\varphi + 8r^6\cos^3\varphi\,,$$

$$|\overrightarrow{PD}|^6 = 8r^6 + 24r^6\sin\varphi + 24r^6\sin^2\varphi + 8r^6\sin^3\varphi\,.$$

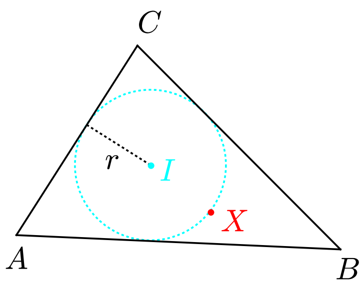
Pro součet S tak vychází

$$S = 32r^6 + 24r^6(-\cos\varphi - \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) + 24r^6(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) +$$

$$+8r^6(-\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 32r^6 + 0 + 24r^6\,2 + 0 = 80r^6\,.$$

A to je opět hodnota nezávislá na volbě bodu P. $\square$

Úloha 3.2.37: *Dokažte, že pro libovolný bod X kružnice vepsané trojúhelníku ABC o stranách a, b, c má součet $a|XA|^2 + b|XB|^2 + c|XC|^2$ tutéž hodnotu.*[69]



Řešení:
Označíme r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a I její střed, dále označíme s zkoumaný součet

$$s = a|XA|^2 + b|XB|^2 + c|XC|^2 .$$

Velikost $|XA|^2$ vyjádříme vektorově:

$$\left|\overrightarrow{XA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XI} + \overrightarrow{IA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{XI}\right|^2 + \left|\overrightarrow{IA}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IA}\right\rangle = r^2 + \left|\overrightarrow{IA}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IA}\right\rangle ,$$

analogicky

$$\left|\overrightarrow{XB}\right|^2 = r^2 + \left|\overrightarrow{IB}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IB}\right\rangle \qquad \text{a} \qquad \left|\overrightarrow{XC}\right|^2 = r^2 + \left|\overrightarrow{IC}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IC}\right\rangle .$$

Pro součet s dostáváme

$$s = ar^2 + a\left|\overrightarrow{IA}\right|^2 + 2a\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IA}\right\rangle + br^2 + b\left|\overrightarrow{IB}\right|^2 + 2b\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IB}\right\rangle + cr^2 + c\left|\overrightarrow{IC}\right|^2 + 2c\left\langle\overrightarrow{XI}, \overrightarrow{IC}\right\rangle =$$

$$= r^2(a+b+c) + a\left|\overrightarrow{IA}\right|^2 + b\left|\overrightarrow{IB}\right|^2 + c\left|\overrightarrow{IC}\right|^2 + 2\left\langle\overrightarrow{XI}, a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\right\rangle .$$

Podle části 2 Příkladu 3.1.21 platí, že $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{o}$, a tedy

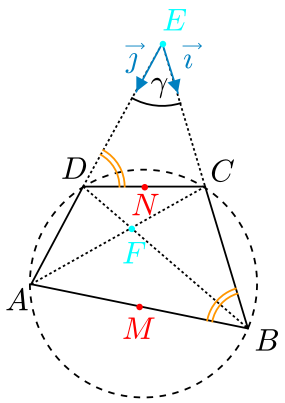
$$s = r^2(a+b+c) + a\left|\overrightarrow{IA}\right|^2 + b\left|\overrightarrow{IB}\right|^2 + c\left|\overrightarrow{IC}\right|^2 ,$$

což je hodnota, která nezávisí na volbě bodu X. $\square$

[69] [pra–86], str. 101, úloha 5.10.

Úloha 3.2.38: *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť bod F je průsečík přímek AC a BD a bod E průsečík přímek AD a BC. Dokažte, že pro vzdálenost středů M, N stran AB, CD platí vzorec*[70]

$$|MN| = \frac{|EF|}{2} \cdot \left| \frac{|AB|}{|CD|} - \frac{|CD|}{|AB|} \right| .$$



Řešení:
Označme jednotkové vektory

$$\vec{\imath} = \frac{1}{|EC|} \cdot \overrightarrow{EC}\,, \qquad \vec{\jmath} = \frac{1}{|ED|} \cdot \overrightarrow{ED}\,.$$

Dále označme $\gamma = |\sphericalangle AEB|$, $c = |EC|$, $d = |ED|$, pak $\overrightarrow{EC} = c\vec{\imath}$ a $\overrightarrow{ED} = d\vec{\jmath}$. Protože $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice, platí $|\sphericalangle ABE| = \pi - |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CDE|$, takže trojúhelníky ABE a CDE jsou podobné, a tedy

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{|BE|}{|DE|} = k\,,$$

kde k je kladné reálné číslo různé od 1, neboť v případě $|AB| = |CD|$ by přímky AD a BC byly rovnoběžné (ze shodnosti střídavých úhlů ACB a CAD jakožto obvodových úhlů příslušných shodným obloukům AB a CD opsané kružnice). Proto pro vektory $\overrightarrow{EA}$ a $\overrightarrow{EB}$ platí

$$\overrightarrow{EA} = kc\vec{\jmath}, \qquad \overrightarrow{EB} = kd\vec{\imath}.$$

Protože bod F leží na úsečce AC, existuje číslo $x \in (0,1)$ takové, že

$$\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{EA} + (1-x)\overrightarrow{EC} = xkc\vec{\jmath} + (1-x)c\vec{\imath},$$

protože bod F rovněž leží na úsečce DB, existuje číslo $y \in (0,1)$ takové, že

$$\overrightarrow{EF} = y\overrightarrow{EB} + (1-y)\overrightarrow{ED} = ykd\vec{\imath} + (1-y)d\vec{\jmath}.$$

[70] [gro–02], str. 32–33, úloha 2.

Protože vektory $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ tvoří bázi roviny, je vyjádření vektoru $\overrightarrow{EF}$ v této bázi jednoznačné a koeficienty v obou vyjádřeních se tedy musí rovnat. Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x a y:

$$xkc = (1-y)d\,, \qquad ykd = (1-x)c\,,$$

která má s ohledem na $k \neq 1$ jediné řešení

$$x = \frac{kd-c}{c(k^2-1)}\,, \qquad y = \frac{kc-d}{d(k^2-1)}\,.$$

Vektor $\overrightarrow{EF}$ má tudíž vyjádření

$$\overrightarrow{EF} = k\,(yd\vec{\imath} + xc\vec{\jmath}) = \frac{k}{k^2-1}\,((kc-d)\vec{\imath} + (kd-c)\vec{\jmath})$$

a pro jeho velikost platí

$$\big|\overrightarrow{EF}\big|^2 = \frac{k^2}{(k^2-1)^2}\,\big((kd-c)^2 + (kc-d)^2 + 2(kd-c)(kc-d)\cos\gamma\big)\;, \quad \text{kde } \cos\gamma = \langle\vec{\imath},\vec{\jmath}\rangle\,.$$

Nyní vyjádříme vektor $\overrightarrow{MN}$ a jeho velikost:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(C+D-A-B) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(d\vec{\jmath} - kc\vec{\jmath} + c\vec{\imath} - kd\vec{\imath}) = \frac{1}{2}\,((d-kc)\vec{\imath} + (c-kd)\vec{\jmath})\;,$$

$$\big|\overrightarrow{MN}\big|^2 = \frac{1}{4}\,\big((d-kc)^2 + (c-kd)^2 + 2(d-kc)(c-kd)\cos\gamma\big)\;.$$

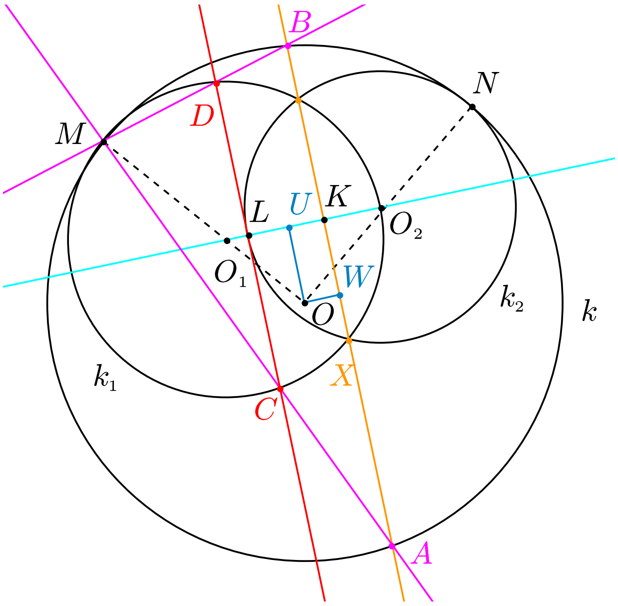
Dohromady tak dostáváme

$$\frac{|MN|^2}{|EF|^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{k^2-1}{k}\right)^2\;, \quad \text{neboli} \quad |MN| = \frac{|EF|}{2}\cdot\left|k - \frac{1}{k}\right| = \frac{|EF|}{2}\cdot\left|\frac{|AB|}{|CD|} - \frac{|CD|}{|AB|}\right|\,,$$

což je dokazovaná rovnost. □

Úloha 3.2.39: *Nechť k_1, k_2 jsou dvě kružnice, které leží ve vnitřní oblasti kružnice k tak, že se jí dotýkají po řadě v bodech M a N. Kromě toho kružnice k_1 prochází středem kružnice k_2. Přímka procházející dvěma průsečíky kružnic k_1 a k_2 protne kružnici k v bodech A a B. Přímky MA a MB protnou kružnici k_1 po řadě v bodech C a D. Dokažte, že přímka CD je tečna ke kružnici k_2.*[71]

[71] [kuc–03], str. 15, úloha 1999/5.



Řešení:
Označme O, O_1, O_2 po řadě středy kružnic k, k_1, k_2 a r, r_1, r_2 jejich poloměry. Nechť X je jeden z průsečíků kružnic k_1 a k_2. Dále nechť přímky AB a CD protínají přímku O_1O_2 po řadě v bodech K a L. Konečně nechť U a W jsou paty kolmic vedených z bodu O po řadě na přímky O_1O_2 a AB. Naším cílem bude dokázat vztahy $CD \perp O_1O_2$ a $L \in k_2$.

Uvažujme nyní stejnolehlost se středem M a koeficientem $\frac{r_1}{r}$, ve které se kružnice k zobrazí na kružnici k_1, takže se body $A, B \in k_1$ zobrazí na body $C, D \in k_2$, a proto $CD \parallel AB$, a tedy i $CD \perp O_1O_2$ (neboť $AB \perp O_1O_2$). První ze dvou potřebných vztahů je dokázán.

Druhý vztah $L \in k_2$, neboli $|O_2L| = r_2$ ověříme výpočtem délky $|O_2L|$ založeným na vektorových důsledcích zmíněné stejnolehlosti. V ní se střed O zobrazí na střed O_1, obrazem přímky OW je tedy přímka rovnoběžná s OW a procházející bodem O_1, to znamená přímka O_1O_2. Bod W (průsečík přímek AB a OW) se proto zobrazí na bod L (průsečík přímek CD a O_1O_2). Dostáváme tak

$$\overrightarrow{O_1L} = \frac{r_1}{r}\overrightarrow{OW} = \frac{r_1}{r}\overrightarrow{UK} = \frac{r_1}{r}\left(\overrightarrow{O_1K} - \overrightarrow{O_1U}\right). \tag{3.36}$$

Body K a U leží na přímce O_1O_2, vektory z pravé strany rovnosti (3.36) proto mají vyjádření

$$\overrightarrow{O_1K} = k\overrightarrow{O_1O_2}\,, \qquad \overrightarrow{O_1U} = u\overrightarrow{O_1O_2}\,, \tag{3.37}$$

pro vhodné reálné koeficienty k, u, které nyní vyjádříme v závislosti na poloměrech zadaných kružnic.

Vektory $\overrightarrow{KX}$ a $\overrightarrow{UO}$ jsou oba kolmé na vektor $\overrightarrow{O_1O_2}$, takže platí

$$\langle\overrightarrow{KX}, \overrightarrow{O_1O_2}\rangle = 0\,, \qquad \langle\overrightarrow{UO}, \overrightarrow{O_1O_2}\rangle = 0\,,$$

odkud spolu s rovnostmi (3.37) dostaneme

$$\langle\overrightarrow{O_1X}, \overrightarrow{O_1O_2}\rangle = \langle\overrightarrow{O_1K} + \overrightarrow{KX}, \overrightarrow{O_1O_2}\rangle = k\langle\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_2}\rangle = kr_1^2\,,$$

$$\left\langle \overrightarrow{O_1O}, \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{O_1U} + \overrightarrow{UO}, \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle = u\left\langle \overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle = ur_1^2 \,.$$

Nyní k určení koeficientu k využijeme rovnosti

$$r_2^2 = \left|\overrightarrow{O_2X}\right|^2 = \left\langle \overrightarrow{O_1X} - \overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1X} - \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle = \left|\overrightarrow{O_1X}\right|^2 + \left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{O_1X}, \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle =$$

$$= r_1^2 + r_1^2 - 2kr_1^2 \,, \quad \text{odtud} \qquad k = \frac{2r_1^2 - r_2^2}{2r_1^2} \,.$$

Pro koeficient u s využitím rovností $|OO_2| = r - r_2$ a $|OO_1| = r - r_1$ sestavíme rovnici

$$(r - r_2)^2 = \left|\overrightarrow{O_2O}\right|^2 = \left\langle \overrightarrow{O_1O} - \overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O} - \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle = \left|\overrightarrow{O_1O}\right|^2 + \left|\overrightarrow{O_1O_2}\right|^2 - 2\left\langle \overrightarrow{O_1O}, \overrightarrow{O_1O_2} \right\rangle =$$

$$= (r - r_1)^2 + r_1^2 - 2ur_1^2 \,, \quad \text{odtud} \qquad u = \frac{2r_1^2 - r_2^2 - 2rr_1 + 2rr_2}{2r_1^2} \,.$$

Z důsledku rovností (3.36) a (3.37)

$$\overrightarrow{O_2L} = \overrightarrow{O_1L} - \overrightarrow{O_1O_2} = \frac{r_1}{r}\left(\overrightarrow{O_1K} - \overrightarrow{O_1U}\right) - \overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{r_1}{r}(k - u) - 1\right)\overrightarrow{O_1O_2}$$

po dosazení za k a u dostáváme

$$\overrightarrow{O_2L} = \left(\frac{r_1}{r} \cdot \left(\frac{2rr_1 - 2rr_2}{2r_1^2}\right) - 1\right)\overrightarrow{O_1O_2} = \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1} - 1\right)\overrightarrow{O_1O_2} = -\frac{r_2}{r_1}\overrightarrow{O_1O_2} \,.$$

To ovšem znamená, že

$$|O_2L| = \frac{r_2}{r_1} \cdot |O_1O_2| = \frac{r_2}{r_1} \cdot r_1 = r_2 \,,$$

bod L tedy leží na kružnici k_2. Oba vztahy $CD \perp O_1O_2$ a $L \in k_2$ jsou tak dokázány a řešení úlohy je hotovo. □

Výpočty velikostí úhlů

Na úvod tohoto paragrafu připomeňme, že podle Definice 1.2.3 odchylkou dvou nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazýváme úhel φ z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ určený rovností (1.4)

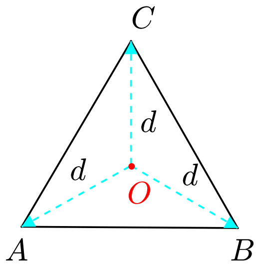
$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \,.$$

(Stejný vztah jsme v druhé části předchozího paragrafu od Úlohy 3.2.33 využívali k určování délek úseček.) V případě $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$ pak dostáváme, že skalární součin dvou jednotkových vektorů je roven kosinu jejich odchylky.

Zdůrazněme, že odchylkou dvou přímek se směrovými vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ rozumíme úhel φ z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ určený vzorcem

$$\cos\varphi = \frac{\left|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle\right|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \,.$$

Úloha 3.2.40: *Pro čtyři různé body O, A, B, C platí $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{o}$ a $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$. Dokažte, že ABC je rovnostranný trojúhelník.*[72]



Řešení:
Velikost vektorů $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, která je podle zadání stejná, označme

$$d=|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|>0\,.$$

Vyjdeme z předpokladu, že platí $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{o}$, který předně znamená, že bod O leží ve stejné rovině jako body A, B, C. Z rovnosti $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ obdržíme

$$d^2=\langle\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC}\rangle=\langle\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\rangle=2d^2+2\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle\,.$$

Pro skalární součin vektorů $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ odtud dostaneme, že

$$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=-\frac{1}{2}d^2=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\cos\frac{2\pi}{3}\,.$$

Z toho vzhledem k $d>0$ plyne, že vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ svírají úhel $\frac{2\pi}{3}$. Podobně lze dokázat, že i vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ a $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ svírají úhel $\frac{2\pi}{3}$. To již znamená, že trojúhelník ABC je rovnostranný.

Dodejme ještě malou obměnu závěru řešení: Z rovností

$$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\rangle=\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle=-\frac{1}{2}d^2$$

lze odvodit, že všechny tři vektory $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ rovné vektorům $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ mají velikost $d\sqrt{3}$, neboť např.

$$\langle\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\rangle=2d^2-2\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=3d^2\,.$$

Odtud plyne, že ABC je rovnostranný trojúhelník o straně $d\sqrt{3}$. □

[72] [pra–86], str. 100, úloha 4.

Úloha 3.2.41: *V prostoru jsou dány čtyři polopřímky se společným počátkem neležící v jedné rovině. Každé dvě z nich svírají stejně velký úhel. Vypočtěte ho.*[73]

Řešení:
Nechť $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ jsou jednotkové vektory na daných polopřímkách OA, OB, OC, OD se společným počátkem O. Pak skalární součin každých dvou z těchto vektorů je roven $\cos\alpha$, kde $\alpha \in (0,\pi)$ je hledaný úhel, takže např. pro vzdálenost bodů A, B platí

$$|AB|^2 = \left|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right\rangle = 2 - 2\cos\alpha\,.$$

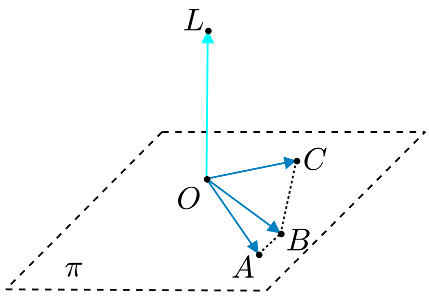
Vzdálenost $\sqrt{2-2\cos\alpha}$ mají každé dva různé body z $\{A\,, B\,, C\,, D\}$, takže čtyřstěn $ABCD$ je pravidelný. Tudíž bod O je nejen střed kulové plochy opsané tomuto čtyřstěnu, ale také jeho těžiště, a proto

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{o}\,.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost skalárně vektorem $\overrightarrow{OA}$, dostaneme

$$1 + \cos\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha = 0\,, \qquad \text{odkud} \qquad \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{3}\,. \qquad \square$$

Úloha 3.2.42: *Nechť je v prostoru dána přímka l, která svírá stejný úhel se třemi danými navzájem různoběžnými přímkami v rovině π. Ukažte, že přímka l je kolmá na rovinu π.*[74]



Řešení:
V dané rovině π zvolme bod O. K němu určeme body L, A, B, C tak, aby $\overrightarrow{OL}$ byl jednotkový vektor ve směru přímky l a jednotkové vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ v rovině π byly směrové vektory daných přímek vybrané tak, aby všechny tři úhly mezi vektorem $\overrightarrow{OL}$ a vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ležely v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Protože vektory $\overrightarrow{OL}$ a $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ jsou jednotkové, jsou skalární součiny těchto vektorů rovny kosinům odchylek těchto přímek, takže podle zadání platí

$$\left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OA}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OC}\right\rangle.$$

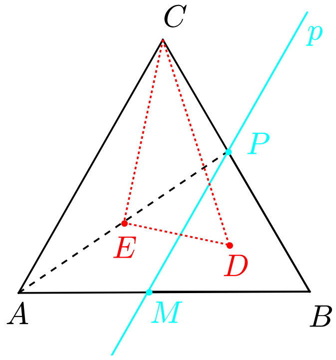
Odečtením druhého a pak třetího skalárního součinu od prvního odtud dostaneme rovnosti

$$0 = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{BA}\right\rangle, \qquad 0 = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\right\rangle = \left\langle\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{CA}\right\rangle.$$

[73] [jur–96], str. 102, úloha 3.14.
[74] [bar–95], str. 6, úloha 53.

To ovšem znamená, že $\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{OL} \perp \overrightarrow{CA}$. Body A, B, C jsou (díky různoběžnosti třech zadaných přímek) tři navzájem různé body na jednotkové kružnici se středem O, takže neleží v přímce, tudíž BA a CA jsou různoběžné přímky roviny π, a tedy vektor $\overrightarrow{OL}$ je kolmý na rovinu π. $\square$

Úloha 3.2.43: *Nechť přímka p rovnoběžná se stranou AC rovnostranného trojúhelníku ABC protíná strany AB a BC po řadě v bodech M a P. Označme D těžiště trojúhelníku PMB a E střed úsečky AP. Určete vnitřní úhly trojúhelníku DEC.*[75]



Řešení:
Označme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ a $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$. Protože podle zadání je trojúhelník ABC rovnostranný, můžeme ještě označit $a = |\vec{a}| = |\vec{c}|$, kromě toho platí $|\sphericalangle \vec{a}, \vec{c}| = \frac{\pi}{3}$. Odtud pro skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{c}$ dostáváme

$$\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}\,.$$

Protože přímka p je podle zadání rovnoběžná se stranou AC trojúhelníku ABC, platí

$$\overrightarrow{BM} = k\vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{BP} = k\vec{c},$$

kde k je reálné číslo z intervalu $(0, 1)$.

Nyní vyjádříme bod D, který je podle zadání těžištěm trojúhelníku MBP, a bod E, který je středem úsečky AP:

$$D = \frac{1}{3}(B + M + P)\,, \qquad E = \frac{1}{2}(A + P)\,.$$

Pro příslušné vektory tak dostáváme

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}k(\vec{a} + \vec{c})\,, \qquad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{c}.$$

Nyní můžeme pomocí vektorů $\vec{a}$ a $\vec{c}$ vyjádřit vektory stran trojúhelníku DEC:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{c} - \vec{c} = \frac{1}{3}k\vec{a} + \left(\frac{1}{3}k - 1\right)\vec{c},$$

[75] [eng–97], str. 300, úloha 30; [švr–01], str. 49, úloha 2.

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \left(\frac{1}{2}k - 1\right)\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}k\vec{a} - \frac{1}{3}k\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{c} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}k\right)\vec{a} + \frac{1}{6}k\vec{c}.$$

Dále pomocí skalárních součinů najdeme délky těchto tří stran:

$$|DE|^2 = \langle\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DE}\rangle = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}k + \frac{1}{9}k^2\right)a^2 + \frac{1}{12}ka^2 - \frac{1}{18}k^2a^2 + \frac{1}{36}k^2a^2 = \frac{a^2}{12}(3 - 3k + k^2)\,,$$

$$|CE|^2 = \langle\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CE}\rangle = \frac{1}{4}a^2 + \left(\frac{1}{4}k^2 - k + 1\right)a^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k - 1\right)\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{4}(3 - 3k + k^2)\,,$$

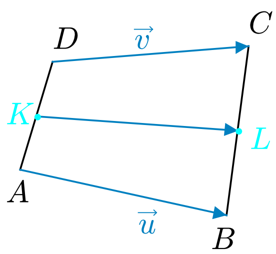
$$|CD|^2 = \langle\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}\rangle = \frac{1}{9}k^2a^2 + \left(\frac{1}{9}k^2 - \frac{2}{3}k + 1\right)a^2 + \frac{2}{3}k\left(\frac{1}{3}k - 1\right)\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{3}(3 - 3k + k^2)\,.$$

Odtud již vidíme, že $|CD|^2 = 4|DE|^2$ a $|CE|^2 = 3|DE|^2$, tudíž jde o známý pravoúhlý trojúhelník s ostrými úhly $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{6}$:

$$|\sphericalangle CDE| = \frac{\pi}{3}\,, \qquad |\sphericalangle DCE| = \frac{\pi}{6}\,, \qquad |\sphericalangle CED| = \frac{\pi}{2}\,. \qquad \square$$

Úloha 3.2.44: *Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB a CD jsou shodné.*

1. *Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy K, L stran AD a BC.*
2. *Dokažte, že přímky AB a CD svírají stejný úhel s přímkou, která prochází středy M, N úhlopříček AC a BD.*[76]



Řešení:

1. Pro vektory $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - D$ podle zadání platí $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Pro vektor $\overrightarrow{KL}$ určený středy stran AD a BC platí

$$\overrightarrow{KL} = L - K = \frac{B + C}{2} - \frac{A + D}{2} = \frac{B + C - A - D}{2} = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}\,.$$

[76] [pra–86], str. 120, úloha 6.16, řešení vlastní.

Nyní porovnáme kosiny úhlů, které svírají vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ s vektorem $\overrightarrow{KL}$:

$$\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{KL}\right) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|}\,,$$

$$\cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{KL}\right) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|} = \frac{|\vec{v}|^2 + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}+\vec{v}|}\,.$$

S využitím toho, že $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ a že $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, dostáváme

$$\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{KL}\right) = \cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{KL}\right)\,.$$

Úhel dvou vektorů leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, takže pokud se kosiny takových dvou úhlů rovnají, rovnají se i samy úhly. Tím je důkaz hotov.

2. Stejně jako v předchozí části uvážíme vektory $\vec{u} = B - A$, $\vec{v} = C - D$, pro něž podle zadání platí $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Pro vektor $\overrightarrow{MN}$ určený středy úhlopříček AC a BD platí

$$\overrightarrow{MN} = N - M = \frac{B+D}{2} - \frac{A+C}{2} = \frac{B+D-A-C}{2} = \frac{\vec{u}-\vec{v}}{2}\,.$$

Opět porovnáme kosiny úhlů, které svírají vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ s vektorem $\overrightarrow{MN}$:

$$\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{u}-\vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|}\,,$$

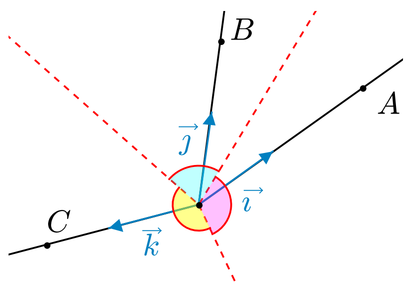
$$\cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{MN}\right) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|} = \frac{-|\vec{v}|^2 + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle}{|\vec{v}|\cdot|\vec{u}-\vec{v}|}\,.$$

S využitím toho, že $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$ a že podle zadání je $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, dostáváme

$$\cos\left(\vec{u}, \overrightarrow{MN}\right) = \cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{MN}\right)\,.$$

Stejně jako v první části odtud plyne, že oba úhly jsou shodné. Obě přímky AB a CD tedy svírají s přímkou MN stejný úhel. □

Úloha 3.2.45: *V prostoru jsou dány tři různé polopřímky OA, OB, OC se stejným počátkem O, přičemž žádné dvě z nich nejsou navzájem opačné. Ukažte, že všechny tři úhly tvořené osami úhlů AOB, BOC a COA jsou buď ostré, nebo tupé, nebo pravé.*[77]



[77] [sav–03], str. 29–30.

Řešení:
Úvodem poznamenejme, že úhel mezi dvěma nenulovými vektory je ostrý, resp. pravý, resp. tupý, je-li skalární součin těchto dvou vektorů kladný, resp. nulový, resp. záporný.

Nechť $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné postupně s vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Pak (dle předpokladu nenulové) vektory $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}+\vec{k}$, $\vec{\imath}+\vec{k}$ jsou vektory souhlasně rovnoběžné postupně s osami úhlů AOB, BOC a COA. S využitím toho, že $|\vec{\imath}|^2 = |\vec{\jmath}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1$ dostáváme pro potřebné skalární součiny vyjádření

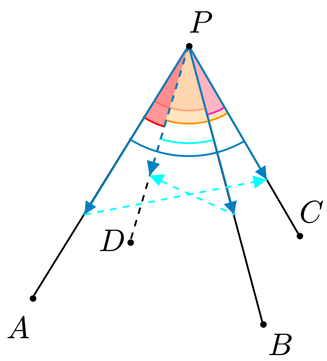
$$\begin{aligned}
\langle \vec{\imath}+\vec{\jmath}, \vec{\jmath}+\vec{k}\rangle &= |\vec{\jmath}|^2 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle = 1 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle\,,\\
\langle \vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{\imath}+\vec{k}\rangle &= |\vec{k}|^2 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle = 1 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle\,,\\
\langle \vec{\imath}+\vec{k}, \vec{\imath}+\vec{\jmath}\rangle &= |\vec{\imath}|^2 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle = 1 + \langle \vec{\imath}, \vec{\jmath}\rangle + \langle \vec{\jmath}, \vec{k}\rangle + \langle \vec{\imath}, \vec{k}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Tyto tři skalární součiny se rovnají, jsou tedy všechny tři buď kladné, nebo nulové, nebo záporné. Odtud již plyne požadované tvrzení, že úhly mezi osami úhlů AOB, BOC a COA jsou buď všechny tři ostré, nebo pravé, nebo tupé. □

Úloha 3.2.46: *V prostoru jsou dány čtyři polopřímky PA, PB, PC, PD tak, že žádné tři z nich neleží v rovině a že pro úhly jimi sevřené platí*

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DPA| = \varphi\,.$$

Určete největší možnou hodnotu $|\sphericalangle APC| + |\sphericalangle BPD|$ v závislosti na parametru $\varphi \in (0, \pi)$.[78]



Řešení:
Nechť $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ jsou jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné postupně s vektory $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$. Pro jejich skalární součiny podle zadání platí

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle \vec{c}, \vec{d}\rangle = \langle \vec{d}, \vec{a}\rangle = \cos\varphi\,. \tag{3.38}$$

Hledáme největší hodnotu součtu $\alpha + \beta$, kde $\alpha = |\sphericalangle APC|$ a $\beta = |\sphericalangle BPD|$ jsou úhly z intervalu $(0, \pi)$ určené rovnostmi

$$\cos\alpha = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle\,, \qquad \cos\beta = \langle \vec{b}, \vec{d}\rangle\,. \tag{3.39}$$

[78] [mur–88], str. 77–78, úloha G.I./9(1984/3).

Z předpokladu úlohy o poloze polopřímek PA, PB, PC, PD vyplývá, že žádný ze čtyř vektorů $\vec{a} \pm \vec{c}$, $\vec{b} \pm \vec{d}$ není nulový. Z (3.38) plyne, že tyto vektory splňují rovnosti

$$\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} + \vec{d} \rangle = \langle \vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{d} \rangle = 0\,,$$

zatímco rovnosti

$$\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} + \vec{d}, \vec{b} - \vec{d} \rangle = 0$$

jsou podle (3.1) důsledkem toho, že $|\vec{a}| = |\vec{c}|$ a $|\vec{b}| = |\vec{d}|$. Vidíme, že každý z vektorů $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{d}$ je kolmý jak na vektor $\vec{a} - \vec{c}$, tak na k němu kolmý vektor $\vec{b} - \vec{d}$. To v (třírozměrném) prostoru znamená, že vektory $\vec{a} + \vec{c}$ a $\vec{b} + \vec{d}$ jsou lineárně závislé, a tudíž platí

$$\left|\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{d} \rangle\right| = |\vec{a} + \vec{c}| \cdot |\vec{b} + \vec{d}|\,.$$

Protože podle (3.38) a (3.39) jsou splněny rovnosti

$$\langle \vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{d} \rangle = 4\cos\varphi\,, \qquad |\vec{a} + \vec{c}|^2 = 2 + 2\cos\alpha\,, \qquad |\vec{b} + \vec{d}|^2 = 2 + 2\cos\beta\,,$$

zjišťujeme, že zkoumané úhly α, β vyhovují vztahu

$$4|\cos\varphi| = \sqrt{2 + 2\cos\alpha} \cdot \sqrt{2 + 2\cos\beta} = 2\sqrt{(1 + \cos\alpha)(1 + \cos\beta)} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,.$$

Poslední rovnost s využitím goniometrických vzorců pro $\cos(x \pm y)$ přepíšeme do tvaru

$$\cos\frac{\alpha + \beta}{2} = 2|\cos\varphi| - \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,.$$

Protože funkce kosinus je klesající na intervalu $(0, \pi)$ a oba úhly α, β, a tedy i úhel $\frac{\alpha+\beta}{2}$, leží v intervalu $(0, \pi)$, bude mít součet $\alpha+\beta$ maximální hodnotu, právě když bude hodnota $\cos(\alpha+\beta)$ minimální. To podle odvozeného vztahu nastane pro maximální hodnotu $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, rovnou 1 pro $\alpha = \beta$. Rovnost

$$\max(\alpha + \beta) = 2\arccos(2|\cos\varphi| - 1)$$

tak bude dokázána pro každou hodnotu $\varphi \in (0, \pi)$, pro kterou existuje čtveřice vyhovujících polopřímek PA, PB, PC, PD splňující doplňující podmínku $\alpha = \beta$, tj. $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$. Ukážeme, že je tomu tak pro každé $\varphi \in (0, \pi)$ s výjimkou $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kdy podmínky zadání nelze splnit (obě polopřímky PA, PC by musely být kolmé na rovinu PBD, takže by platilo $\vec{c} = \vec{a}$ nebo $\vec{c} = -\vec{a}$). Zvolíme-li čtverec $ABCD$ a bod P necháme probíhat přímku jdoucí středem čtverce kolmo k jeho rovině, dostaneme vyhovující čtveřice polopřímek PA, PB, PC, PD zřejmě pro každé $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, přitom rovnost $|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle BPD|$ plyne z rotace kolem zmíněné kolmice o úhel $\frac{\pi}{2}$. Zaměníme-li přitom polopřímky PA, PC polopřímkami PA', PC', které jsou k nim opačné, dostaneme z příkladu pro hodnotu φ příklad pro hodnotu $\pi - \varphi$, která proběhne interval $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. $\square$

Důkazy nerovností

V tomto paragrafu budeme využívat především Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost, která plyne ze základních vlastností skalárního součinu a byla uvedena v Podkapitole 1.2 jakožto vztah (1.2)

$$-|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \leq \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \,.$$

Připomeňme, že tyto nerovnosti platí pro libovolné dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ téhož eukleidovského prostoru V. Kromě případů $\vec{u} = \vec{o}$ a $\vec{v} = \vec{o}$, v první, resp. druhé nerovnosti přitom nastane rovnost, jen když jsou vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ nesouhlasně, resp. souhlasně rovnoběžné.

V některých úlohách budeme namísto nerovnosti (1.2) využívat její významný důsledek, totiž známou trojúhelníkovou nerovnost (1.3)

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \,.$$

Jak víme, rovnost v této nerovnosti nastane právě tehdy, když je buď alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový, nebo jsou (nenulové) vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ souhlasně rovnoběžné. Při řešení nejen prvních dvou úloh ovšem vystačíme s pouhou zřejmou nerovností $|\vec{u}| \geq 0$, i když volba vektoru $\vec{u}$ bude vždy poměrně rafinovaná.

Úloha 3.2.47: *Dokažte, že pro libovolný trojúhelník ABC a každý bod O platí*[79]

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 3(|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2) \,.$$

Řešení:
Na zadanou nerovnost budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2 \geq 0 \,,$$

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}|^2 \geq 0 \,,$$

$$3|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 + 3|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \rangle - |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 +$$

$$+2\langle \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \rangle - |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle \geq 0 \,,$$

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle + 2\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \rangle + 2\langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle \geq 0 \,,$$

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 \geq 0 \,,$$

Poslední (a tedy i původní) nerovnost platí vždy. □

[79] [eng–97], str. 299, úloha 15.

Poznámka:
Dokázaný výsledek ve speciálním případě, kdy bod O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, vede při označení r poloměru zmíněné kružnice k odhadu

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2 \leq 9r^2\,,$$

zmíněném v závěru řešení Příkladu 3.1.18. Zajímavé zobecnění takové nerovnosti pro libovolnou n-tici bodů na kulové ploše v prostoru uvádíme hned jako následující úlohu.

Úloha 3.2.48: *Pro libovolné body $P_1, P_2, \ldots, P_n$ na jednotkové kulové ploše platí*

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} |P_iP_j|^2 \leq n^2\,.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.[80]

Řešení:
Označme jednotkové vektory $\vec{v}_i = \overrightarrow{OP_i}$, kde O je střed dané kulové plochy. Pro vzdálenost každých dvou daných bodů P_i a P_j na kulové ploše platí

$$|P_iP_j|^2 = |\vec{v}_j - \vec{v}_i|^2 = |\vec{v}_i|^2 + |\vec{v}_j|^2 - 2\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = 2 - 2\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle\,.$$

Odtud pro součet všech těchto vzdáleností plyne vyjádření

$$\sum_{i<j} |P_iP_j|^2 = \sum_{i<j}(2 - 2\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle) = n(n-1) - 2\sum_{i<j}\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = n^2 - n - 2\sum_{i<j}\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle\,.$$

Nerovnost $\sum_{i<j} |P_iP_j|^2 \leq n^2$ je tedy ekvivalentní s nerovností

$$2\sum_{i<j}\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle \geq -n\,,$$

kterou dokážeme ze zřejmého odhadu

$$0 \leq \left|\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\vec{v}_i|^2 + 2\sum_{i<j}\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = n + 2\sum_{i<j}\langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle\,.$$

Odtud zřejmě dostáváme potřebnou nerovnost. Zároveň vidíme, že rovnost v dokázané nerovnosti nastane, právě když $\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i = \vec{o}$, tedy právě když $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} = \vec{o}$. □

Úloha 3.2.49: *Nechť ABC je trojúhelník s těžištěm T. Najděte polohu bodu P v rovině trojúhelníku ABC, při které je hodnota součtu*

$$|AP| \cdot |AT| + |BP| \cdot |BT| + |CP| \cdot |CT|$$

minimální.[81]

[80] [eng–97], str. 300–301, úloha 40.
[81] [dju–06], str. 314, úloha 17, navržena Velkou Británií pro 42. MMO v USA r. 2001.

Řešení:
Pro součiny ze zkoumaného součtu platí odhady

$$|AP| \cdot |AT| \geq \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AT} \rangle = \langle \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{AT} \rangle = |\overrightarrow{AT}|^2 + \langle \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{AT} \rangle \,,$$

$$|BP| \cdot |BT| \geq \langle \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BT} \rangle = \langle \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{BT} \rangle = |\overrightarrow{BT}|^2 + \langle \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{BT} \rangle \,,$$

$$|CP| \cdot |CT| \geq \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CT} \rangle = \langle \overrightarrow{CT} + \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{CT} \rangle = |\overrightarrow{CT}|^2 + \langle \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{CT} \rangle \,.$$

Sečtením těchto nerovností a s využitím rovnosti $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \vec{o}$ dostaneme

$$|AP| \cdot |AT| + |BP| \cdot |BT| + |CP| \cdot |CT| \geq |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 + \langle \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} \rangle =$$

$$= |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2 \,.$$

Přitom je zřejmé, že rovnosti ve sčítaných odhadech nastanou pouze pro $P = T$, neboť bod P musí ležet současně na třech polopřímkách AT, BT, CT. V tom jediném případě má tedy zkoumaný součet minimální hodnotu. □

Úloha 3.2.50: *Nechť A, B, C, D jsou libovolné čtyři body v prostoru. Ukažte, že platí nerovnost*

$$2|AB| \cdot |CD| + |AD|^2 + |BC|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.[82]

Řešení:
Dokazovanou nerovnost přepíšeme do tvaru

$$|AC|^2 + |BD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 \leq 2|AB| \cdot |CD| \,,$$

a všimneme si, že podle výsledku Příkladu 3.1.3 obecně platí

$$|AC|^2 + |BD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 = 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \rangle \,.$$

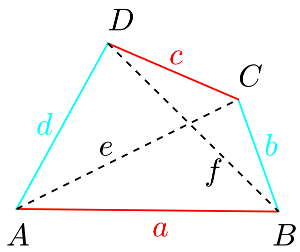
Proto vše plyne z Cauchyovy-Schwartzovy nerovnosti

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \rangle \leq |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}| = |AB| \cdot |CD| \,.$$

Rovnost v dokázané nerovnosti nastane právě tehdy, když je jeden z vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ nulový, nebo jde o dva souhlasně rovnoběžné vektory. □

[82] [pon–04], str. 100, úloha 13.4, část 3, zobecnění úlohy pro libovolné body v rovině do prostoru.

Poznámka:



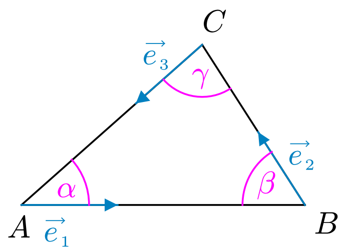
Jako důsledek výsledku úlohy dostáváme, že pro délky stran a úhlopříček libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ při obvyklém označení (jako na obrázku) platí

$$2ac + b^2 + d^2 \geq e^2 + f^2 \,,$$

přitom rovnost nastane, právě když $AB \parallel CD$ (právě tehdy jsou totiž vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ souhlasně rovnoběžné).

Úloha 3.2.51: *Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC platí*[83]

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2} \,.$$



ŘEŠENÍ:
Označme α, β, γ po řadě vnitřní úhly trojúhelníku ABC a $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ jednotkové vektory souhlasně rovnoběžné po řadě s vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{CA}$. Pro skalární součiny těchto vektorů dostáváme

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = -\cos\beta \,, \qquad \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = -\cos\alpha \,, \qquad \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = -\cos\gamma \,.$$

Pro velikost vektoru $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ platí zřejmá nerovnost

$$\left| \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right|^2 \geq 0 \,,$$

ze které roznásobením a dosazením kosinů úhlů dostaneme

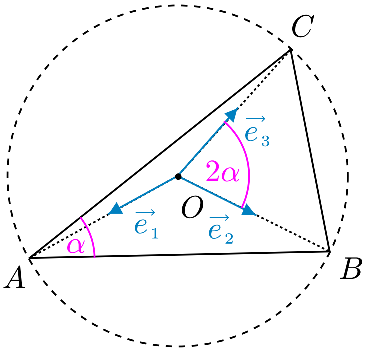
$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right|^2 &= 1 + 1 + 1 + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + 2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \\ &= 3 - 2\cos\alpha - 2\cos\beta - 2\cos\gamma \,. \end{aligned}$$

Odtud již plyne dokazovaná nerovnost. □

[83] [pon–04], str. 99, úloha 13.4, část 1.

Úloha 3.2.52: *Dokažte, že pro kosiny vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC platí*[84]

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq -\frac{3}{2}\,.$$



Řešení:
Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, úhly trojúhelníku ABC po řadě α, β, γ a jednotkové vektory určené vztahy $\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = r\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = r\vec{e}_3$, kde r je poloměr kružnice opsané.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu v kružnici platí

$$|\sphericalangle BOC| = 2\alpha\,, \qquad |\sphericalangle AOC| = 2\beta\,, \qquad |\sphericalangle AOB| = 2\gamma\,.$$

Pro skalární součiny jednotkových vektorů $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ dostáváme

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \cos 2\gamma\,, \qquad \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \cos 2\beta\,, \qquad \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \cos 2\alpha\,.$$

Pro velikost vektoru $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ platí nerovnost

$$\left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right|^2 \geq 0\,,$$

z níž roznásobením a dosazením kosinů dostaneme

$$0 \leq \left|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right|^2 = 1 + 1 + 1 + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + 2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle =$$
$$= 3 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 2\beta + 2\cos 2\gamma\,.$$

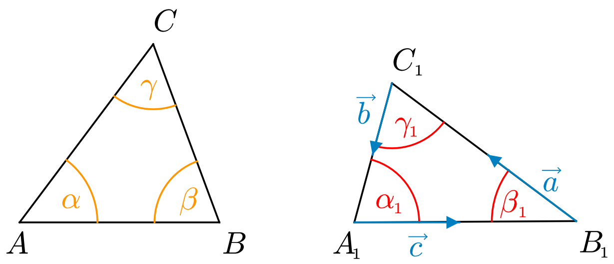
Odtud již plyne dokazovaná nerovnost. □

Úloha 3.2.53: *Jsou dány dva trojúhelníky s vnitřními úhly α, β, γ a α_1, β_1, γ_1. Dokažte, že platí*

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma\,, \tag{3.40}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$.[85]

[84] [pon–04], str. 99–100, úloha 13.4 část 2.
[85] [sav–03], str. 31.



Řešení:
Dva trojúhelníky s odpovídajícími úhly podle zadání označme ABC, $A_1B_1C_1$. Nejprve nerovnost (3.40) ze zadání vynásobíme číslem $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma > 0$ a dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned}\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta_1 + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1 \le \\ \le \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\sin\gamma\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\,.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Zafixujme α, β, γ a levou stranu L nerovnosti (3.41) považujme za funkci proměnných α_1, β_1, γ_1, kde $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$ a $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$. Máme dokázat, že tato funkce nabývá své maximální hodnoty pouze pro $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, kdy zřejmě v (3.41) nastane rovnost.

Uvažujme vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ souhlasně rovnoběžné postupně s vektory $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{C_1A_1}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ o velikostech $|\vec{a}| = \sin\alpha$, $|\vec{b}| = \sin\beta$, $|\vec{c}| = \sin\gamma$. Pak pro vzájemné skalární součiny těchto vektorů platí

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(-\cos\gamma_1) = -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma_1\,,$$
$$\langle\vec{a},\vec{c}\rangle = -\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta_1\,,\qquad \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = -\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha_1\,.$$

Pro levou stranu nerovnosti (3.41) tak dostáváme

$$L = -\Big(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle\Big) = \frac{1}{2}\Big(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2\Big) \le \frac{1}{2}\Big(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2\Big)\,.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{o}$, když tedy může být z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zkonstruován trojúhelník, tzn. trojúhelník s délkami stran $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ a protilehlými úhly α_1, β_1, γ_1. Ze sinové věty plyne, že to lze právě tehdy, když $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$. Tím je tvrzení o maximu levé strany (3.41) dokázáno. □

Úloha 3.2.54: *Je dán čtyřstěn $ABCD$, ve kterém $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = a_1$, $|BD| = b_1$, $|CD| = c_1$.*

1. *Dokažte, že existuje právě jeden bod P, který splňuje podmínku*
$$|PA|^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = |PB|^2 + a^2 + b_1^2 + c^2 = |PC|^2 + a^2 + b^2 + c_1^2 = |PD|^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\,.$$
2. *Pro bod P z části 1 dokažte nerovnost*
$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \ge 4r^2\,,$$
kde r je poloměr kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Dále najděte nutnou a dostačující podmínku, aby daná nerovnost přešla v rovnost.[86]

[86] [tho–07], str. 28, úloha GT-1997-1.

Řešení:

1. Nechť O je střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Nejprve vyjádříme potřebné velikosti úseček z bodu A užitím skalárního součinu vektorů:

$$|PA|^2 = |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 = |OP|^2 + r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

$$a_1^2 = |AD|^2 = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}|^2 = 2r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\rangle\,,$$

$$b^2 = |AC|^2 = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}|^2 = 2r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\rangle\,,$$

$$c^2 = |AB|^2 = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = 2r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle\,.$$

Sečtením předchozích rovností dostaneme

$$|PA|^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = |OP|^2 + 7r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OP}\rangle\,.$$

Nyní označíme T těžiště čtyřstěnu: $T = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$. Po dosazení do upravené rovnosti

$$|PA|^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = |OP|^2 + 7r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, (A + B + C + D - 4O) - A + O + \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

dostaneme

$$|PA|^2 + a_1^2 + b^2 + c^2 = |OP|^2 + 9r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle\,.$$

Analogicky pro součty odpovídající vrcholům B, C, D platí

$$|PB|^2 + a^2 + b_1^2 + c^2 = |OP|^2 + 9r^2 - 2\langle\overrightarrow{OB}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

$$|PC|^2 + a^2 + b^2 + c_1^2 = |OP|^2 + 9r^2 - 2\langle\overrightarrow{OC}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

$$|PD|^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = |OP|^2 + 9r^2 - 2\langle\overrightarrow{OD}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle\,.$$

Podmínka ze zadání části 1 je tedy ekvivalentní podmínce

$$\langle\overrightarrow{OA}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = \langle\overrightarrow{OB}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = \langle\overrightarrow{OC}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = \langle\overrightarrow{OD}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

a to je (po odečtení pravého krajního součinu) ekvivalentní s rovnostmi

$$\langle\overrightarrow{DA}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = \langle\overrightarrow{DB}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = \langle\overrightarrow{DC}, 4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}\rangle = 0\,.$$

To ovšem znamená právě to, že vektor $4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP}$ je kolmý na tři lineárně nezávislé vektory $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ (neboť body A, B, C, D tvoří čtyřstěn), což v trojrozměrném prostoru splňuje jedině vektor $4\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{OP} = \vec{o}$. Odtud plyne, že vyhovující bod P existuje, je jediný a je určen rovností

$$P = O - 4\overrightarrow{OT}\,.$$

2. Z části 1 víme, že

$$|PA|^2 = |OP|^2 + r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\rangle\,, \qquad |PB|^2 = |OP|^2 + r^2 - 2\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

$$|PC|^2 = |OP|^2 + r^2 - 2\langle\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}\rangle\,, \qquad |PD|^2 = |OP|^2 + r^2 - 2\langle\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OP}\rangle\,.$$

Sečtením těchto čtyř rovností dostaneme

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4|OP|^2 + 4r^2 - 2\langle\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OP}\rangle =$$

$$= 4|OP|^2 + 4r^2 - 2\langle 4\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP}\rangle = 4|OP|^2 + 4r^2 - 8\langle\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP}\rangle\,,$$

kde T stejně jako v části 1 označuje těžiště čtyřstěnu. Jak jsme dokázali, bod P je určen vztahem $\overrightarrow{OP} = -4\overrightarrow{OT}$. Po dosazení a provedení ekvivalentních úprav dostaneme

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 4(4|OT|)^2 + 4r^2 - 8\langle\overrightarrow{OT}, -4\overrightarrow{OT}\rangle =$$

$$= 64|OT|^2 + 4r^2 + 32\langle\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OT}\rangle = 4r^2 + 96|OT|^2\,.$$

Odtud je již zřejmé, že

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 \geq 4r^2\,,$$

přičemž rovnost nastane pro takové čtyřstěny $ABCD$, ve kterých platí $O = T$, tj. ve kterých střed opsané kulové plochy splývá s těžištěm. □

Úloha 3.2.55: *V kruhu se středem O a poloměrem r je dáno n bodů $A_1, \ldots, A_n$. Dokažte, že v součtu $\vec{u} = \pm\overrightarrow{OA_1} \pm \overrightarrow{OA_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{OA_n}$ je možné vybrat znaménka tak, aby platilo $|\vec{u}| \leq r\sqrt{2}$.*[87]

Řešení:
Je-li k z n vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ nulových, pak je zřejmě jedno, jaké znaménko v součtu u nich zvolíme a tyto vektory neovlivní velikost výsledného vektoru $\vec{u}$. Problém tedy přejde ve stejný problém pro $n - k$ nenulových vektorů.

Mějme nejprve dány tři nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, pro které platí

$$|\vec{a}| \leq r \qquad |\vec{b}| \leq r \qquad |\vec{c}| \leq r\,.$$

Zřejmě dva z šesti vektorů $\pm\vec{a}, \pm\vec{b}, \pm\vec{c}$ svírají úhel nejvýše $\frac{\pi}{3}$ (neboť $2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$), nechť jsou to např. vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ s úhlem $\varphi \leq \frac{\pi}{3}$, pak $\cos\varphi \geq \frac{1}{2}$. Pro velikost vektoru $\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$ dostáváme

$$|\vec{d}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\varphi \leq |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - |\vec{x}|\,|\vec{y}| \leq \max\{|\vec{x}|^2, |\vec{y}|^2\} \leq r^2\,,$$

protože pro kladná čísla a, b, je-li např. $a \geq b$, platí $a^2 + b^2 - ab = a^2 + b(b - a) \leq a^2$, neboť $b(b - a) \leq 0$. Odtud $|\vec{d}| \leq r$. Proto můžeme přejít od tří vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ke dvěma vektorům

[87] [pra–86], str. 103, úloha 5.24; [eng–97], str. 299, úloha 22.

(vektoru $\vec{d}$ a zbývajícímu ze tří vektorů), z nichž oba opět mají velikost nejvýše r. Analogicky bychom přešli od čtyř vektorů ke třem, obecně od n k $n-1$ vektorům.

Tímto způsobem přejdeme od problému s obecným n k problému pro $n=2$. Mějme tedy dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ o velikostech nejvýše r. Platí

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)\le 4r^2\,,$$

odtud vyplývá, že jedno z nezáporných čísel $|\vec{a}\pm\vec{b}|^2$ je nejvýše $2r^2$, tudíž platí $|\vec{a}\pm\vec{b}|\le r\sqrt{2}$ s vhodným znaménkem. □

Poznámka:
Pro libovolné vektory $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ zřejmě platí:

$$\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\};\,i=1,2,\ldots,n}|\varepsilon_1\vec{a}_1+\varepsilon_2\vec{a}_2+\cdots+\varepsilon_n\vec{a}_n|^2=$$

$$=\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\};\,i=1,2,\ldots,n}\langle\varepsilon_1\vec{a}_1+\varepsilon_2\vec{a}_2+\cdots+\varepsilon_n\vec{a}_n,\varepsilon_1\vec{a}_1+\varepsilon_2\vec{a}_2+\cdots+\varepsilon_n\vec{a}_n\rangle^2=$$

$$=\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\};\,i=1,2,\ldots,n}\left(\sum_{k=1}^{n}|\vec{a}_k|^2+\sum_{\varepsilon_j\in\{-1,1\};\,j\neq i}\langle\varepsilon_i\vec{a}_i,\varepsilon_j\vec{a}_j\rangle\right)=$$

$$=2^n\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|^2+\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\};\,i=1,2,\ldots,n}\left(\sum_{\varepsilon_j\in\{-1,1\};\,j\neq i}\langle\varepsilon_i\vec{a}_i,\varepsilon_j\vec{a}_j\rangle\right).$$

U skalárního součinu $\langle\varepsilon_i\vec{a}_i,\varepsilon_j\vec{a}_j\rangle$ existují čtyři volby znamének ε_i a ε_j, buď jsou znaménka u vektorů $\vec{a}_i$ a $\vec{a}_j$ obě kladné, nebo obě záporné, nebo u vektoru $\vec{a}_i$ je kladné a u vektoru $\vec{a}_j$ je záporné, nebo konečně u vektoru $\vec{a}_i$ je záporné a u vektoru $\vec{a}_j$ je kladné, přitom v součtu všech součinů $\langle\varepsilon_i\vec{a}_i,\varepsilon_j\vec{a}_j\rangle$ je od každé ze čtyř zmíněných skupin právě 2^{n-2} sčítanců. Tyto skalární součiny se tedy vzájemně odečtou, druhá suma v posledním vyjádření je tedy rovna nule a odtud dostáváme zajímavou rovnost

$$\sum_{\varepsilon_i\in\{-1,1\};\,i=1,2,\ldots,n}|\varepsilon_1\vec{a}_1+\varepsilon_2\vec{a}_2+\cdots+\varepsilon_n\vec{a}_n|^2=2^n\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|^2\,.$$

Při označení $\vec{a}_i=\overrightarrow{OA_i}$ z této rovnosti plyne $|\vec{u}|\le r\sqrt{n}$, neboť alespoň jedna z 2^n nalevo sčítaných hodnot je nejvýše rovna jejich aritmetickému průměru, tedy součtu $\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|^2$.

Úloha 3.2.56: *Dokažte, že z pěti vektorů v prostoru lze vždy vybrat dva vektory tak, aby velikost jejich součtu byla menší nebo rovna velikosti součtu ostatních tří vektorů.*[88]

Řešení:
Důkaz provedeme sporem. Mějme vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, $\vec{v}_4$, $\vec{v}_5$ takové, že pro každou permutaci (i, j, k, l, m) indexů 1 až 5 platí

$$|\vec{v}_i + \vec{v}_k| > |\vec{v}_j + \vec{v}_l + \vec{v}_m|\,.$$

Každou z 10 nerovností

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| > |\vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5|\,, \qquad |\vec{v}_1 + \vec{v}_3| > |\vec{v}_2 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5|\,, \qquad |\vec{v}_1 + \vec{v}_4| > |\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_5|\,,$$

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_5| > |\vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4|\,, \qquad |\vec{v}_2 + \vec{v}_3| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5|\,, \qquad |\vec{v}_2 + \vec{v}_4| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_5|\,,$$

$$|\vec{v}_2 + \vec{v}_5| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4|\,, \qquad |\vec{v}_3 + \vec{v}_4| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_5|\,, \qquad |\vec{v}_3 + \vec{v}_5| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4|\,,$$

$$|\vec{v}_4 + \vec{v}_5| > |\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3|$$

umocníme a rozepíšeme podle vzoru

$$|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + 2\langle\vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle > |\vec{v}_3|^2 + |\vec{v}_4|^2 + |\vec{v}_5|^2 + 2\langle\vec{v}_3, \vec{v}_4\rangle + 2\langle\vec{v}_3, \vec{v}_5\rangle + 2\langle\vec{v}_4, \vec{v}_5\rangle$$

a pak je všechny sečteme. Po sečtení dostaneme

$$4\sum_{i=1}^{5} |\vec{v}_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le 5} \langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle > 6\sum_{i=1}^{5} |\vec{v}_i|^2 + 6\sum_{1\le i<j\le 5} \langle\vec{v}_i\vec{v}_j\rangle\,.$$

Odtud plyne nerovnost

$$2\sum_{i=1}^{5} |\vec{v}_i|^2 + 4\sum_{1\le i<j\le 5} \langle\vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle < 0\,,$$

kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$2 \cdot \left|\sum_{i=1}^{5} \vec{v}_i\right|^2 < 0\,,$$

což je spor, neboť vektor nemůže mít zápornou velikost. □

Úloha 3.2.57: *Na polokružnici se středem O a poloměrem 1 je dán lichý počet bodů $P_1, \dots, P_{2n+1}$. Dokažte, že* $\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.[89]

Řešení:
Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. V případě $n = 0$ zkoumaná nerovnost s jediným vektorem $\overrightarrow{OP_1}$ zřejmě platí jako rovnost.

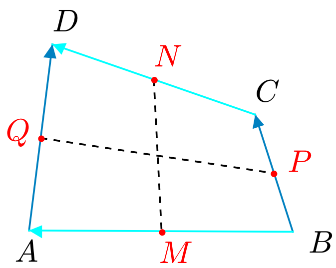
[88] [pra–86], str. 101, úloha 5.12.
[89] [pra–86], str. 103, úloha 5.23, zadána v roce 1973 jako příklad 1 na 15. MMO v Moskvě.

2. Nechť nerovnost platí pro určité n, tedy pro $2n+1$ vektorů. Dokážeme, že platí taky pro $2n+3$ vektorů.

   V půlkruhu vezmeme dva krajní z daných $2n+3$ vektorů, tj. dva vektory $\overrightarrow{OP_i}$ a $\overrightarrow{OP_j}$, které svírají maximální úhel, a jejich součet označíme $\overrightarrow{OS}$, tj.
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OP_j}\,.$$
   Součet zbývajících $2n+1$ vektorů označíme $\overrightarrow{OR}$. Podle předpokladu platí
$$|\overrightarrow{OR}| \geq 1\,.$$
   Je-li $|\sphericalangle P_iOP_j| = \pi$, pak $\overrightarrow{OS} = \vec{o}$ a tvrzení zřejmě platí. Je-li vektor $\overrightarrow{OS}$ nenulový, pak leží na ose úhlu P_iOP_j, jehož velikost je menší než π, protože $|\overrightarrow{OP_i}| = |\overrightarrow{OP_j}|$. Vektor $\overrightarrow{OR}$ leží uvnitř úhlu P_iOP_j, a proto vektory $\overrightarrow{OR}$ a $\overrightarrow{OS}$ svírají úhel menší než $\frac{\pi}{2}$. Pokud dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ svírají ostrý úhel α, je v trojúhelníku tvořeném vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{a}+\vec{b}$ úhel $\pi-\alpha$ proti vektoru $\vec{a}+\vec{b}$ tupý, takže protilehlá strana je ve zmíněném trojúhelníku největší, tedy $|\vec{a}+\vec{b}| > \max\{|\vec{a}|, |\vec{b}|\}$. Odtud
$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2n+3}}| = |\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}| > |\overrightarrow{OR}| \geq 1\,.$$

Tím je důkaz indukcí hotov. $\square$

Úloha 3.2.58: *V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme MN a PQ spojnice středů protilehlých stran. Dokažte, že pokud platí*
$$|MN| + |PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|)\,, \tag{3.42}$$
pak $ABCD$ je rovnoběžník.[90]



Řešení:
Jsou-li body M, N, P, Q po řadě středy stran AB, CD, BC, DA, platí pro ně vyjádření
$$M = \frac{1}{2}(A+B)\,, \qquad N = \frac{1}{2}(C+D)\,, \qquad P = \frac{1}{2}(B+C)\,, \qquad Q = \frac{1}{2}(A+D)\,,$$

[90] [kin–02], str. 1–2 a 4, příklad 1 – Leningrad High School Math Olympiad 1980.

odtud plynou vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right), \qquad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}\right).$$

Dosazením za vektory do rovnosti (3.42) dostáváme po vynásobení dvěma

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{AD}|. \tag{3.43}$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti pro dvojice vektorů a jejich součet však platí

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| \le |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|, \qquad |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}| \le |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{CD}|,$$

přičemž v první (resp. druhé) z nerovností nastane rovnost právě tehdy, když (podle zadání nenulové) vektory $\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{BC}$ (resp. $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$) jsou souhlasně rovnoběžné. Jestliže platí rovnost (3.43), pak musí nastat rovnost v obou uvedených nerovnostech (jinak bychom jejich sečtením dostali v (3.43) ostrou nerovnost), což znamená, že $ABCD$ je rovnoběžník. □

Poznámka:
Z uvedeného postupu rovněž plyne, že v libovolném čtyřúhelníku $ABCD$ pro vzdálenost středu M strany AB od středu N strany CD platí implikace

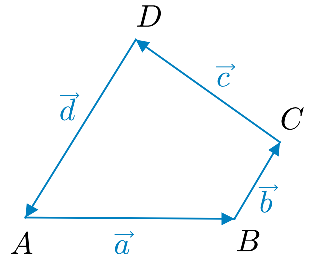
$$|MN| = \frac{1}{2}(|BC| + |DA|) \quad \Rightarrow \quad BC \parallel DA.$$

Opačná implikace je známým tvrzením o délce střední příčky lichoběžníku.

Úloha 3.2.59: *Dokažte, že pro délky stran a, b, c, d a úhlopříček e, f libovolného rovinného (konvexního či nekonvexního) nebo prostorového čtyřúhelníku $ABCD$ platí*

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \ge 2(e^2 + f^2), \tag{3.44}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $ABCD$ je rovnoběžník.[91]



Řešení:
Pro vektory stran čtyřúhelníku $ABCD$

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{DE}$$

[91]Výsledek školitele, zadaný jako soutěžní úloha na česko-polsko-slovenském střetnutí MO v roce 2010.

platí zřejmá rovnost

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{o} \tag{3.45}$$

a trojúhelníkové nerovnosti

$$|\vec{a}|+|\vec{c}|\geq|\vec{a}-\vec{c}|\,,\qquad |\vec{b}|+|\vec{d}|\geq|\vec{b}-\vec{d}|\,. \tag{3.46}$$

Nerovnosti (3.46) umocníme na druhou a sečteme:

$$(a+c)^2+(b+d)^2\geq a^2+b^2+c^2+d^2-2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle-2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle=$$

$$=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{c}+\vec{d}|^2-2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle-2\langle\vec{c},\vec{d}\rangle-2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle-2\langle\vec{b},\vec{d}\rangle=$$

$$=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{c}+\vec{d}|^2-\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle-\langle\vec{b},\vec{a}+\vec{d}\rangle-\langle\vec{c},\vec{a}+\vec{d}\rangle-\langle\vec{d},\vec{b}+\vec{c}\rangle=$$

$$=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-2\langle\vec{a}+\vec{d},\vec{b}+\vec{c}\rangle=2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\langle-\vec{b}-\vec{c},\vec{b}+\vec{c}\rangle=2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=2(e^2+f^2)\,,$$

a tím je nerovnost (3.44) dokázána. Rovnost v ní nastane právě tehdy, když nastane rovnost v obou trojúhelníkových nerovnostech (3.46), neboli když jsou jak vektory $\vec{a}$ a $\vec{c}$, tak vektory $\vec{b}$ a $\vec{d}$ nesouhlasně rovnoběžné. Právě tehdy existují kladná čísla p a q, pro která platí

$$\vec{c}=-p\vec{a}\,,\qquad \vec{d}=-q\vec{b}\,.$$

Dosazením do (3.45) dostaneme podmínku

$$(1-p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}=\vec{o}\,,$$

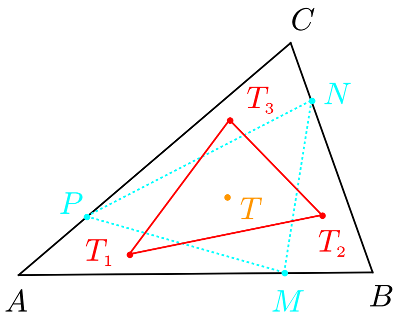
jež s ohledem na lineární nezávislost vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ znamená, že $p=q=1$. Poslední je vyjádřením toho, že $ABCD$ je rovnoběžník. $\square$

Úloha 3.2.60: *Nechť ABC je trojúhelník, bod T je jeho těžiště a M, N, P jsou body zvolené postupně na stranách AB, BC, CA tak, že*

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|CP|}{|PA|}=k\,.$$

Dále nechť T_1, T_2, T_3 jsou postupně těžiště trojúhelníků APM, BMN, CNP. Dokažte, že pro každý bod D roviny trojúhelníku ABC platí[92]

$$3|DT|<|DT_1|+|DT_2|+|DT_3|<|DA|+|DB|+|DC|\,.$$



[92][bech–02], str. 31–32, druhá část úlohy 3. Její první část jsme uvedli dříve jako úlohu 2.2.17.

Řešení:
Podle výsledku Úlohy 2.2.17 je bod T těžištěm nejen trojúhelníku ABC, ale také trojúhelníku $T_1T_2T_3$, a má tedy vyjádření

$$T = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)\,,$$

odtud pak pro každý bod D plyne

$$3\overrightarrow{DT} = T_1 + T_2 + T_3 - 3D = \overrightarrow{DT_1} + \overrightarrow{DT_2} + \overrightarrow{DT_3}\,.$$

Protože vektory $\overrightarrow{DT_1}$, $\overrightarrow{DT_2}$, $\overrightarrow{DT_3}$ nejsou kolineární, je

$$3|DT| = 3|\overrightarrow{DT_1} + \overrightarrow{DT_2} + \overrightarrow{DT_3}| < |DT_1| + |DT_2| + |DT_3|\,,$$

což je první ze dvou dokazovaných nerovností. Nyní odvodíme druhou nerovnost. Pro velikost vektoru $\overrightarrow{DT_1}$ podle řešení Úlohy 2.2.17 platí

$$|DT_1| = \left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1}(2A + 2kA + kB + C) - D\right| = \left|\frac{2}{3}A + \frac{k}{3(k+1)}B + \frac{1}{3(k+1)}C - D\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{k}{3(k+1)}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3(k+1)}\overrightarrow{DC}\right| < \frac{2}{3}|DA| + \frac{k}{3(k+1)}|DB| + \frac{1}{3(k+1)}|DC|\,,$$

protože vektory $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ nejsou kolineární. Analogicky

$$\left|DT_2\right| < \frac{2}{3}|DB| + \frac{k}{3(k+1)}|DC| + \frac{1}{3(k+1)}|DA|\,,$$

$$\left|DT_3\right| = \frac{2}{3}|DC| + \frac{k}{3(k+1)}|DA| + \frac{1}{3(k+1)}|DB|\,.$$

Sečtením všech tří nerovností již dostaneme požadovanou nerovnost

$$|DT_1| + |DT_2| + |DT_3| < |DA| + |DB| + |DC|\,.$$

□

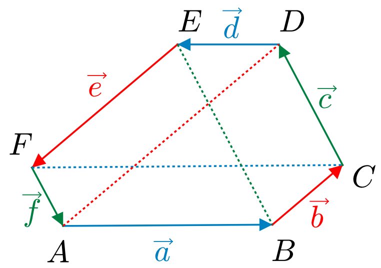
Úloha 3.2.61: *Nechť v rovinném (konvexním či nekonvexním) nebo prostorovém šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou splněny rovnosti*

$$|AD| = |BC| + |EF|\,, \qquad |BE| = |AF| + |CD|\,, \qquad |CF| = |DE| + |AB|\,. \tag{3.47}$$

Dokažte, že pak platí[93]

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CD|}{|AF|} = \frac{|EF|}{|BC|}\,. \tag{3.48}$$

[93] [kaz–06].



Řešení:
Nejprve dokážeme pomocné tvrzení.

Lemma: Pro libovolných šest bodů A, B, C, D, E, F v rovině nebo prostoru platí

$$(|AB| + |DE|)^2 + (|BC| + |EF|)^2 + (|CD| + |AF|)^2 \geq |AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2\,, \tag{3.49}$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jsou vektory v každé ze tří dvojic $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BC}$ a $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ a $\overrightarrow{FA}$ nesouhlasně rovnoběžné a zároveň je součet vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ roven $\vec{o}$.

Důkaz:
Pro vektory

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}\,, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}\,, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}\,, \quad \vec{d} = \overrightarrow{DE}\,, \quad \vec{e} = \overrightarrow{EF}\,, \quad \vec{f} = \overrightarrow{FA}$$

platí zřejmá rovnost

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{o}$$

a trojúhelníkové nerovnosti

$$|\vec{a}| + |\vec{d}\,| \geq |\vec{a} - \vec{d}\,|\,, \qquad |\vec{b}| + |\vec{e}\,| \geq |\vec{b} - \vec{e}\,|\,, \qquad |\vec{c}| + |\vec{f}| \geq |\vec{c} - \vec{f}|\,. \tag{3.50}$$

Označme velikosti vektorů $|\vec{a}| = a$ atd. Nerovnosti (3.50) umocníme na druhou a sečteme

$$(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2\langle\vec{a}, \vec{d}\rangle - 2\langle\vec{b}, \vec{e}\rangle - 2\langle\vec{c}, \vec{f}\rangle\,, \tag{3.51}$$

pravou stranu nerovnosti (3.51) označíme V. Nyní upravujme pravou stranu nerovnosti (3.49) ze zadání Lemmatu:

$$|AD|^2 + |BE|^2 + |CF|^2 = \left\langle \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \left\langle \vec{e} + \vec{f} + \vec{a}, \overrightarrow{EB} \right\rangle + \left\langle \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}, \overrightarrow{CF} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \vec{a}, \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \overrightarrow{AD} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} \right\rangle + \left\langle \vec{d}, \overrightarrow{CF} \right\rangle + \left\langle \vec{e}, \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \overrightarrow{EB} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \vec{a}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{f} \right\rangle + \left\langle \vec{d}, \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \vec{e}, \vec{e} + \vec{f} + \vec{a} - \vec{a} - \vec{b} - \vec{f} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \vec{e} + \vec{f} + \vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{d} \right\rangle + \left\langle \vec{c}, \vec{c} - \vec{f} \right\rangle + \left\langle \vec{e}, \vec{e} - \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \vec{d}, \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \right\rangle + \left\langle \vec{f}, \vec{e} + \vec{f} + \vec{a} \right\rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2\left\langle \vec{a}, \vec{d} \right\rangle - 2\left\langle \vec{c}, \vec{f} \right\rangle - 2\left\langle \vec{b}, \vec{e} \right\rangle +$$

$$+\langle\vec b,\vec a+\vec c+\vec e\rangle+\langle\vec d,\vec a+\vec c+\vec e\rangle+\langle\vec f,\vec a+\vec c+\vec e\rangle=V+\langle\vec b+\vec d+\vec f,\vec a+\vec c+\vec e\rangle=V-(\vec a+\vec c+\vec e)^2\,.$$

Odtud dostáváme, že

$$V=|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2+(\vec a+\vec c+\vec e)^2\,,$$

což po dosazení do (3.51) dává

$$(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2\ge V=|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2+(\vec a+\vec c+\vec e)^2\ge|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2\,,$$

a to je dokazovaná nerovnost (3.49). Rovnost v ní nastane právě tehdy, když nastane rovnost zároveň v obou nerovnostech z předchozího řádku. V první nerovnosti (což je nerovnost (3.51)) nastane rovnost, jen když nastane rovnost ve všech třech trojúhelníkových nerovnostech (3.50) zároveň, to znamená právě tehdy, když vektory v každé z dvojic $\vec a$ a $\vec d$, $\vec b$ a $\vec e$, $\vec c$ a $\vec f$ budou nesouhlasně rovnoběžné. V druhé nerovnosti nastane rovnost právě tehdy, když $\vec a+\vec c+\vec e=\vec o$. To dohromady dává podmínku ze zadání Lemmatu, jehož důkaz je tak hotov. ⋄

Vraťme se nyní k původní úloze. Z rovností (3.47) plyne, že pro zadaný šestiúhelník nastane v nerovnosti (3.49) z Lemmatu rovnost. To znamená, že pro vektory zavedené v důkazu Lemmatu existují kladná čísla p, q, r s vlastnostmi

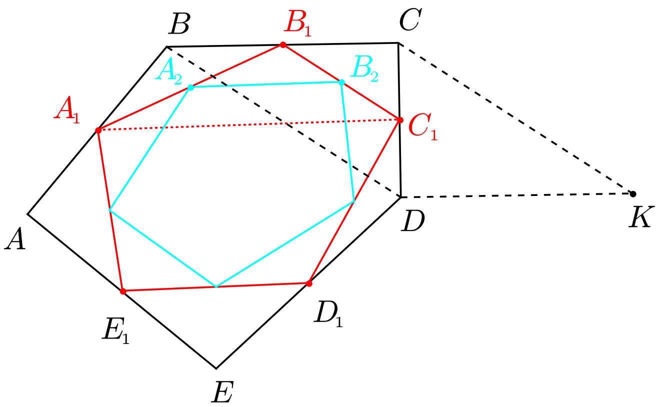
$$\vec a=-p\vec d\,,\quad \vec c=-q\vec f\,,\quad \vec e=-r\vec b\,,\qquad \text{přičemž}\qquad \vec a+\vec c+\vec e=\vec b+\vec d+\vec f=\vec o\,.$$

Rovnost poměrů (3.48) ze zadání úlohy bude ověřena, když ukážeme, že platí $p=q=r$. To ihned plyne z rovností

$$\vec o=\vec a+\vec c+\vec e=-p\vec d-q\vec f-r\vec b=-p\vec d-q\vec f-r(-\vec d-\vec f)=(r-p)\vec d+(r-q)\vec f\,,$$

nejsou-li ovšem vektory $\vec d$ a $\vec f$ rovnoběžné. Kdyby byly, z vektorové rovnosti $\vec a=-p\vec d$ by vyplynulo, že rovněž vektory $\vec a$ a $\vec f$ jsou rovnoběžné, což je u vektorů sousedních stran šestiúhelníku vyloučeno. □

Úloha 3.2.62: *Mějme posloupnost pětiúhelníků $M, M_1, M_2, \ldots$ sestrojených tak, že vrcholy každého následujícího pětiúhelníku leží ve středech stran předchozího pětiúhelníku. Dokažte, že součet obvodů všech těchto pětiúhelníků nepřevyšuje osminásobek obvodu prvního z nich.*[94]



[94] [pra–86], str. 103, úloha 5.25.

Řešení:
Nechť $ABCDE$ je počáteční pětiúhelník M s obvodem o, $A_1 \dots E_1$ je pětiúhelník M_1 s obvodem o_1 atd. Trojúhelník BCD rozšíříme na rovnoběžník $BCKD$, takže bude platit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DK}$ a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CK}$. Vrcholy pětiúhelníku $A_1 \dots E_1$ mají vyjádření

$$A_1 = \frac{1}{2}(A+B)\,, \quad B_1 = \frac{1}{2}(B+C)\,, \quad C_1 = \frac{1}{2}(C+D)\,, \quad D_1 = \frac{1}{2}(D+E)\,, \quad E_1 = \frac{1}{2}(E+A)\,.$$

Odtud

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}(C-A) \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{A_1B_1}\,,$$

analogicky dostaneme

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{B_1C_1}\,, \qquad \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{C_1D_1}\,, \qquad \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{D_1E_1}\,, \qquad \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{E_1A_1}\,.$$

Pro vektor $\overrightarrow{A_1C_1}$ platí

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{1}{2}(C+D-A-B) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}\,,$$

což znamená, že díky trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AK}\right| \le \frac{1}{2}(\left|\overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{DK}\right|) = \frac{1}{2}(2\left|\overrightarrow{D_1E_1}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|)\,.$$

Pro vektory stran dalšího pětiúhelníku M_2 podobně platí

$$\left|\overrightarrow{A_2B_2}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| \le \frac{1}{4}(2\left|\overrightarrow{D_1E_1}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|)\,,$$

analogicky

$$\left|\overrightarrow{B_2C_2}\right| \le \frac{1}{4}(2\left|\overrightarrow{E_1A_1}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|)\,, \qquad \left|\overrightarrow{C_2D_2}\right| \le \frac{1}{4}(2\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| + \left|\overrightarrow{DE}\right|)\,,$$

$$\left|\overrightarrow{D_2E_2}\right| \le \frac{1}{4}(2\left|\overrightarrow{B_1C_1}\right| + \left|\overrightarrow{EA}\right|)\,, \qquad \left|\overrightarrow{E_2A_2}\right| \le \frac{1}{4}(2\left|\overrightarrow{C_1D_1}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|)\,.$$

Po sečtení všech 5 nerovností dostáváme

$$o_2 \le \frac{1}{4}(2o_1 + o)\,,$$

a protože je zřejmě $o_1 \le o$, plyne odtud

$$o_2 \le \frac{3}{4}o\,.$$

Odtud indukcí pro každé $k \ge 1$ získáme odhad

$$o_{2k+1} \le o_{2k} \le \left(\frac{3}{4}\right)^k o\,.$$

Součet $o + o_1 + \dots$ všech obvodů tedy nepřevyšuje součet řady

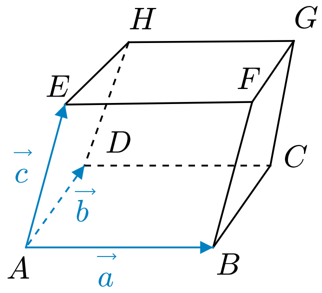
$$\left(1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \dots\right) o =$$

$$= 2\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^k + \dots\right) o = \frac{2o}{1 - \frac{3}{4}} = 8o\,,$$

přičemž jsme využili vzorec pro součet geometrické řady s koeficientem $\frac{3}{4}$. Tvrzení úlohy je dokázáno. $\square$

Úloha 3.2.63: *Pro každý rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$ ($AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$) dokažte nerovnost*[95]

$$|AF| + |AH| + |AC| < |AB| + |AD| + |AE| + |AG|\,.$$



Řešení:
Pro vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ máme dokázat, že platí

$$|\vec{a} + \vec{c}\,| + |\vec{b} + \vec{c}\,| + |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}\,| + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,|\,,$$

a že rovnost je vyloučena, jsou-li vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lineárně nezávislé (jak je tomu v případě nezdegenerovaného rovnoběžnostěnu). Jistě platí

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}\,|)^2 - |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,|^2 = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{c}\,| + 2|\vec{b}| \cdot |\vec{c}\,| - 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle - 2\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle - 2\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle =$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2 + (|\vec{a}| + |\vec{c}\,|)^2 - |\vec{a} + \vec{c}\,|^2 + (|\vec{b}| + |\vec{c}\,|)^2 - |\vec{b} + \vec{c}\,|^2 =$$

$$= (|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|)(|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{a} + \vec{b}|) + (|\vec{a}| + |\vec{c}\,| + |\vec{a} + \vec{c}\,|)(|\vec{a}| + |\vec{c}\,| - |\vec{a} + \vec{c}\,|) +$$

$$+ (|\vec{b}| + |\vec{c}\,| + |\vec{b} + \vec{c}\,|)(|\vec{b}| + |\vec{c}\,| - |\vec{b} + \vec{c}\,|)\,.$$

Podle trojúhelníkových nerovností pro trojice vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ resp. $\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}, \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ pro libovolné vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ platí nerovnosti

$$|\vec{x}| + |\vec{y}| - |\vec{x} + \vec{y}| \ge 0\,, \tag{3.52}$$

[95] [dju–06], str. 213, úloha 4, navržena Francií pro 28. MMO na Kubě r. 1987.

$$|\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{x}+\vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}| + |\vec{z}| + |\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|\,. \tag{3.53}$$

Jejich užitím z odvozené rovnosti dostaneme

$$(|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|)^2 - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \leq (|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|)(2|\vec{a}|+2|\vec{b}|+2|\vec{c}|-|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}+\vec{c}|-|\vec{b}+\vec{c}|)\,.$$

Po vydělení kladným číslem $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ obdržíme

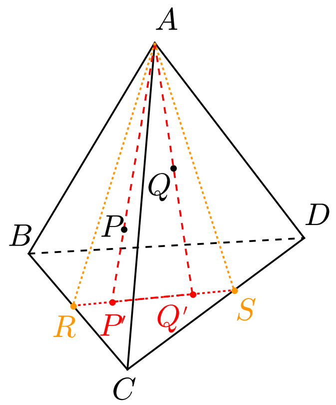
$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| \leq 2(|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|) - (|\vec{a}+\vec{b}| + |\vec{a}+\vec{c}| + |\vec{b}+\vec{c}|)\,,$$

odkud již plyne dokazovaná nerovnost

$$|\vec{a}+\vec{c}| + |\vec{b}+\vec{c}| + |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\,.$$

Dokažme, že pro libovolné lineárně nezávislé vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je dokazovaná nerovnost ostrá. Aby nastala rovnost, musela by pro každé dva ze tří vektorů přejít v rovnost alespoň jedna z užitých nerovností (3.52) a (3.53). Rovnost v (3.52) nastane právě tehdy, když vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou souhlasně rovnoběžné, tedy z rovnosti (3.52) plyne, že vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ jsou lineárně závislé. Rovnost v (3.53) nastane právě tehdy, když vektory $-\vec{z}$ a $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ jsou souhlasně rovnoběžné, odtud plyne, že vektor $\vec{z}$ je násobkem vektoru $\vec{x}+\vec{y}$. Splnění jedné z rovností (3.52), (3.53) tedy v obou případech znamená, že vektory $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ neboli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou lineárně závislé, což odporuje naší situaci. □

Úloha 3.2.64: *Nechť dva body P, Q leží uvnitř pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že platí $|\sphericalangle PAQ| < \frac{\pi}{3}$.*[96]



Řešení:
Nejprve zformulujeme a dokážeme pomocné Lemma.

Lemma: Nechť ve čtyřstěnu $ABCD$ není žádný ze stěnových úhlů u vrcholu A tupý. Jestliže P, Q jsou dva body uvnitř nebo na hranici čtyřstěnu $ABCD$, ne však na jeho hranách, pak

$$|\sphericalangle PAQ| < \max\{|\sphericalangle BAC|, |\sphericalangle BAD|, |\sphericalangle CAD|\}\,. \tag{3.54}$$

[96] [mur–88], str. 73–74, úloha G.I./7(1973/1).

Důkaz:
Označme vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{p} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{AQ}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zvolené body P, Q leží ve stěně BCD protější vrcholu A (vždy je totiž možné body P, Q zaměnit průsečíky P', Q' polopřímek AP, AQ se stěnou BCD, aniž se velikost úhlu $|\sphericalangle PAQ|$ změní, jak můžeme vidět na obrázku). Bez téže újmy můžeme předpokládat, že $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ (velikosti uvažovaných úhlů nezávisí na poloze roviny BCD). Body P, Q ležící ve stěně BCD mají vyjádření

$$P = xB + yC + zD\,, \qquad Q = uB + vC + wD\,,$$

$$\text{kde} \qquad x + y + z = 1\,, \quad x, y, z \geq 0\,; \qquad u + v + w = 1\,, \quad u, v, w \geq 0\,.$$

Vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ pak mají vyjádření

$$\vec{p} = x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}\,, \qquad \vec{q} = u\vec{b} + v\vec{c} + w\vec{d}\,.$$

Pro velikost vektoru $\vec{p}$ podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|\vec{p}\,| = |x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}\,| \leq x|\vec{b}| + y|\vec{c}\,| + z|\vec{d}\,| = x + y + z = 1\,.$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v předchozí nerovnosti nastane rovnost, pouze když dvě z čísel x, y, z jsou nulová, pak by ovšem bod P ležel na jedné z hran AB, AC, AD, což zadání úlohy vylučuje, a tedy platí $|\vec{p}\,| < 1$, podobně pak $|\vec{q}\,| < 1$. Protože funkce kosinus je klesající na intervalu $(0, \pi)$, nerovnost (3.54) je ekvivalentní s nerovností

$$\cos|\sphericalangle PAQ| > \min\{\cos|\sphericalangle BAC|, \cos|\sphericalangle BAD|, \cos|\sphericalangle CAD|\}\,. \tag{3.55}$$

Ukažme nejprve, že úhel PAQ není tupý, když podle předpokladu není tupý žádný ze stěnových úhlů u vrcholu A. Víme tedy, že čísla $\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle$, $\langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle$, $\langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle$ jsou nezáporná, a chceme ověřit, že nezáporné je i číslo $\langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle$. To má vyjádření

$$\langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle = \langle x\vec{b} + y\vec{c} + z\vec{d}, u\vec{b} + v\vec{c} + w\vec{d}\,\rangle = xu + yv + zw + (yu + xv)\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle + (xw + zu)\langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle +$$

$$+ (yw + zv)\langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle\,.$$

Odtud s ohledem na $\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle, \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle, \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle \in \langle 0, 1)$ plyne

$$\langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle \geq (xu + yv + zw + (yu + xv) + (zv + yw) + (xw + zu)) \cdot \min\{\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle, \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle, \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle\} =$$

$$= (x + y + z)(u + v + w) \cdot \min\{\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle, \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle, \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle\} = \min\{\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle, \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle, \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle\} \geq 0\,.$$

Protože $|\vec{p}\,| < 1$, $|\vec{q}\,| < 1$ a $\langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle \geq 0$, je

$$\cos|\sphericalangle PAQ| = \frac{\langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle}{|\vec{p}\,| \cdot |\vec{q}\,|} \geq \langle\vec{p}, \vec{q}\,\rangle \geq \min\{\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle, \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle, \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle\}\,.$$

Dosazením za skalární součiny

$$\langle\vec{b}, \vec{c}\,\rangle = \cos|\sphericalangle BAC|\,, \qquad \langle\vec{b}, \vec{d}\,\rangle = \cos|\sphericalangle BAD|\,, \qquad \langle\vec{c}, \vec{d}\,\rangle = \cos|\sphericalangle CAD|\,,$$

dostáváme neostrou variantu nerovnosti (3.55), zbývá tedy vyloučit, že v dokázané nerovnosti nastane rovnost. V tomto případě by z našeho postupu vyplynula následující rovnost $\cos|\sphericalangle PAQ| = \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 0$, a tak by muselo platit $xu + yv + zw = 0$. V každé trojici (x, y, z) a (u, v, w) jsou však aspoň dvě kladná čísla, takže na některém ze tří míst mají obě dvojice kladnou složku. Protože všechny složky jsou nezáporné, vidíme, že obecně platí $xu + yv + zw > 0$, čímž je rovnost v (3.55) vyloučena. $\diamond$

Tvrzení úlohy okamžitě plyne z právě dokázaného Lemmatu. $\square$

Užití vzorce pro ortocentrum

V tomto paragrafu budeme při řešení jednotlivých úloh užívat obecně známého tvrzení, dokázaného v Příkladu 3.1.16: Výšky trojúhelníku ABC se protínají v jediném bodě V, který nazýváme *ortocentrum* a pro který platí vektorové rovnosti (3.4) a (3.5)

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,,$$

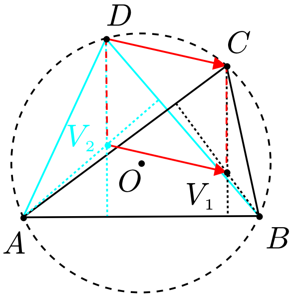
$$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\,, \qquad \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\,, \qquad \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\,,$$

kde O je střed kružnice opsané. Vzorec (3.4) jsme již významně využili v Příkladu 3.1.19 o Feuerbachově kružnici.

Dále budeme využívat tvrzení dokázané v Příkladu 3.1.17, že bod V roviny ABC je ortocentrum trojúhelníku ABC právě tehdy, když platí rovnosti (3.7)

$$\langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV} \rangle = \langle \overrightarrow{AV}, \overrightarrow{CV} \rangle = \langle \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV} \rangle\,.$$

Úloha 3.2.65: *V rovině jsou dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Nechť body V_1 a V_2 jsou ortocentra trojúhelníků ABC a ABD. Dokažte, že body A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když V_1V_2DC je rovnoběžník.*[97]



[97] [bech–03], str. 15–16, úloha 4.

Řešení:
Nechť O_1 je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a O_2 střed kružnice opsané trojúhelníku ABD. Body A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když trojúhelníky ABC a ABD mají společnou kružnici opsanou, to znamená společný střed kružnice opsané $O_1 = O_2 = O$ (poloměry kružnic opsaných již pak musí být pro oba trojúhelníky rovny $|OA|$).

Pro ortocentra těchto trojúhelníků podle (3.4) platí:

$$V_1 = O_1 + (A - O_1) + (B - O_1) + (C - O_1)\,,$$

$$V_2 = O_2 + (A - O_2) + (B - O_2) + (D - O_2)\,.$$

Obě obecně platné rovnosti odečteme a budeme aplikovat ekvivalentní úpravy:

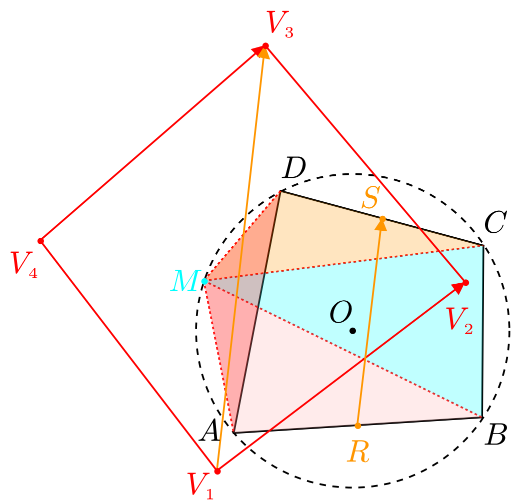
$$V_2 - V_1 = (O_2 - O_1) + 3(O_1 - O_2) + (D - C)\,,$$

$$\overrightarrow{V_1V_2} = \overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{O_1O_2} \quad \text{neboli} \quad \overrightarrow{V_1V_2} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{O_2O_1}\,.$$

Z poslední rovnosti již vidíme, že $O_2 = O_1$ (tedy trojúhelníky ABC a ABD mají společnou opsanou kružnici) právě tehdy, když $\overrightarrow{V_1V_2} = \overrightarrow{CD}$ neboli když V_1V_2DC je rovnoběžník. □

Úloha 3.2.66: *Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice a M je její libovolný bod různý od A, B, C, D. Nechť V_1, V_2, V_3, V_4 jsou postupně ortocentra trojúhelníků MAB, MBC, MCD, MDA. Dokažte, že*

1. $V_1V_2V_3V_4$ *je rovnoběžník,*
2. $|V_1V_3| = 2|RS|$, *kde R a S jsou postupně středy stran AB a CD.*[98]



[98] [bech–02], str. 31, úloha 2.

Řešení:

1. Kružnice se středem O opsaná čtyřúhelníku $ABCD$ je podle zadání kružnicí opsanou trojúhelníkům MAB, MBC, MCD, MDA. Pro jejich ortocentra V_1, V_2, V_3, V_4 tedy podle (3.4) platí:

$$V_1 = M + A + B - 2O\,, \qquad V_2 = M + B + C - 2O\,,$$

$$V_3 = M + C + D - 2O\,, \qquad V_4 = M + A + D - 2O\,.$$

   Pro vektory $\overrightarrow{V_1V_2}$ a $\overrightarrow{V_4V_3}$ odtud dostaneme

$$V_2 - V_1 = V_3 - V_4 = C - A\,,$$

   a tedy $V_1V_2V_3V_4$ je rovnoběžník.

2. Protože středy R, S stran AB, CD jsou určeny rovnostmi

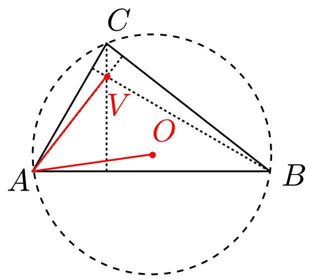
$$R = \frac{1}{2}(A+B)\,, \qquad S = \frac{1}{2}(C+D)\,,$$

   z vyjádření pro ortocentra V_1, V_3 z předchozí části dostáváme

$$V_3 - V_1 = C + D - A - B = 2(S-R)\,,$$

   neboli $\overrightarrow{V_1V_3} = 2\overrightarrow{RS}$, takže dokazovaná rovnost $|V_1V_3| = 2|RS|$ platí. □

Úloha 3.2.67: *Vrchol A ostroúhlého trojúhelníku ABC má stejnou vzdálenost od středu O kružnice opsané a od ortocentra V. Určete všechny možné hodnoty úhlu α u vrcholu A.*[99]



Řešení:
Nechť r je poloměr kružnice opsané, pak $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = r$. Pro ortocentrum V podle (3.4) platí $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Podle zadání je vzdálenost bodu A od ortocentra rovna r, tedy

$$r^2 = |\overrightarrow{AV}|^2 = |\overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle\,,$$

[99] [dju–06], str. 248, úloha 32, navržena USA pro 31. MMO v Německu r. 1989, řešení pozměněno.

a tedy

$$r^2 = 2r^2 + 2\langle\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle = 2r^2 + 2r^2 \cos|\sphericalangle BOC|\,, \qquad \text{odkud} \qquad \cos|\sphericalangle BOC| = -\frac{1}{2}\,.$$

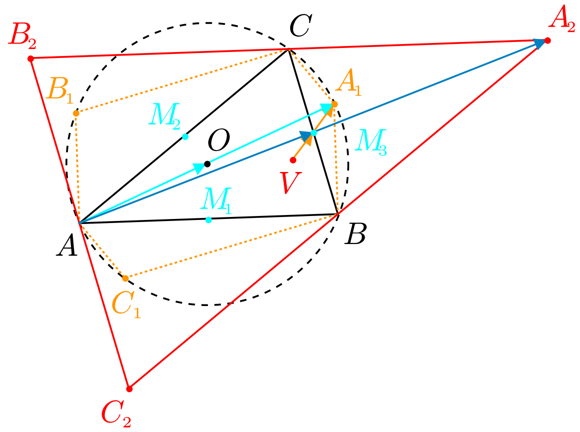
Nyní využijeme toho, že podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, tudíž z nalezené podmínky máme

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \text{neboli} \qquad 2\alpha = \frac{2\pi}{3}\,, \qquad \text{neboť} \qquad \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$$

Velikost úhlu α u vrcholu A je tedy $\frac{\pi}{3}$. Z uvedeného postupu je rovněž patrné obrácené tvrzení, že rovnost $|OA| = |OV|$ platí v každém trojúhelníku ABC s úhlem $\alpha = \frac{\pi}{3}$. □

Úloha 3.2.68: *Mějme trojúhelník ABC, který není pravoúhlý. Nechť V je jeho ortocentrum a body M_1, M_2, M_3 po řadě středy stran BC, AC, AB. Nechť A_1, B_1, C_1 jsou obrazy bodu V ve středové souměrnosti podle středů M_1, M_2, M_3 a nechť A_2, B_2, C_2 jsou ortocentra trojúhelníků BA_1C, CB_1A, AC_1B. Dokažte, že*

1. *trojúhelníky ABC a $A_2B_2C_2$ mají společné těžiště,*
2. *těžiště trojúhelníků AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 tvoří trojúhelník podobný trojúhelníku ABC.*[100]



ŘEŠENÍ:

1. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pro body V, M_1, M_2 a M_3 určené zadáním úlohy dostáváme

$$V = A + B + C - 2O \qquad M_1 = \frac{1}{2}(B + C)\,, \qquad M_2 = \frac{1}{2}(A + C)\,, \qquad M_3 = \frac{1}{2}(A + B)\,,$$

přitom vyjádření ortocentra V platí podle vzorce (3.4). Bod A_1 je obrazem bodu V ve středové souměrnosti podle středu M_1, takže z rovnosti $M_1 = \frac{1}{2}(A_1 + V)$ vyplývá

$$A_1 = 2M_1 - V = B + C - (A + B + C - 2O) = 2O - A\,,$$

[100] [and–05], str. 42–43, úloha 3, řešení pozměněno.

neboli $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA_1}$. Bod A_1 tedy leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, která je tedy i kružnicí opsanou trojúhelníku BA_1C se středem O. Bod A_2 je ortocentrum trojúhelníku BA_1C, a tedy znovu můžeme uplatnit vzorec (3.4), podle kterého

$$A_2 = B + C + A_1 - 2O = B + C + 2O - A - 2O = B + C - A\,.$$

Analogicky najdeme ostatní body ze zadání úlohy

$$B_1 = 2O - B\,, \qquad C_1 = 2O - C\,, \qquad B_2 = A + C - B\,, \qquad C_2 = A + B - C\,.$$

Označme T a T' těžiště trojúhelníků ABC a $A_2B_2C_2$, pak

$$T' = \frac{1}{3}(A_2 + B_2 + C_2) = \frac{1}{3}(B + C - A + A + C - B + A + B - C) = \frac{1}{3}(A + B + C) = T\,.$$

Tím je důkaz hotov.

2. Označme T_A, T_B, T_C postupně těžiště trojúhelníků AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2. Využijeme vyjádření bodů A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 z předchozí části, podle nichž

$$T_A = \frac{1}{3}(A + A_1 + A_2) = \frac{1}{3}(A + 2O - A + B + C - A) = \frac{1}{3}(B + C - A + 2O)\,,$$

analogicky

$$T_B = \frac{1}{3}(A + C - B + 2O)\,, \qquad T_C = \frac{1}{3}(A + B - C + 2O)\,.$$

Pro vektor $\overrightarrow{T_AT_B}$ tak dostaneme

$$\overrightarrow{T_AT_B} = T_B - T_A = \frac{1}{3}(A + C - B + 2O - (B + C - A + 2O)) = \frac{2}{3}(A - B) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}\,,$$

analogicky

$$\overrightarrow{T_AT_C} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\,, \qquad \overrightarrow{T_BT_C} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\,.$$

To znamená, že trojúhelníky $T_AT_BT_C$ a ABC jsou nepřímo podobné s koeficientem podobnosti $\frac{2}{3}$. □

Poznámka:
Jak jsme ukázali, odpovídající si strany trojúhelníků $T_AT_BT_C$ a ABC mají nejen úměrné délky, ale jsou i nesouhlasně rovnoběžné. Znamená to, že tyto trojúhelníky jsou stejnolehlé a my pro zajímavost určíme střed H jejich stejnolehlosti z rovnic

$$T_A - H = -\frac{2}{3}(A - H)\,, \qquad T_B - H = -\frac{2}{3}(B - H)\,, \qquad T_C - H = -\frac{2}{3}(C - H)\,.$$

Úpravou první rovnice a dosazením za T_A dostaneme

$$\frac{5}{3}H = T_A + \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}(B + C - A + 2O) + \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}(A + B + C + 2O)\,,$$

odtud pak

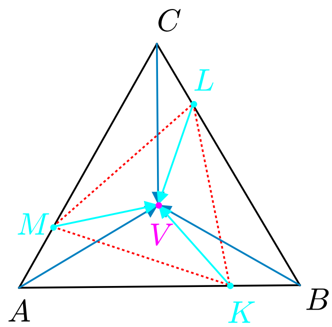
$$H = \frac{3}{5}T + \frac{2}{5}O\,, \qquad \text{neboli} \qquad H = \frac{1}{5}V + \frac{4}{5}O\,, \qquad \text{neboť} \qquad T = \frac{1}{3}V + \frac{2}{3}O\,.$$

Ze symetrie výsledku plyne, že pro tento bod H jsou splněny i zbývající dvě rovnice. Nalezený střed H je tedy vnitřním bodem úsečky OV, leží tedy na Eulerově přímce trojúhelníku ABC (v případě rovnostranného trojúhelníku ovšem platí $O = V = T = H$).

Úloha 3.2.69: *Uvnitř stran AB, BC, CA daného trojúhelníku ABC jsou zvoleny po řadě body K, L, M tak, že platí*

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|}\,.$$

Dokažte, že trojúhelníky ABC a KLM mají společné ortocentrum, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.[101]



Řešení:
Rovnosti podílů v zadání úlohy znamenají, že existuje číslo p z intervalu $(0,1)$ takové, že pro odpovídající vektory platí následující rovnosti

$$\overrightarrow{AK} = p\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{BL} = p\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA}\,. \tag{3.56}$$

Podle (3.7) je bod V ortocentrum trojúhelníku ABC právě tehdy, když platí rovnost skalárních součinů

$$\langle\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BV}\rangle = \langle\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{CV}\rangle = \langle\overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV}\rangle\,, \tag{3.57}$$

Naším úkolem je zjistit, kdy pro týž bod V platí soustava (3.57) zároveň s obdobnou soustavou pro trojúhelník KLM:

$$\langle\overrightarrow{KV}, \overrightarrow{LV}\rangle = \langle\overrightarrow{KV}, \overrightarrow{MV}\rangle = \langle\overrightarrow{LV}, \overrightarrow{MV}\rangle\,. \tag{3.58}$$

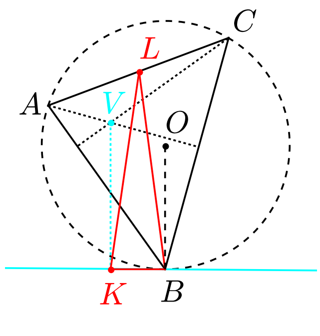
Do první ze soustavy rovností (3.56) dosadíme za vektory $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{KV}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{BV}$:

$$\overrightarrow{AV} - \overrightarrow{KV} = p\left(\overrightarrow{AV} - \overrightarrow{BV}\right) \qquad \text{neboli} \qquad \overrightarrow{KV} = (1-p)\overrightarrow{AV} + p\overrightarrow{BV}\,,$$

[101] [cze–04], úloha 5, autor P. Černek.

analogicky
$$\overrightarrow{LV} = (1-p)\overrightarrow{BV} + p\overrightarrow{CV}\,, \qquad \overrightarrow{MV} = (1-p)\overrightarrow{CV} + p\overrightarrow{AV}\,.$$
Tato vyjádření dosadíme do skalárních součinů ze soustavy (3.58). Pro první z nich dostaneme
$$\langle\overrightarrow{KV},\overrightarrow{LV}\rangle = (1-p)^2\langle\overrightarrow{AV},\overrightarrow{BV}\rangle + p(1-p)\langle\overrightarrow{AV},\overrightarrow{CV}\rangle + p(1-p)\langle\overrightarrow{BV},\overrightarrow{BV}\rangle + p^2\langle\overrightarrow{BV},\overrightarrow{CV}\rangle =$$
$$= (1-p+p^2)s + p(1-p)|\overrightarrow{BV}|^2\,,$$
analogicky pak
$$\langle\overrightarrow{KV},\overrightarrow{MV}\rangle = (1-p+p^2)s + p(1-p)|\overrightarrow{AV}|^2\,,$$
$$\langle\overrightarrow{LV},\overrightarrow{MV}\rangle = (1-p+p^2)s + p(1-p)|\overrightarrow{CV}|^2\,.$$
Soustava (3.58) je tedy ekvivalentní se soustavou rovností
$$p(1-p)|\overrightarrow{AV}|^2 = p(1-p)|\overrightarrow{BV}|^2 = p(1-p)|\overrightarrow{CV}|^2\,,$$
která je v případě $p(1-p) \neq 0$ (který je zaručen díky $p \in (0,1)$) splněna, právě když platí rovnosti $|AV| = |BV| = |CV|$. To nastane právě tehdy, když ortocentrum V trojúhelníku ABC splývá se středem jeho kružnice opsané, tedy v jediném případě, když trojúhelník ABC je rovnostranný. □

Úloha 3.2.70: *Označme K kolmý průmět ortocentra daného ostroúhlého trojúhelníku ABC na tečnu ve vrcholu B ke kružnici tomuto trojúhelníku opsané. Dokažte, že trojúhelník BKL, kde L je střed strany AC, je rovnoramenný.*[102]



Řešení:
Zaveďme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, kde O je střed zmíněné kružnice opsané. Pro ortocentrum V trojúhelníku ABC podle (3.4) platí
$$\overrightarrow{OV} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,.$$
Z $VK \parallel OB$ (neboť obě přímky VK i OB jsou kolmé na tečnu v bodě B ke kružnici opsané) plyne, že $\overrightarrow{VK} = k\vec{b}$ pro vhodné $k \in \mathbf{R}$, takže
$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VK} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + k\vec{b} = \vec{a} + (k+1)\vec{b} + \vec{c}\,.$$

[102] [kin–04], str.1–2,4; příklad 1 – 2000 St. Petersburg City Math Olympiad, Problem Corner 188.

Bod L je střed strany AC, platí tedy $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$.

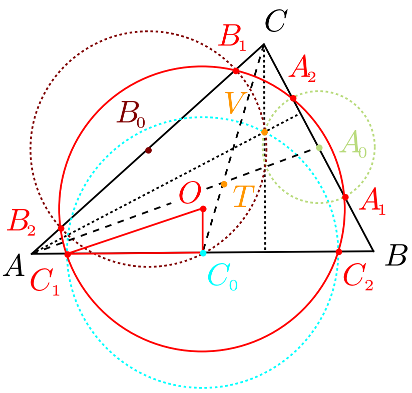
Abychom ověřili, že LK a LB jsou ramena rovnoramenného trojúhelníku se základnou BK, stačí podle (3.1) ukázat, že platí $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LB} \perp \overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LB}$. Druhý z posledních dvou vektorů rovný vektoru $\overrightarrow{BK}$ je kolmý na vektor $\overrightarrow{OB}$; proto je naším cílem ukázat, že vektory $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LB}$ a $\overrightarrow{OB}$ jsou rovnoběžné. Vyjádřeme proto vektory $\overrightarrow{LK}$ a $\overrightarrow{LB}$

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OL} = \vec{a} + (k+1)\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + (k+1)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL} = \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c},$$

odtud dostáváme $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LB} = (k+2)\vec{b}$ a důkaz vztahu $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LB} \parallel \overrightarrow{OB}$ je hotov. $\square$

Úloha 3.2.71: *Označme V ortocentrum daného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Kružnice se středem ve středu strany BC procházející bodem V protíná přímku BC v bodech A_1, A_2. Podobně kružnice se středem ve středu strany CA procházející bodem V protíná přímku CA v bodech B_1, B_2 a kružnice se středem ve středu strany AB procházející bodem V protíná přímku AB v bodech C_1, C_2. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.*[103]



Řešení:
Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a r její poloměr. Dále označme polohové vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Pro polohový vektor ortocentra V podle (3.4) platí

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

a pro polohové vektory středů A_0, B_0, C_0 stran BC, CA, AB dostáváme

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \qquad \vec{b}_0 = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}), \qquad \vec{c}_0 = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

[103] [hor–10], str. 151, úloha 1 z 49. MMO ve Španělsku r. 2008.

Ukážeme, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici se středem O. Najděme proto vzdálenost bodu C_1 od středu kružnice opsané. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník C_0C_1O plyne

$$|C_1O|^2 = |C_0O|^2 + |C_1C_0|^2 = |C_0O|^2 + |C_0V|^2 \,,$$

protože podle zadání body C_1 a V leží na jedné kružnici se středem v bodě C_0, platí tedy $|C_0C_1| = |C_0V|$. Převedením předchozí rovnosti do řeči vektorů a užitím skalárního součinu dostáváme:

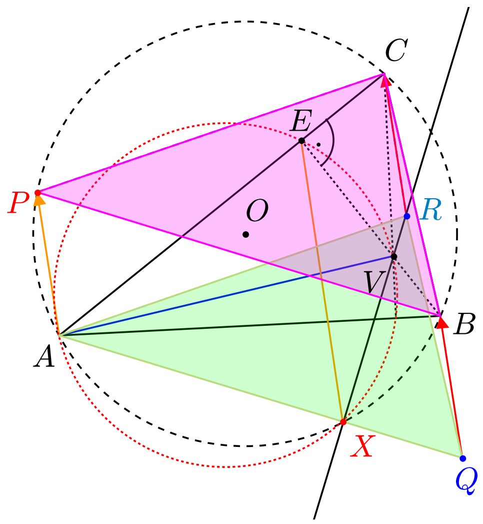
$$|C_1O|^2 = |\vec{c}_0|^2 + |\vec{v} - \vec{c}_0| = \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2 + \left|(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 + \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\rangle = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle\right) + |\vec{c}|^2 + \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle =$$

$$= 2r^2 + \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle \,,$$

přičemž v poslední rovnosti jsme využili vztahu $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = r$. Ze symetrie posledního vyjádření je zřejmé, že pro vzdálenosti zbývajících bodů A_1, A_2, B_1, B_2, C_2 od středu O dostaneme totéž vyjádření, tyto body tedy skutečně leží na jedné kružnici se středem O. □

Úloha 3.2.72: *Nechť ostroúhlý trojúhelník ABC má ortocentrum V a nechť P je libovolný vnitřní bod delšího oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC. Nechť E je pata výšky z vrcholu B, $PAQB$ a $PARC$ nechť jsou rovnoběžníky a nechť přímka AQ protíná přímku VR v bodě X. Dokažte, že $EX \parallel AP$.*[104]



Řešení:
Nejprve dokážeme, že trojúhelníky ABC a AQR mají společné ortocentrum. Těžiště trojúhelníku ABC označme $T = \frac{1}{3}(A+B+C)$, těžiště trojúhelníku PBC pak označme $T_1 = \frac{1}{3}(P+B+C)$ a V_1 označme ortocenturm trojúhelníku PBC. Trojúhelníky ABC a PBC mají společnou kružnici

[104][dju–06], str. 288, úloha 10, navržena Velkou Británii pro 37. MMO v Indii r. 1996.

opsanou a tedy i společný střed kružnice opsané, označme jej O. Pro oba trojúhelníky ABC a PBC využijeme vztah (3.6), podle kterého

$$\overrightarrow{OV} = 3\overrightarrow{OT}\,, \qquad \overrightarrow{OV_1} = 3\overrightarrow{OT_1}\,,$$

odtud odečtením první rovnosti od druhé dostáváme

$$\overrightarrow{VV_1} = \overrightarrow{OV_1} - \overrightarrow{OV} = 3(\overrightarrow{OT_1} - \overrightarrow{OT}) = 3\overrightarrow{TT_1} = (P+B+C) - (A+B+C) = \overrightarrow{AP}\,.$$

Trojúhelník AQR dostaneme posunutím trojúhelníku PBC o vektor $\overrightarrow{PA}$, neboť $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QB}$ (protože $PAQB$ je rovnoběžník) a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RC}$ (protože $PARC$ je rovnoběžník). Ortocentrum V_2 trojúhelníku AQR dostaneme týmž posunutím bodu V_1. To znamená, že $\overrightarrow{V_2V_1} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{VV_1}$, odtud $V_2 = V$. Trojúhelníky ABC a AQR mají skutečně společné ortocentrum V.

Z dokázané vlastnosti bodu V plyne, že zkoumané přímky RV a AQ jsou navzájem kolmé, takže pro jejich průsečík X platí $|\sphericalangle AXV| = \frac{\pi}{2} = |\sphericalangle AEV|$, což znamená, že čtyřúhelník $AXEV$ je vepsán do kružnice (body X a E leží na Thaletově kružnici nad průměrem AV). Pak s využitím toho, že úhly EXQ a AXE jsou úhly vedlejší, $|\sphericalangle AXE| = |\sphericalangle AVE|$ (obvodové úhly nad AE), $|\sphericalangle AVE| = |\sphericalangle BCA|$ (jde o úhel mezi výškami v_a, v_b a úhel mezi stranami a, b, což jsou úhly pro ostroúhlý trojúhelník zřejmě shodné) a $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BPA|$ (obvodové úhly nad tětivou BA), dostáváme

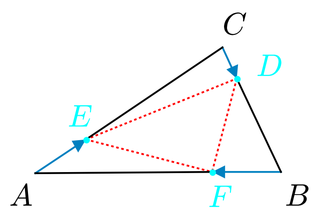
$$|\sphericalangle EXQ| = \pi - |\sphericalangle AXE| = \pi - |\sphericalangle AVE| = \pi - |\sphericalangle BCA| = \pi - |\sphericalangle BPA| = |\sphericalangle PAQ|\,.$$

Z této rovnosti již plyne, že $EX \parallel AP$, což jsme měli dokázat. □

Úloha 3.2.73: *Najděte všechny trojice čísel $k\,, l\,, m \in \langle 0,1)$ s vlastností: Zvolíme-li na stranách BC, CA, AB libovolného trojúhelníku ABC po řadě body D, E, F tak, aby platilo*

$$|DC| = k|BC|\,, \qquad |EA| = l|CA|\,, \qquad |FB| = m|AB|\,, \tag{3.59}$$

budou mít trojúhelníky ABC a DEF společné ortocentrum.[105]



Řešení:
Zaveďme polohové vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, kde O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a $r = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ její poloměr. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = r^2\cos 2\gamma\,, \qquad \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle = r^2\cos 2\beta\,, \qquad \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle = r^2\cos 2\alpha\,,$$

[105] Vlastní námět.

kde α, β, γ jsou obvykle značené vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Jeho ortocentrum V je podle (3.4) určené polohovým vektorem $\overrightarrow{OV} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Ze vztahů (3.59) v zadání plynou vektorové rovnosti $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE} = l\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BF} = m\overrightarrow{BA}$, které znamenají, že

$$\overrightarrow{OD} = k\vec{b} + (1-k)\vec{c}\,, \qquad \overrightarrow{OE} = l\vec{c} + (1-l)\vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{OF} = m\vec{a} + (1-m)\vec{b}\,.$$

Ortocentrum V trojúhelníku ABC bude také ortocentrem trojúhelníku DEF právě tehdy, když bude platit $VD \perp EF$, $VE \perp DF$, $VF \perp DE$ neboli

$$0 = \left\langle \overrightarrow{VD}, \overrightarrow{EF} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{VE}, \overrightarrow{DF} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{VF}, \overrightarrow{DE} \right\rangle .$$

Vyjádříme vektory $\overrightarrow{VD}$ a $\overrightarrow{EF}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\overrightarrow{VD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OV} = -\vec{a} + (k-1)\vec{b} - k\vec{c}\,,$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = (l+m-1)\vec{a} + (1-m)\vec{b} - l\vec{c}$$

a určíme skalární součin

$$\left\langle \overrightarrow{VD}, \overrightarrow{EF} \right\rangle = \langle -\vec{a} + (k-1)\vec{b} - k\vec{c}, (l+m-1)\vec{a} + (1-m)\vec{b} - l\vec{c} \rangle = (1-l-m)r^2 +$$

$$+(k-km-1+m)r^2 + klr^2 + (-1+m+km+kl-k-m-l+1)\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + (l-km-kl+k)\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle +$$

$$+(-kl+l-k+km)\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = (k-l+kl-km)r^2 + (-k-l+kl+km)r^2 \cos 2\gamma +$$

$$+(k+l-kl-km)r^2 \cos 2\beta + (-k+l-kl+km)r^2 \cos 2\alpha =$$

$$= r^2 \left((k-l+kl-km)(1-\cos 2\alpha) + (k+l-kl-km)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) \right) .$$

Podmínka $\left\langle \overrightarrow{VD}, \overrightarrow{EF} \right\rangle = 0$ je proto s ohledem na $r^2 \neq 0$ ekvivalentní s rovností

$$(k-l+kl-km)(1-\cos 2\alpha) + (k+l-kl-km)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) = 0\,.$$

Tato rovnost má podle zadání úlohy platit pro každý trojúhelník ABC. Vezmeme-li nejprve takový, kde $\beta = \gamma$ a pak takový, kde $\beta \neq \gamma$, dostaneme postupně dvě rovnosti

$$k - l + kl - km = 0\,, \qquad k + l - kl - km = 0\,.$$

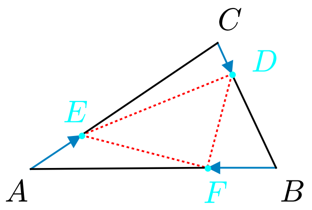
Sečtením obdržíme $2k - 2km = 0$, neboli $k(1-m) = 0$, odkud s ohledem na $m \in \langle 0, 1)$ vychází $k = 0$. Podobně bychom využitím zbývajících dvou skalárních součinů odvodili $l = 0$ a $m = 0$. To znamená, že hledaná trojice musí být tvaru $k = l = m = 0$. Že skutečně vyhovuje, je triviální poznatek, neboť pro ni trojúhelníky ABC a DEF (a tedy i jejich ortocentra) splývají. $\square$

Úloha 3.2.74: *Najděte všechny trojice čísel* $k\,, l\,, m \in \langle 0,1)$ *s vlastností* (i), *resp.* (ii)*: Zvolíme-li na stranách* BC*,* CA*,* AB *libovolného trojúhelníku* ABC *po řadě body* D*,* E*,* F *tak, aby platilo*

$$|DC| = k|BC|\,, \qquad |EA| = l|CA|\,, \qquad |FB| = m|AB|\,, \tag{3.60}$$

(i) *bude střed kružnice opsané trojúhelníku* ABC *ortocentrem trojúhelníku* DEF*;*

(ii) *bude ortocentrum trojúhelníku* ABC *středem kružnice opsané trojúhelníku* DEF*.*[106]



Řešení:
Pro obě části úlohy zaveďme polohové vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, kde O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a $r = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ její poloměr. Podobně jako v řešení Úlohy 3.2.73 využijeme rovnosti

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = r^2 \cos 2\gamma\,, \qquad \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = r^2 \cos 2\beta\,, \qquad \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = r^2 \cos 2\alpha$$

a ze vztahů (3.60) plynoucí vyjádření

$$\overrightarrow{OD} = k\vec{b} + (1-k)\vec{c}, \qquad \overrightarrow{OE} = l\vec{c} + (1-l)\vec{a}\,, \qquad \overrightarrow{OF} = m\vec{a} + (1-m)\vec{b}\,.$$

(i) Střed kružnice opsané O trojúhelníku ABC bude ortocentrem trojúhelníku DEF právě tehdy, když bude zároveň platit $OD \perp EF$, $OE \perp DF$ a $OF \perp DE$, neboli

$$0 = \langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{EF} \rangle = \langle \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{DF} \rangle = \langle \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE} \rangle\,.$$

Vyjádříme vektor $\overrightarrow{EF}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = (l+m-1)\vec{a} + (1-m)\vec{b} - l\vec{c}$$

a určíme první ze skalárních součinů

$$\langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{EF} \rangle = \langle k\vec{b} + (1-k)\vec{c}, (l+m-1)\vec{a} + (1-m)\vec{b} - l\vec{c} \rangle = (k - km - l + kl)r^2 +$$

$$+(kl+km-k)\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + (l+m-1-kl-km+k)\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + (-kl+1-m-k+km)\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle =$$
$$= r^2(k-l+kl-km) + r^2(-k+kl+km)\cos 2\gamma + r^2(-1+k+l+m-kl-km)\cos 2\beta +$$
$$+ r^2(1-k-m-kl+km)\cos 2\alpha\,.$$

[106]Vlastní námět.

Označme výrazy

$$A = 1 - k - m - kl + km\,, \qquad B = -1 + k + l + m - kl - km\,,$$

$$C = -k + kl + km\,, \qquad D = k - l + kl - km\,.$$

Podmínku $\langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{EF} \rangle = 0$ tak můžeme zapsat ve tvaru

$$A \cos 2\alpha + B \cos 2\beta + C \cos 2\gamma + D = 0\,. \tag{3.61}$$

Tato rovnost má podle zadání platit pro každý trojúhelník ABC. Vezmeme-li nejprve takový, v němž $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$, dostaneme $D - A = 0$; podobně získáme $D - B = 0$ a $D - C = 0$. Dohromady proto platí $A = B = C = D$ a podmínka (3.61) získává tvar

$$D(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1) = 0\,.$$

Druhý činitel v poslední rovnosti je nenulový např. pro rovnostranný trojúhelník ABC, a proto musí platit $D = 0$, odtud také $A = B = C = 0$. Dostáváme tedy soustavu čtyř rovnic

$$1 - k - m - kl + km = 0\,, \qquad -1 + k + l + m - kl - km = 0\,,$$

$$-k + kl + km = 0\,, \qquad k - l + kl - km = 0\,.$$

Sečtením třetí a čtvrté rovnice dostáváme podmínku $-l + 2kl = 0$ neboli $l(2k-1) = 0$, odkud $l = 0$ nebo $k = \frac{1}{2}$. Sečtením první a čtvrté rovnice dostáváme podmínku $l + m = 1$, odkud v případě $l = 0$ plyne $m = 1$, což je v rozporu s $m \in \langle 0, 1)$. Nutně proto platí $k = \frac{1}{2}$. Snadno se naopak ověří, že pro $k = \frac{1}{2}$ a $l + m = 1$ jsou všechny čtyři rovnice splněny. Zjistili jsme, že podmínka $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{EF}$ je splněna pro všechny výchozí trojúhelníky ABC právě tehdy, když platí $k = \frac{1}{2}$ a zároveň $l + m = 1$. Analogicky bychom odvodili z podmínek $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{DF}$ a $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{DE}$, že $l = \frac{1}{2}$, $k + m = 1$ a $m = \frac{1}{2}$, $k + l = 1$. Všem podmínkám tedy vyhovuje jediná trojice čísel $k = l = m = \frac{1}{2}$. To znamená, že střed kružnice opsané trojúhelníku ABC je vždy ortocentrem příslušného trojúhelníku DEF, právě když body D, E, F jsou určeny čísly k, l, m jako středy stran BC, CA, AB.

(ii) Ortocentrum V trojúhelníku ABC určené podle známého vzorce (3.4) polohovým vektorem $\overrightarrow{OV} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ bude středem kružnice opsané trojúhelníku DEF právě tehdy, když bude platit $|VD| = |VE| = |VF|$. Z první rovnosti podle (3.1) plyne

$$\langle \overrightarrow{VD} + \overrightarrow{VE}, \overrightarrow{VD} - \overrightarrow{VE} \rangle = 0\,. \tag{3.62}$$

Vyjádříme vektory $\overrightarrow{VD}$ a $\overrightarrow{VE}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{VD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OV} = -\vec{a} + (k-1)\vec{b} - k\vec{c},$$

$$\overrightarrow{VE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OV} = -l\vec{a} - \vec{b} + (l-1)\vec{c},$$

a dosadíme do rovnosti (3.62)

$$\big\langle(-1-l)\vec{a}+(-2+k)\vec{b}+(-1-k+l)\vec{c},(-1+l)\vec{a}+k\vec{b}+(1-k-l)\vec{c}\big\rangle=0\,.$$

Podobně jako v části (i) přejde tato rovnost po roznásobení do tvaru

$$A\cos 2\alpha+B\cos 2\beta+C\cos 2\gamma+D=0\,, \tag{3.63}$$

kde A, B, C, D jsou konstanty, z nichž budeme dále potřebovat jen

$$B=-(l+1)(1-k-l)+(l-1)(-1-k+l)\,,\qquad C=-(l+1)k+(k-2)(l-1)=2(1-k-l)\,.$$

Stejně jako v předchozí části zdůvodníme, že zkoumaná podmínka (3.63) je splněna pro každý trojúhelník ABC právě tehdy, když $A=B=C=D=0$. Z $C=0$ ovšem plyne $1-k-l=0$, což po dosazení do vztahu pro B vede k rovnosti

$$B=(l-1)(-1-k+l)=0\,.$$

Protože $l\neq 1$, znamená to $-1-l+k=0$. Nalezené dvě rovnice pro l a k, totiž

$$1-k-l=0 \qquad \text{a} \qquad -1-l+k=0\,,$$

mají jediné řešení $l=0$ a $k=1$, což je ve sporu se zadáním $k<1$. Žádná trojice čísel k, l, m požadované vlastnosti (ii) tedy neexistuje. □

Eulerova přímka a Feuerbachova kružnice

Podle Poznámky za Příkladem 3.1.16 body O, T, V (střed kružnice opsané, těžiště a ortocentrum trojúhelníku ABC, který není rovnostranný) leží na jedné přímce (tzv. *Eulerově přímce*), přičemž bod T dělí úsečku OV v poměru $|OT|:|TV|=1:2$, takže platí vektorová rovnost (3.6) [107]

$$\overrightarrow{OV}=3\overrightarrow{OT}\,.$$

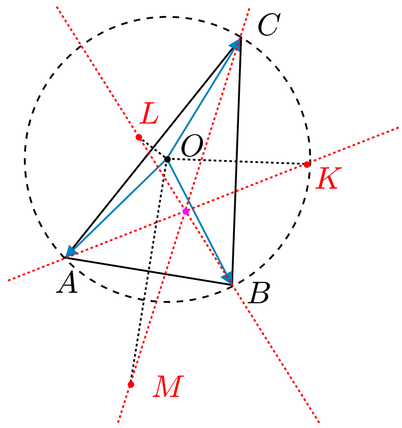
Dále podle Poznámky 1 za Příkladem 3.1.19 středy stran, paty výšek a středy úseček AV, BV, CV leží vždy na jediné (tzv. *Feuerbachově*) kružnici $k_1=(F,\frac{r}{2})$, kde r je poloměr kružnice opsané, přičemž střed F leží na Eulerově přímce (přímce OV) a půlí úsečku OV. Pro polohový vektor $\overrightarrow{OF}$ tedy platí vektorové rovnosti (3.8)

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OV}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\,.$$

Úloha 3.2.75: *Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a K, L, M jsou postupně obrazy bodu O v osových souměrnostech s osami BC, AC a AB. Dokažte, že přímky AK, BL a CM se protínají v jednom bodě a určete jeho roli v trojúhelníku ABC.*[108]

[107] Zdůrazněme, že (3.6) platí jako rovnost nulových vektorů i v případě rovnostranného trojúhelníku, takže užití (3.6) je univerzální, stejně jako užití rovnosti (3.8).

[108] [gar–05], str. 220, úloha 4.



Řešení:
Střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC zvolíme za počátek a polohový vektor $\overrightarrow{OX}$ každého bodu budeme značit jednoduše jako $\vec{x}$. Polohové vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ mají stejnou velikost, trojúhelník ABO je tedy rovnoramenný a obraz M bodu O v osové souměrnosti podle osy AB je čtvrtým vrcholem kosočtverce $AOBM$ (aplikace ekvivalence (3.1)). Analogicky to platí i pro body L a K, odtud

$$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}, \qquad \vec{l} = \vec{a} + \vec{c}, \qquad \vec{k} = \vec{b} + \vec{c}.$$

Nyní najdeme polohové vektory středů úseček AK, BL a CL:

$$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{v}, \qquad \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{l}) = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{v},$$

$$\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{m}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{v},$$

kde $\vec{v} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ je podle rovnosti (3.4) polohový vektor ortocentra V trojúhelníku ABC. Vidíme, že všechny tři úsečky se protínají v jednom bodě, který je středem každé z nich, přičemž tento bod je navíc i středem F Feuerbachovy kružnice trojúhelníku ABC, pro který totiž podle (3.8) platí $F = \frac{1}{2}(O + V)$. □

Úloha 3.2.76: *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník. Uvažujme čtyři trojúhelníky BCD, ACD, ABD, ABC. Ukažte, že:*

1. *Těžiště těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník podobný čtyřúhelníku $ABCD$.*
2. *Středy Feuerbachových kružnic těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník podobný čtyřúhelníku $ABCD$.*
3. *Ortocentra těchto trojúhelníků tvoří čtyřúhelník shodný s čtyřúhelníkem $ABCD$, přitom tyto čtyřúhelníky jsou souměrně sdružené podle některého středu.*[109]

[109] [gar–05], str. 220, úloha 6.

Řešení:

1. Označme T_1, T_2, T_3, T_4 postupně těžiště trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC:

$$T_1 = \frac{1}{3}(B+C+D)\,, \quad T_2 = \frac{1}{3}(A+C+D)\,, \quad T_3 = \frac{1}{3}(A+B+D)\,, \quad T_4 = \frac{1}{3}(A+B+C)\,.$$

Pro vektory stran čtyřúhelníku $T_1T_2T_3T_4$ pak dostáváme

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \frac{1}{3}(A-B) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{T_2T_3} = \frac{1}{3}(B-C) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\,,$$

$$\overrightarrow{T_3T_4} = \frac{1}{3}(C-D) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\,, \qquad \overrightarrow{T_4T_1} = \frac{1}{3}(D-A) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}\,.$$

Čtyřúhelníky $T_1T_2T_3T_4$ a $ABCD$ jsou tedy podobné s koeficientem podobnosti $\frac{1}{3}$.

2. Všechny čtyři trojúhelníky mají společnou kružnici opsanou, a to kružnici opsanou celému čtyřúhelníku. Označme O její střed a F_1, F_2, F_3, F_4 postupně středy Feuerbachových kružnic trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC. S využitím vztahu (3.8) pro tyto středy dostáváme vyjádření

$$F_1 = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\,, \qquad F_2 = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\,,$$

$$F_3 = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}\,, \qquad F_4 = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\,.$$

Pro vektory stran čtyřúhelníku $F_1F_2F_3F_4$ proto platí

$$\overrightarrow{F_1F_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{F_2F_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\,, \qquad \overrightarrow{F_3F_4} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\,, \qquad \overrightarrow{F_4F_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\,.$$

Čtyřúhelníky $F_1F_2F_3F_4$ a $ABCD$ jsou tedy podobné s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$.

3. Pro ortocentra V_1, V_2, V_3, V_4 trojúhelníků BCD, ACD, ABD, ABC využijeme vztahu (3.4):

$$V_1 = B + C + D - 2O\,, \qquad V_2 = A + C + D - 2O\,,$$

$$V_3 = A + B + D - 2O\,, \qquad V_4 = A + B + C - 2O\,.$$

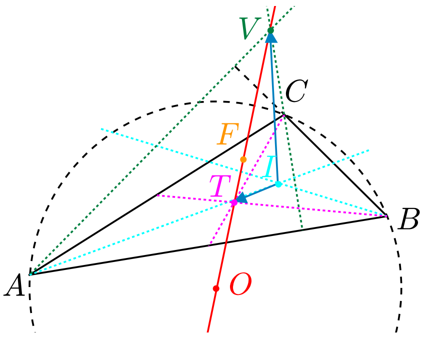
Nyní najdeme středy úseček AV_1, BV_2, CV_3, DV_4:

$$\frac{1}{2}(A + V_1) = \frac{1}{2}(A + B + C + D - 2O)\,, \qquad \frac{1}{2}(B + V_2) = \frac{1}{2}(B + A + C + D - 2O)\,,$$

$$\frac{1}{2}(C + V_3) = \frac{1}{2}(C + A + B + D - 2O)\,, \qquad \frac{1}{2}(D + V_4) = \frac{1}{2}(D + A + B + C - 2O)\,.$$

Vidíme, že úsečky AV_1, BV_2, CV_3, DV_4 mají společný střed, což znamená, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $V_1V_2V_3V_4$ jsou podle něho souměrně sdružené. □

Úloha 3.2.77: *Je dán různostranný trojúhelník ABC. Nechť T, I a V jsou postupně těžiště, střed kružnice vepsané a ortocentrum tohoto trojúhelníku. Dokažte, že $|\sphericalangle TIV| > \frac{\pi}{2}$.*[110]



Řešení:
V uvažovaném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice opsané, r její poloměr, ϱ poloměr kružnice vepsané a F střed Feuerbachovy kružnice. Pro body V a F podle vztahů (3.6), resp.(3.8) platí

$$\overrightarrow{OV} = 3\overrightarrow{OT}\,, \qquad \overrightarrow{OV} = 2\overrightarrow{OF}\,.$$

Nyní vyjádříme vektory $\overrightarrow{IT}$ a $\overrightarrow{IV}$, abychom mohli najít velikost úhlu TIV pomocí skalárního součinu těchto vektorů:

$$\overrightarrow{IV} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{IO} + 2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{IO} + 2(-\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IF}) = 2\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{IO}\,,$$

$$\overrightarrow{IT} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{IO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{IO} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{IO} + \frac{2}{3}(-\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{IF}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{IF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IV}\,.$$

Pro dotyčný skalární součin tak dostáváme

$$\langle\overrightarrow{IV}, \overrightarrow{IT}\rangle = \langle 2\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{IO}, \frac{2}{3}\overrightarrow{IF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IV}\rangle = \frac{1}{3}\left(4|\overrightarrow{IF}|^2 - |\overrightarrow{IO}|^2\right)\,.$$

Z elementární geometrie známe *Eulerův vzorec* pro vzdálenost středů I a O i vzorec pro vzdálenost středů I a F (plynoucí z vnitřního dotyku příslušných kružnic):

$$|IO|^2 = r^2 - 2r\varrho\,, \qquad |IF| = \frac{r}{2} - \varrho\,.$$

Dosazením do vyjádřeného skalárního součinu obdržíme

$$\langle\overrightarrow{IV}, \overrightarrow{IT}\rangle = \frac{1}{3}\left(r^2 - 4r\varrho + 4\varrho^2 - r^2 + 2r\varrho\right) = -\frac{2}{3}\varrho(r - 2\varrho) < 0\,,$$

neboť v různostranném trojúhelníku ABC platí $|IO| > 0$, a tedy $r > 2\rho$ opět díky Eulerovu vzorci. Zároveň pro skalární součin obecně platí

$$\langle\overrightarrow{IV}, \overrightarrow{IT}\rangle = |\overrightarrow{IV}| \cdot |\overrightarrow{IT}| \cos|\sphericalangle TIV|\,,$$

proto z odvozené nerovnosti plyne $\cos|\sphericalangle TIV| < 0$ neboli $|\sphericalangle TIV| > \frac{\pi}{2}$. □

[110] [dju–06], str. 250, úloha 5, navržena Francií pro 31. MMO v Číně r. 1989.

Užití kolmých průmětů

Z obecné teorie víme, že pro každý vektor $\vec{v}$ a každou přímku p se směrovým vektorem $\vec{w}$ existují vektory $\vec{v}_p$ a $\vec{v}_\perp$ tak, že vektor $\vec{v}_p$ leží v přímce p, vektor $\vec{v}_\perp$ je k ní kolmý a platí rovnost

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}_\perp\,,$$

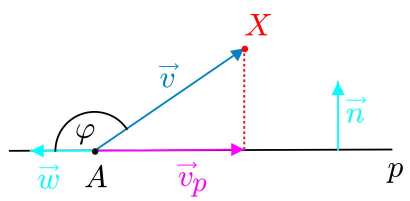
kterou jsme v obecnějším podání uvedli v Kapitole 1 pod číslem (1.8). Vektor $\vec{v}_p$, který nazýváme *kolmým průmětem* vektoru $\vec{v}$ na přímku p, je dán vzorcem (1.10)

$$\vec{v}_p = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}\,.$$

Pokud je směrový vektor $\vec{w}$ přímky p jednotkový a vektor $\vec{v}$ není nulový, pak podle geometrického významu skalárního součinu dvou vektorů dostáváme

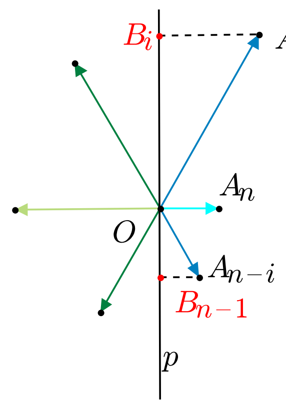
$$|\vec{v}_p| = |\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle| = |\vec{v}| \cdot \cos\varphi\,,$$

kde φ je odchylka daných vektorů $\vec{v}$, $\vec{w}$. Absolutní hodnota skalárního součinu $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$ tedy vyjadřuje velikost kolmého průmětu $\vec{v}_p$ vektoru $\vec{v}$ do směru jednotkového vektoru $\vec{w}$ (jak je názorně ukázáno na obrázku).



Na závěr této úvodní části dodejme, že v rovině je vzdálenost každého bodu X od přímky p rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $\overrightarrow{AX}$, kde A je libovolný bod na přímce p, do směru normálového vektoru $\vec{n}$ přímky p.

Úloha 3.2.78: *Dokažte, že když se všechny vnitřní úhly konvexního n-úhelníku rovnají a délky po sobě jdoucích stran $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňují podmínku $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$, pak žádná z těchto nerovností není ostrá, tj. platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*[111]



[111] [dju–06], str. 32, úloha 3.

Řešení:
Umístěme všechny vektory stran daného n-úhelníku (orientovaných v jednom směru obcházení hranice) do bodu O. Stranám $a_1, \dots, a_n$ tak budou odpovídat po řadě vektory $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$. Protože jde o n-úhelník, jeho strany tvoří uzavřenou lomenou čáru, takže musí platit

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{o}\,.$$

Protože vnitřní úhly n-úhelníku se podle předpokladu úlohy všechny rovnají $\frac{(n-2)\pi}{n}$ a úhly A_iOA_{i+1} je doplňují do π, platí

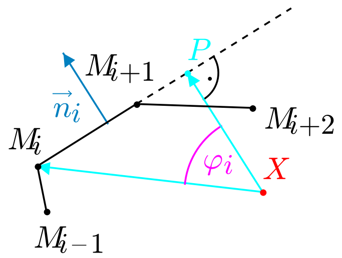
$$|\sphericalangle A_1OA_2| = |\sphericalangle A_2OA_3| = \cdots = |\sphericalangle A_nOA_1| = \frac{2\pi}{n} \qquad \text{a} \qquad |OA_1| \geq |OA_2| \geq \ldots \geq |OA_n|\,.$$

Nechť p je přímka procházející bodem O a kolmá na vektor $\overrightarrow{OA_n}$. Nechť $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ jsou kolmé průměty bodů $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ na přímku p (průmět bodu A_n je roven bodu O). Podle rovnosti $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{o}$ je taky

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \cdots + \overrightarrow{OB_{n-i}} = \vec{o}\,.$$

Protože pro každé $i \leq \frac{n}{2}$ je $|OB_i| \geq |OB_{n-i}|$ (neboť vektory $\overrightarrow{OA_i}$ a $\overrightarrow{OA_{n-i}}$ svírají s přímkou p stejný úhel a zároveň $|OA_i| \geq |OA_{n-i}|$), leží všechny součty $\overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{OB_{n-i}}$ na přímce p na stejné straně od bodu O. Proto musí být všechny tyto součty nulové (aby byla splněna podmínka $\overrightarrow{OB_1} + \cdots + \overrightarrow{OB_{n-i}} = \vec{o}$). To ovšem znamená, že $|OB_i| = |OB_{n-i}|$, a tedy také $|OA_i| = |OA_{n-i}|$, pro každé $i \leq \frac{n}{2}$. Z rovnosti $a_1 = a_{n-1}$ plyne, že v řetězci $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ platí až po člen a_{n-1} rovnosti, takže díky shodným vnitřním úhlům a shodným $n-1$ stranám je daný n-úhelník pravidelný, a proto platí i $a_{n-1} = a_n$. $\square$

Úloha 3.2.79: *Je dán konvexní k-úhelník. Dokažte, že každý jeho vnitřní bod má týž součet vzdáleností od k přímek, na kterých leží strany daného k-úhelníku, právě když je součet všech k jednotkových vektorů vnějších normál k těmto stranám roven nulovému vektoru.*[112]



Řešení:
Nechť $M_1, M_2 \dots M_k$ je daný k-úhelník a $\vec{n}_i$ jednotkový vektor vnější normály ke straně M_iM_{i+1}, kde $i = 1, \dots, k$ a $M_{k+1} = M_1$. Protože pro libovolný bod X uvnitř k-úhelníku vektory $\overrightarrow{XM_i}$ a

[112] [pra–86], str. 102, úloha 5.18.

$\vec{n}_i$ svírají zřejmě ostrý úhel φ_i, pro vzdálenost z_i bodu X od přímky M_iM_{i+1} rovnou velikosti kolmého průmětu $\overrightarrow{XP}$ vektoru $\overrightarrow{XM_i}$ do směru vektoru $\vec{n}_i$ platí

$$z_i = \left|\overrightarrow{PX}\right| = \left|\overrightarrow{XM_i}\right| \cos\varphi_i = \left\langle \overrightarrow{XM_i}, \vec{n}_i \right\rangle .$$

Nechť A, B jsou libovolné vnitřní body k-úhelníku. Zapišme rovnost součtů jejich vzdáleností od přímek stran uvažovaného k-úhelníku podle odvozeného vyjádření:

$$\sum_{i=1}^{k} \left\langle \overrightarrow{AM_i}, \vec{n}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \left\langle \overrightarrow{BM_i}, \vec{n}_i \right\rangle .$$

Po dosazení $\overrightarrow{BM_i} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}$ odtud dostaneme

$$\sum_{i=1}^{k} \left\langle \overrightarrow{AM_i}, \vec{n}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \left\langle \overrightarrow{BA}, \vec{n}_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{k} \left\langle \overrightarrow{AM_i}, \vec{n}_i \right\rangle .$$

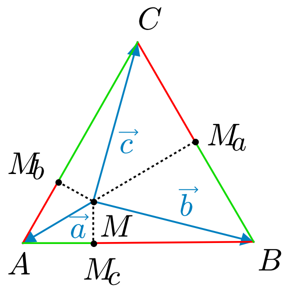
Vidíme, že body A, B mají stejné součty vzdáleností od přímek stran k-úhelníku, právě když platí rovnost

$$\left\langle \overrightarrow{BA}, \sum_{i=1}^{k} \vec{n}_i \right\rangle = 0 .$$

Protože vnitřní body A, B k-úhelníku lze zvolit tak, aby vektor $\overrightarrow{BA}$ měl libovolně zvolený směr, poslední rovnost bude obecně splněna jedině v případě, když $\sum_{i=1}^{k} \vec{n}_i = \vec{o}$. $\square$

Úloha 3.2.80: *Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC je dán bod M. Označme M_a, M_b, M_c paty kolmic z bodu M po řadě na strany BC, AC, AB. Dokažte rovnost*[113]

$$|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b| . \tag{3.64}$$



Řešení:
Označme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$. Pak $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{b}$ a $\vec{a} - \vec{c}$ jsou vektory stran rovnostranného trojúhelníku ABC, takže mají tutéž velikost, kterou označíme

$$d = |\vec{b} - \vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{c}| . \tag{3.65}$$

[113] [pra–86], str. 103, úloha 5.23, kde je řešena trojím užitím Pythagorovy věty.

Protože součet obou stran dokazované rovnosti (3.64) je roven obvodu $3d$ trojúhelníku ABC (na obrázku jsou červeně, resp. zeleně vyznačeny délky z levé, resp. pravé strany rovnosti (3.64)), stačí se zabývat jen levou stranou a dokázat rovnost

$$|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = \frac{3d}{2}\,.$$

Pro sčítané hodnoty jakožto velikosti kolmých průmětů platí

$$|AM_b| = \left\langle \vec{a}, \frac{\vec{a}-\vec{c}}{d} \right\rangle, \qquad |BM_C| = \left\langle \vec{b}, \frac{\vec{b}-\vec{a}}{d} \right\rangle, \qquad |CM_a| = \left\langle \vec{c}, \frac{\vec{c}-\vec{b}}{d} \right\rangle,$$

a proto

$$|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = \frac{1}{d}\Big(\langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{c}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}\rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}-\vec{b}\rangle\Big)\,,$$

takže je naším úkolem dokázat rovnost

$$\langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{c}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}\rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}-\vec{b}\rangle = \frac{3d^2}{2}\,.$$

To je však snadné, neboť její levá strana je zřejmě rovna

$$\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{c}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{b}-\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{c}-\vec{b}|^2\,,$$

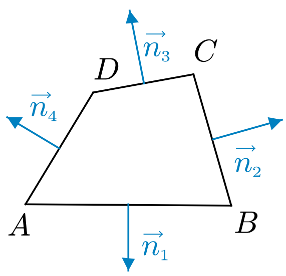
což s využitím rovností (3.65) vede k požadovanému výsledku $\frac{3}{2}d^2$.

Dodejme, že úlohu lze vyřešit i bez úvahy o obvodu trojúhelníku na základě zřejmé rovnosti

$$\langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{c}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}-\vec{a}\rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}-\vec{b}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{b}\rangle + \langle \vec{b}, \vec{b}-\vec{c}\rangle + \langle \vec{c}, \vec{c}-\vec{a}\rangle\,,$$

jejíž strany jsou d-násobky příslušných stran dokazované rovnosti (3.64). □

Úloha 3.2.81: *Dokažte, že konvexní čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy mají stejný součet vzdáleností od čtyř přímek, na kterých leží jeho strany, je rovnoběžník.*[114]



[114] [pra–86], str. 101, úloha 5.11.

Řešení:
Označme postupně $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$, $\vec{n}_4$ jednotkové vektory vnějších normál ke stranám AB, BC, CD, DA a ϱ_A (ϱ_B, ϱ_C, ϱ_D) součet vzdáleností bodu A (B, C, D) od čtyř přímek, na kterých leží strany uvažovaného čtyřúhelníka $ABCD$. Podle zadání platí

$$\varrho_A = \varrho_B = \varrho_C = \varrho_D\,.$$

Vzdálenost bodu A od přímek AB a AD je rovna nule, vzdálenost od přímky CD je rovna skalárnímu součinu $\langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_3 \rangle$ a vzdálenost od přímky BC je rovna $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 \rangle$. (Vektory stran volíme tady i dále vždy tak, aby byl skalární součin nezáporný.) Odtud

$$\varrho_A = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_3 \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 \rangle\,.$$

Analogicky

$$\varrho_B = \langle \overrightarrow{BA}, \vec{n}_4 \rangle + \langle \overrightarrow{BD}, \vec{n}_3 \rangle\,, \qquad \varrho_D = \langle \overrightarrow{DA}, \vec{n}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{DB}, \vec{n}_2 \rangle\,.$$

Z předpokládané rovnosti $\varrho_A = \varrho_B$ proto vyplývá

$$\begin{aligned} 0 = \varrho_A - \varrho_B &= \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_3 \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 \rangle - \langle \overrightarrow{BA}, \vec{n}_4 \rangle - \langle \overrightarrow{BD}, \vec{n}_3 \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 + \vec{n}_4 \rangle + \langle \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}, \vec{n}_3 \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 + \vec{n}_4 \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_3 \rangle + \\ &+ \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \rangle\,. \end{aligned}$$

(Člen $\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_1 \rangle$ jsme mohli přičíst, protože vektor $\vec{n}_1$ je kolmý k vektoru $\overrightarrow{AB}$, takže jsme přičetli nulu.) Podobně

$$\begin{aligned} 0 = \varrho_A - \varrho_D &= \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_3 \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}_2 \rangle - \langle \overrightarrow{DA}, \vec{n}_1 \rangle - \langle \overrightarrow{DB}, \vec{n}_2 \rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_1 + \vec{n}_3 \rangle + \langle \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}, \vec{n}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_1 + \overrightarrow{n_3} \rangle + \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_2 \rangle + \\ &+ \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_4 \rangle = \langle \overrightarrow{AD}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \rangle\,. \end{aligned}$$

Protože žádný nenulový vektor roviny ABD nemůže být kolmý k oběma vektorům $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, musí platit

$$\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \vec{o}\,.$$

Odtud postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 + \vec{n}_2 &= -\vec{n}_3 - \vec{n}_4\,, \\ |\vec{n}_1 + \vec{n}_2|^2 &= |\vec{n}_3 + \vec{n}_4|^2\,, \\ |\vec{n}_1|^2 + |\vec{n}_2|^2 + 2\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle &= |\vec{n}_3|^2 + |\vec{n}_4|^2 + 2\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle\,, \\ 2\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle &= 2\langle \vec{n}_3, \vec{n}_4 \rangle\,. \end{aligned}$$

To znamená, že $|\sphericalangle \vec{n}_1, \vec{n}_2| = |\sphericalangle \vec{n}_3, \vec{n}_4|$. Podobně můžeme ze stejné rovnosti odvodit také vztah $|\sphericalangle \vec{n}_1, \vec{n}_4| = |\sphericalangle \vec{n}_2, \vec{n}_3|$. Poslední dvě rovnosti znamenají, že pro vnitřní úhly čtyřúhelníku $ABCD$ platí $\beta = \delta$ a $\alpha = \gamma$, takže $ABCD$ je rovnoběžník. $\square$

Úloha 3.2.82: *V prostoru je dáno 10 vektorů tak, že součet libovolných devíti z nich má velikost menší, než je velikost součtu všech 10 vektorů. Dokažte, že existuje osa, na kterou má každý z daných 10 vektorů kladný kolmý průmět.*[115]

Řešení:
Pro daných 10 vektorů $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{10}$ a jejich součet

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{10} \vec{v}_i$$

podle zadání platí

$$\forall i = 1, \ldots, 10\colon |\vec{x}| > |\vec{x} - \vec{v}_i| \, .$$

Podle každé z těchto ostrých nerovností je $\vec{x} \neq \vec{o}$. Ukážeme, že hledaná osa je například osa určená směrovým vektorem $\vec{x}$. Kolmý průmět $\vec{v}_i$ do této osy je roven reálnému číslu

$$\left\langle \vec{v}_i, \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \right\rangle = \frac{1}{|\vec{x}|} \langle \vec{v}_i, \vec{x} \rangle \, ,$$

takže tento průmět je kladný právě tehdy, když $\langle \vec{v}_i, \vec{x} \rangle > 0$.

Z rovnosti $|\vec{x} - \vec{v}_i|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{v}_i|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{v}_i \rangle$ vyjádříme

$$\langle \vec{v}_i, \vec{x} \rangle = \frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2}|\vec{x}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{x} - \vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2}\left(|\vec{x}|^2 - |\vec{x} - \vec{v}_i|^2\right) \, .$$

Protože pro každé $i = 1, \ldots, 10$ podle předpokladu platí $|\vec{x}| > |\vec{x} - \vec{v}_i|$, je podle odvozeného vyjádření také $\langle \vec{v}_i, \vec{x} \rangle > 0$, což jsme chtěli ukázat. □

Úloha 3.2.83: *Žák měl překreslit konvexní mnohoúhelník ležící v kruhu o poloměru* 1 *z jednoho listu papíru na druhý. Přenesl první stranu, pak úhel, který svírá tato strana s druhou stranou, kterou přenesl poté atd. Úhly žák přenášel přesně, avšak délky přenášel s relativní chybou p, což znamená, že úsečku délky a zakreslil jako úsečku délky b, kde $|\frac{b}{a} - 1| \leq p$. Po přenesení poslední strany zjistil, že její koncový bod má od počátečního bodu první strany nenulovou vzdálenost d. Dokažte, že $d \leq 4p$ (nezávisle na počtu stran mnohoúhelníku).*[116]

Řešení:
Vektory stran původního n-úhelníku označíme po řadě $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, takže platí

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \vec{o} \, .$$

Podobně označíme vektory odpovídajících stran přeneseného n-úhelníku (který ovšem není uzavřený) po řadě jako $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$. Podle zadání má vektor

$$\vec{x} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \cdots + \vec{b}_n$$

[115] [pra–86], str. 101, úloha 5.13.
[116] [pra–86], str. 101, úloha 5.14.

velikost $d > 0$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí (při zřejmém označení délek stran)

$$\left|\frac{b_i}{a_i} - 1\right| \leq p \quad \text{neboli} \quad b_i = (1 + p_i)a_i, \quad \text{kde} \quad |p_i| \leq p < 1\,.$$

Protože úhly, a tedy i směry stran, se při přenášení zachovaly, můžeme od skalárních rovností přejít k vektorovým rovnostem

$$\vec{b}_i = \vec{a}_i(p_i + 1)\,,$$

ze kterých dostáváme

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i = \sum_{i=1}^{n} (p_i + 1)\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\vec{a}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\vec{a}_i\,.$$

Vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ rozdělme na dvě skupiny: vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$, které mají nezáporný kolmý průmět do směru $\vec{x}$, a vektory $\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n$, které mají tento průmět záporný (počátek a směr přirozeného číslování stran mnohoúhelníku můžeme zvolit právě takto). Pro zkoumanou vzdálenost d platí

$$d^2 = |\vec{x}|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \left\langle \vec{x}, \sum_{i=1}^{k} p_i\vec{a}_i \right\rangle + \left\langle \vec{x}, \sum_{j=k+1}^{n} p_j\vec{a}_j \right\rangle.$$

S využitím toho, že $|\sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x}, p_i\vec{a}_i \rangle| \leq p \sum_{i=1}^{k} \langle \vec{x}, \vec{a}_i \rangle$ (protože skalární součiny jsou nezáporné) a podobně $|\sum_{j=k+1}^{n} \langle \vec{x}, p_j\vec{a}_j \rangle| \leq -p \sum_{j=k+1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{a}_j \rangle$ (protože skalární součiny jsou záporné), dostáváme

$$d^2 \leq p\left\langle \vec{x}, \sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i \right\rangle - p\left\langle \vec{x}, \sum_{j=k+1}^{n} \vec{a}_j \right\rangle = 2p\left\langle \vec{x}, \sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i \right\rangle,$$

neboť $\sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i = -\sum_{j=k+1}^{n} \vec{a}_j$. Vektor $\vec{y} = \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_k$ je vektorem úhlopříčky původního mnohoúhelníku ležícího dle zadání v kruhu o poloměru 1, tedy pro jeho velikost platí

$$|\vec{y}| = \left|\sum_{i=1}^{k} \vec{a}_i\right| \leq 2\,.$$

Z odvozené nerovnosti pro hodnotu d proto plyne

$$d^2 \leq 2p|\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\varphi \leq 4pd\,,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ a který splňuje nerovnosti $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ díky zvolenému číslování stran. Z nerovnosti $d^2 \leq 4pd$ a předpokladu $d > 0$ už plyne $d \leq 4p$. $\square$

Na závěr celé kapitoly odvodíme podle [pra–86] užitím integrálního počtu zajímavý výsledek ve formě následující úlohy. Všechny zbylé úlohy pak vyřešíme užitím právě tohoto výsledku, bez něhož bychom se jinak v jejich řešení patrně stěží obešli.

Úloha 3.2.84: *Dokažte, že pro libovolný konečný soubor vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ležících v rovině s kartézskou soustavou souřadnic O_{xy} a jednotkové vektory $\vec{e}_\varphi$ svírající úhel φ s kladnou poloosou x platí*

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\langle \vec{a}_i, \vec{e}_\varphi \rangle| d\varphi = 2 \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| , \tag{3.66}$$

kde $\vec{a}_i(\varphi)$ značí kolmý průmět vektoru $\vec{a}_i$ do směru vektoru $\vec{e}_\varphi$.[117]

Řešení:
Ze souboru vektorů můžeme vypustit všechny vektory, které jsou nulové, neboť ty neovlivní ani součet délek vektorů, ani součet délek jejich kolmých průmětů na libovolnou přímku. Nechť pro každé $i = 1, \ldots, n$ svírá nenulový vektor $\vec{a}_i$ s kladnou poloosou úhel α_i. Velikost kolmého průmětu vektoru $\vec{a}_i$ na osu svírající s kladnou poloosou x úhel φ, má pak vyjádření

$$|\vec{a}_i(\varphi)| = |\langle \vec{a}_i, \vec{e}_\varphi \rangle| = |\vec{a}_i| \, |\cos(\varphi - \alpha_i)| \, ,$$

Nyní sečteme kolmé průměty všech vektorů souboru a součet prointegrujeme v proměnné φ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$. Dostaneme

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\langle \vec{a}_i, \vec{e}_\varphi \rangle| d\varphi = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \, |\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi =$$

$$= \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \int_0^\pi |\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi \, .$$

Protože funkce $f(\varphi) = |\cos(\varphi - \alpha_i)|$ má periodu π, platí

$$\int_0^\pi |\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi = \int_{\alpha_i}^{\alpha_i + \pi} |\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi = \int_0^\pi |\cos \varphi| d\varphi = 2 \, .$$

Odtud

$$\int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \sum_{i=1}^n |\langle \vec{a}_i, \vec{e}_\varphi \rangle| d\varphi = 2 \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \, . \qquad \square$$

Poznámka:
Dokázaná rovnost (3.66) znamená, že střední hodnota integrované funkce je $\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i|$. Pro libovolný soubor vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ proto existuje úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ takový, že

$$\sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| = \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \, |\cos(\varphi - \alpha_i)| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \tag{3.67}$$

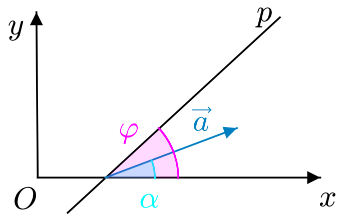
a současně existuje úhel $\psi \in \langle 0, \pi \rangle$ takový, že

$$\sum_{i=1}^n |\vec{a}_i(\varphi)| = \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \, |\cos(\psi - \alpha_i)| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |\vec{a}_i| \, . \tag{3.68}$$

[117] [pra–86], poznámka a důsledek ze strany 113.

Vyjádříme (3.68) ještě jednou bez zavedené symboliky: *Pro každý systém vektorů* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *v rovině existuje taková přímka, že součet velikostí kolmých průmětů vektorů* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *na tuto přímku je alespoň* $\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}|\vec{a}_i|$.

Úloha 3.2.85: *Dva konečné soubory vektorů* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *a* $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m$ *ležící v jedné rovině mají tu vlastnost, že součet velikostí kolmých průmětů vektorů prvního souboru na libovolnou přímku je nejvýše roven součtu velikostí kolmých průmětů vektorů druhého souboru na tutéž přímku. Dokažte, že součet velikostí vektorů prvního souboru je nejvýše roven součtu velikostí vektorů druhého souboru.*[118]



Řešení:
V rovině daných vektorů zavedeme kartézský souřadnicový systém O_{xy}. Z obou souborů vektorů můžeme vypustit všechny vektory, které jsou nulové, neboť ty neovlivní ani součet velikostí vektorů ani součet velikostí jejich kolmých průmětů na libovolnou přímku. Nechť tedy vektory $\vec{a}_i$, $\vec{b}_j$ jsou nenulové a svírají s kladnou poloosou x úhel α_i, resp. β_j, kde $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. Velikosti kolmých průmětů vektorů $\vec{a}_i$, $\vec{b}_j$ na přímku p svírající s kladnou poloosou x úhel φ (které označíme jako v Úloze 3.2.84) pak mají vyjádření

$$|\vec{a}_i(\varphi)| = |\vec{a}_i|\,|\cos(\varphi - \alpha_i)|\,, \qquad |\vec{b}_j(\varphi)| = |\vec{b}_j|\,|\cos(\varphi - \beta_j)|\,.$$

Podle předpokladu nerovnost

$$\sum_{i=1}^{m} |\vec{a}_i|\,|\cos(\varphi - \alpha_i)| \leq \sum_{j=1}^{m} |\vec{b}_j|\,|\cos(\varphi - \beta_j)|\,.$$

platí pro všechny přímky, tedy pro všechny úhly $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$. Prointegrujeme-li tuto nerovnost v proměnné φ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$, dostaneme

$$\int_0^{\pi} \sum_{i=1}^{n} |\vec{a}_i|\,|\cos(\varphi - \alpha_i)| d\varphi \leq \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^{m} |\vec{b}_j|\,|\cos(\varphi - \beta_j)| d\varphi\,.$$

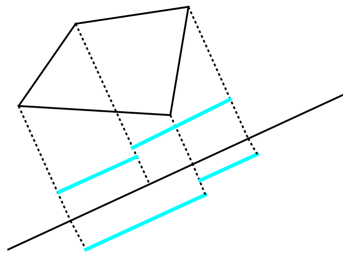
S využitím rovnosti (3.66) lze tuto nerovnost přepsat jako

$$2\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq 2\sum_{j=1}^{m} |b_j| \quad \text{neboli} \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sum_{j=1}^{m} |b_j|\,,$$

a důkaz porovnání součtu velikostí vektorů z jednotlivých souborů je hotov. $\square$

[118] [pra–86], str. 103, úloha 5.26.

Úloha 3.2.86: *Leží-li jeden konvexní mnohoúhelník uvnitř druhého, pak obvod prvního z nich nepřevyšuje obvod druhého z nich. Dokažte.*[119]



Řešení:
Leží-li mnohoúhelník M_1 uvnitř mnohoúhelníku M_2, pak délka kolmého průmětu M_1 na libovolnou přímku nepřevyšuje délku kolmého průmětu M_2 na tutéž přímku (kolmý průmět M_1 je totiž podmnožinou kolmého průmětu M_2). Délka takového kolmého průmětu každého konvexního mnohoúhelníku je však polovinou součtu délek kolmých průmětů všech jeho stran. Proto součet délek kolmých průmětů stran M_1 nepřevyšuje součet délek kolmých průmětů stran M_2. Protože to platí pro každou přímku, podle výsledku Úlohy 3.2.85 uplatněného k souborům vektorů stran M_1 a vektorů stran M_2 dostáváme, že obvod M_1 nepřevyšuje obvod M_2. □

Úloha 3.2.87: *Součet velikostí několika komplanárních vektorů je roven L. Dokažte, že z těchto vektorů lze vybrat několik (případně i jeden) tak, aby jejich součet byl vektor o velikosti alespoň $\frac{L}{\pi}$.*[120]

Řešení:
Dané vektory označme $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Podle zadání je $\sum_{i=1}^{n} |\vec{a}_i| = L$. Stejně jako v řešení Úlohy 3.2.85 zavedeme v rovině daných vektorů kartézský souřadnicový systém O_{xy}. Ze souboru vektorů můžeme vypustit všechny vektory, které jsou nulové, neboť ty neovlivní ani součet velikostí vektorů, ani velikost součtu vybraných vektorů. Podle tvrzení o nerovnosti (3.68) existuje jednotkový vektor $\vec{e}_\varphi$ s vlastností

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle| \geq \frac{2}{\pi} L \,.$$

Vektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ rozdělme do dvou skupin: jako K_1 označíme množinu indexů $k \in \{1, \ldots, n\}$, pro které $\langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle \geq 0$, a jako K_2 označíme množinu těch indexů $k \in \{1, \ldots, n\}$, pro které $\langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle < 0$. Pak

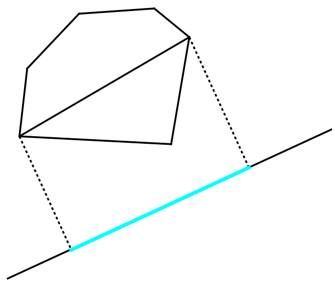
$$\sum_{k=1}^{n} |\langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle| = \sum_{k \in K_1} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle - \sum_{k \in K_2} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle = |\sum_{k \in K_1} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle| + |\sum_{k \in K_2} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_\varphi \rangle| \,,$$

[119] [pra–86], str. 103, úloha 5.27.
[120] [pra–86], str. 103, úloha 5.28.

tudíž alespoň jeden z obou posledních sčítanců je nejméně $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot L$, tj. $\frac{L}{\pi}$. Proto pro $i = 1$ nebo pro $i = 2$ platí

$$\frac{L}{\pi} \leq \Big| \sum_{k \in K_i} \langle \vec{a}_k, \vec{e}_k \rangle \Big| \leq \sum_{k \in K_i} |\vec{a}_k| \,. \qquad \square$$

Úloha 3.2.88: *Má-li některý konvexní mnohoúhelník všechny strany i úhlopříčky kratší než d, pak jeho obvod je kratší než πd. Dokažte.*[121]



Řešení:
Jsou-li $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ vektory stran daného mnohoúhelníku, pak součet velikostí jejich kolmých průmětů na libovolnou přímku (určenou jednotkovým vektorem $\vec{e}$) rovný $\sum_{k=1}^n |\langle \vec{a}_k, \vec{e} \rangle|$ je dvojnásobek velikosti kolmého průmětu celého mnohoúhelníku, tedy dvojnásobek velikosti kolmého průmětu některé jeho strany nebo úhlopříčky, tedy nejvýše $2d$. Proto z tvrzení o nerovnosti (3.68) pro některý jednotkový vektor $\vec{e}$ platí

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\vec{a}_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle \vec{a}_k, \vec{e} \rangle| \leq 2d \,, \quad \text{odtud} \quad \sum_{k=1}^{n} |\vec{a}_k| \leq \pi d \,. \qquad \square$$

Úloha 3.2.89: *Je-li součet komplanárních vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ roven nulovému vektoru, pak platí $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|$. Dokažte.*[122]

Řešení:
Podle výsledku Úlohy 3.2.85 stačí dokázat, že za předpokladu $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{o}$ pro všechny jednotkové vektory $\vec{e}$ roviny vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ platí nerovnosti

$$|\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle| + |\langle \vec{b}, \vec{e} \rangle| + |\langle \vec{c}, \vec{e} \rangle| + |\langle \vec{d}, \vec{e} \rangle| \geq |\langle \vec{a} + \vec{d}, \vec{e} \rangle| + |\langle \vec{b} + \vec{d}, \vec{e} \rangle| + |\langle \vec{c} + \vec{d}, \vec{e} \rangle| \,,$$

že tedy pro reálná čísla $a = \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle$, $b = \langle \vec{b}, \vec{e} \rangle$, $c = \langle \vec{c}, \vec{e} \rangle$, $d = \langle \vec{d}, \vec{e} \rangle$, jejichž součet je díky našemu předpokladu zřejmě roven nule, platí

$$|a| + |b| + |c| + |d| \geq |a + d| + |b + d| + |c + d| \,.$$

Protože $a+b+c+d = 0$, můžeme do nerovnosti dosadit $d = -a-b-c$ a dostat tak ekvivalentní nerovnost

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |b + c| + |a + c| + |a + b| \,,$$

[121] [pra–86], str. 103, úloha 5.29.
[122] [pra–86], str. 103, úloha 5.30.

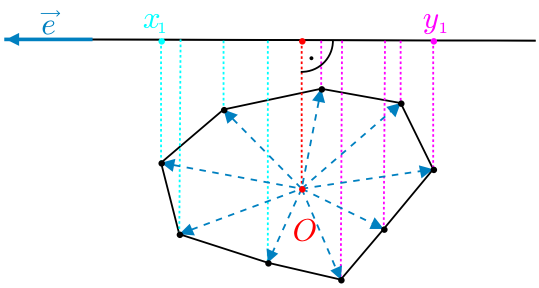
o níž ukážeme, že skutečně platí pro libovolná $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Při pevných a, b jsou obě strany nerovnosti po částech lineární v proměnné c, proto stačí nerovnost $L \geq P$ dokázat v bodech zlomu odpovídajících funkcí, tj. pro $c = 0$, $c = -a - b$, $c = -a$, $c = -b$ a rovněž pro $c \to \infty$ a pro $c \to -\infty$. Hodnoty L a P zapíšeme do tabulky:

$c = 0$	$L = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert + \lvert a+b\rvert$	$P = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert + \lvert a+b\rvert$
$c = -a-b$	$L = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert + \lvert a+b\rvert$	$P = \lvert a\rvert + \lvert b\rvert + \lvert a+b\rvert$
$c = -a$	$L = 2\lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$	$P = \lvert b-a\rvert + \lvert a+b\rvert \leq \lvert b\rvert + \lvert a\rvert + \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$c = -b$	$L = 2\lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$	$P = \lvert a-b\rvert + \lvert a+b\rvert \leq \lvert b\rvert + \lvert a\rvert + \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
$c \to \infty$	$L = 2c + a + b + \lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$	$P = 2c + a + b + \lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$
$c \to -\infty$	$L = -2c - a - b + \lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$	$P = -2c - a - b + \lvert a\rvert + 2\lvert b\rvert$

Vidíme, že pro každé $c \in \mathbf{R}$ skutečně platí $L \geq P$. □

Úloha 3.2.90: *Uvnitř libovolného konvexního n-úhelníku $A_1A_2\dots A_n$ je vybrán bod O tak, že $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{o}$. Dokažte, že obvod tohoto n-úhelníku není menší než číslo $\frac{4}{n}\left(|OA_1| + |OA_2| + \cdots + |OA_n|\right)$.*[123]



Řešení:
Podle výsledku Úlohy 3.2.85 stačí ukázat, že pro libovolný jednotkový vektor $\vec{e}$ roviny daného n-úhelníku platí

$$\left|\left\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}\right\rangle\right| + \cdots + \left|\left\langle \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \vec{e}\right\rangle\right| + \left|\left\langle \overrightarrow{A_nA_1}, \vec{e}\right\rangle\right| \geq \frac{4}{n}\left(\left|\left\langle \overrightarrow{OA_1}, \vec{e}\right\rangle\right| + \cdots + \left|\left\langle \overrightarrow{OA_n}, \vec{e}\right\rangle\right|\right). \quad (3.69)$$

Čísla $a_k = \left\langle \overrightarrow{OA_k}, \vec{e}\right\rangle$, pro $k = 1, \dots, n$ rozdělíme na dvě skupiny $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0$ a $y_1^o \leq y_2^o \leq \dots \leq y_{n-k}^o < 0$. Označme ještě $y_i = -y_i^o > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n-k$. Nyní využijeme podmínky ze zadání, že $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{o}$, a tedy

$$\left\langle \overrightarrow{OA_1}, \vec{e}\right\rangle + \left\langle \overrightarrow{OA_2}, \vec{e}\right\rangle + \cdots + \left\langle \overrightarrow{OA_n}, \vec{e}\right\rangle = \langle \vec{o}, \vec{e}\rangle = 0$$

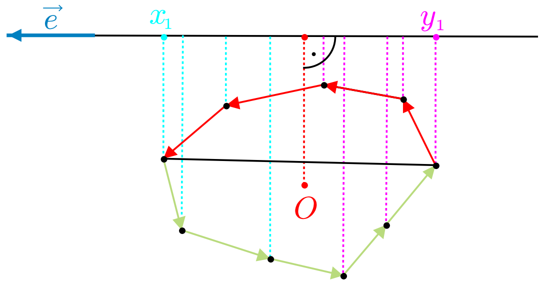
pro libovolný jednotkový vektor $\vec{e}$. Můžeme proto psát

$$x_1 + \cdots + x_k - (y_1 + \cdots + y_{n-k}) = 0\,,$$

[123][pra–86], str. 103, úloha 5.31. Dotyčný bod $O = \frac{1}{n}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)$ se někdy nazývá *těžištěm* daného n-úhelníku.

takže lze definovat nezáporné číslo $a = x_1 + \cdots + x_k = y_1 + \cdots + y_{n-k}$. Pak pro zavedená čísla a_k platí $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 2a$. Dokazovanou nerovnost tak můžeme přepsat do tvaru

$$\bigl|\bigl\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{e}\bigr\rangle\bigr| + \cdots + \bigl|\bigl\langle \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \vec{e}\bigr\rangle\bigr| + \bigl|\bigl\langle \overrightarrow{A_nA_1}, \vec{e}\bigr\rangle\bigr| \geq \frac{4}{n} \cdot 2a\,.$$



Podle druhého obrázku vysvětlíme, proč levá strana této nerovnosti je rovna $2(x_1 + y_1)$. Součet všech nezáporných čísel $\langle \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \vec{e}\rangle$, tedy součet velikostí kolmých průmětů vektorů $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (vyznačených na obrázku červeně), je totiž roven $x_1 + y_1$. Na druhou stranu součet záporných čísel $\langle \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \vec{e}\rangle$, (odpovídajících zeleně vyznačeným vektorům) je roven $-(x_1 + y_1)$. Tím je tvrzení o hodnotě součtu všech čísel $|\langle \overrightarrow{A_iA_{i+1}}, \vec{e}\rangle|$ dokázáno, a nám tak zbývá dokázat nerovnost

$$2(x_1 + y_1) \geq \frac{4}{n} \cdot 2a\,, \qquad \text{neboli} \qquad x_1 + y_1 \geq \frac{4a}{n}\,.$$

Z nerovností $kx_1 \geq x_1 + \cdots + x_k = a$ a $(n-k)y_1 \geq y_1 + \cdots + y_{n-k} = a$ plyne

$$x_1 \geq \frac{a}{k} \qquad \text{a} \qquad y_1 \geq \frac{a}{n-k}\,,$$

tudíž

$$x_1 + y_1 \geq \frac{a}{k} + \frac{a}{n-k} = \frac{a(n-k+k)}{k(n-k)} = \frac{4an}{4k(n-k)} \geq \frac{4an}{n^2} = \frac{4a}{n}\,,$$

kde jsme využili odhad $4k(n-k) = n^2 - (n-2k)^2 \leq n^2$. $\square$

Kapitola 4

Aplikace vektorového a smíšeného součinu

4.1 Příklady teoretického významu

Příklad 4.1.1: *Mějme dány libovolné tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ v prostoru. Dokažte vzorec*[1]

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}\rangle = \langle \vec{c} \times \vec{a}, \vec{b}\,\rangle = -\langle \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b}\,\rangle = -\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}\,\rangle = -\langle \vec{c} \times \vec{b}, \vec{a}\rangle\,.$$

Řešení:
Nechť dané vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ mají ve zvolené pravotočivé ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ souřadnice

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)\,, \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)\,, \qquad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)\,,$$

pak pro smíšený součin $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle$ podle (1.25) platí

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Je-li determinant matice A roven číslu $t \in \mathbf{R}$, pak determinat matice B, která vznikne z matice A záměnou dvou řádků, je podle pravidel pro výpočet determinantu roven $-t$. Záměnou prvního a druhého řádku v našem determinantu dostáváme $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle = -\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c}\,\rangle$ a dalšími záměnami řádků bychom dostali další dokazované rovnosti. □

Příklad 4.1.2: *Mějme dány libovolné tři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ v prostoru. Dokažte vzorec*[2]

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \langle \vec{a}, \vec{c}\,\rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b}\,\rangle \vec{c}.$$

Řešení:
Zvolme pravotočivou ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tak, aby platilo

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1\,, \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\,, \qquad \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3\,,$$

[1] [bud–71], str. 118.
[2] [gel–07], str. 202.

kde a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, $c_3 \in \mathbf{R}$, a upravme pravou i levou stranu dokazované rovnosti, jež označíme P, resp. L. Využijeme přitom toho, že $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{o}$ pro libovolný vektor $\vec{x}$. Protože $(\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2, \vec{\mathrm{e}}_3)$ je pravotočivá ortonormální báze, je $\vec{\mathrm{e}}_1 \times \vec{\mathrm{e}}_2 = \vec{\mathrm{e}}_3$ a $\vec{\mathrm{e}}_1 \times \vec{\mathrm{e}}_3 = -\vec{\mathrm{e}}_2$, takže

$$P = a_1\vec{\mathrm{e}}_1 \times (b_2c_3\vec{\mathrm{e}}_1 - b_1c_3\vec{\mathrm{e}}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{\mathrm{e}}_3) = -a_1b_1c_3\vec{\mathrm{e}}_3 - (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1)\vec{\mathrm{e}}_2\,,$$

$$L = a_1c_1(b_1\vec{\mathrm{e}}_1 + b_2\vec{\mathrm{e}}_2) - a_1b_1(c_1\vec{\mathrm{e}}_1 + c_2\vec{\mathrm{e}}_2 + c_3\vec{\mathrm{e}}_3) = (a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2)\vec{\mathrm{e}}_2 - a_1b_1c_3\vec{\mathrm{e}}_3\,.$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána. □

Příklad 4.1.3: *Mějme dány libovolné čtyři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v prostoru. Dokažte vzorec*[3]

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times (\vec{c} \times \vec{d}\,) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{d}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\,\rangle\vec{d}\,.$$

ŘEŠENÍ:
Levou stranu dokazované rovnosti upravíme užitím nejprve rovnosti dokázané v předchozím Příkladu 4.1.2 a poté rovnosti $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z}\rangle$ z Příkladu 4.1.1:

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times (\vec{c} \times \vec{d}\,) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{d}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\,\rangle\vec{d} = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{d}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\,\rangle\vec{d}\,,$$

což je pravá strana dokazované rovnosti. □

Poznámka:
Z antisymetrie vektorového součinu a z právě dokázané rovnosti plyne další rovnost

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times (\vec{c} \times \vec{d}\,) = -(\vec{c} \times \vec{d}\,) \times (\vec{a} \times \vec{b}\,) = -\langle \vec{c}, \vec{d} \times \vec{b}\,\rangle\vec{a} + \langle \vec{c}, \vec{d} \times \vec{a}\rangle\vec{b}\,.$$

Porovnáním s původní rovností z Příkladu 4.1.3 tak dostáváme výsledek, který jsme v literatuře nenašli: *Pro libovolné čtyři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v prostoru platí rovnost*

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{d}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\,\rangle\vec{d} = -\langle \vec{c}, \vec{d} \times \vec{b}\,\rangle\vec{a} + \langle \vec{c}, \vec{d} \times \vec{a}\rangle\vec{b}\,.$$

Tento vztah, který je obecným potvrzením lineární závislosti vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ještě můžeme díky výsledku Příkladu 4.1.1 přepsat v cyklicky symetrickém tvaru

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}\,\rangle\vec{a} - \langle \vec{c}, \vec{d} \times \vec{a}\rangle\vec{b} + \langle \vec{d}, \vec{a} \times \vec{b}\,\rangle\vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\,\rangle\vec{d} = 0\,. \tag{4.1}$$

Všimněme si ještě, že některý koeficient (tj. smíšený součin) v této lineární kombinaci čtyř vektorů je roven nule, právě když tři vektory v něm zastoupené jsou komplanární, neboť se jedná o jejich smíšený součin. Potvrzení této komplanárnosti dostaneme, když na levé straně (4.1) vektor s nulovým koeficientem vynecháme. Jsou-li například komplanární vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, pak pro každý vektor $\vec{d}$ z (4.1) po zřejmé úpravě obdržíme

$$\langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}\,\rangle\vec{a} + \langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{d}\,\rangle\vec{b} + \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{d}\,\rangle\vec{c} = 0\,.$$

[3][gel–07], str. 202.

Příklad 4.1.4: *Mějme dány libovolné čtyři vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v prostoru. Dokažte vzorec*[4]

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \,.$$

Řešení:
Zvolme pravotočivou ortonormální bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tak, aby platilo

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 \,, \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \,, \qquad \vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 \,, \qquad \vec{d} = d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3 \,,$$

kde a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, $d_3 \in \mathbf{R}$, a upravme pravou i levou stranu dokazované rovnosti, jež označíme P, resp. L. Podle známých pravidel platí

$$L = \big\langle a_1b_2\vec{e}_3, (c_2d_3 - c_3d_2)\vec{e}_1 + (c_3d_1 - c_1d_3)\vec{e}_2 + (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{e}_3 \big\rangle = a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 \,,$$

$$P = a_1c_1(b_1d_1 + b_2d_2) - a_1d_1(b_1c_1 + b_2c_2) = a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 \,.$$

Rovnost $L = P$ je tak dokázána. □

Příklad 4.1.5: *Pro každý trojúhelník ABC v prostoru ukažte, že tři vektory*

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA}) \,, \qquad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \times (\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}) \,, \qquad \vec{w} = \overrightarrow{CA} \times (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC})$$

jsou vektory stran některého trojúhelníku, který je s původním trojúhelníkem podobný.[5]

Řešení:
Vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ jsou zřejmě nenulové, žádné dva z nich nejsou rovnoběžné (protože tvoří trojúhelník). Trojím užitím rovnosti dokázané v Příkladu 4.1.2 dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} \,, \\ \vec{v} &= \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{c} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \,, \\ \vec{w} &= \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \vec{a} - \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Některé tři vektory tvoří trojúhelník, právě když jsou všechny tři nenulové, žádné dva nejsou rovnoběžné a jejich součet je roven nulovému vektoru. Jsou takové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$?

Předně je jasné, že sečtením všech tří rovností (4.2) dostaneme $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{o}$.

V druhém kroku z odvozených vyjádření (4.2) odvodíme, že všechny tři vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou nenulové. Kdyby např. platilo $\vec{u} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c} = \vec{o}$, znamenalo by to s ohledem na lineární nezávislost vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$, že by platily obě rovnosti $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$ a $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$, takže by v trojúhelníku ABC platilo $\vec{a} \perp \vec{b}$ i $\vec{a} \perp \vec{c}$, což je spor. Podobně bychom ukázali, že také vektory $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou nenulové.

Vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ je kolmý na rovinu trojúhelníku ABC, vektor $\vec{u} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ je kolmý na vektor $\vec{b} \times \vec{c}$ i na vektor $\vec{a}$, leží tedy ve stejné rovině jako trojúhelník ABC a zároveň je kolmý na vektor $\vec{a}$. Podobně vektor $\vec{v} = \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$ leží v rovině trojúhelníku ABC a zároveň je kolmý na vektor $\vec{b}$.

[4] [bud–71], str. 120–121, řešení pozměněno.
[5] [gel–07], str. 203, úloha 574, Romanian Mathematical Olympiad, 1976.

Protože vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ nejsou rovnoběžné, nejsou rovnoběžné ani k nim kolmé vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Podobně bychom to ukázali pro zbylé dvojice vektorů $\vec{u}$ a $\vec{w}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, neboť vektor $\vec{w}$ rovněž leží v rovině ABC, a to tak, že $\vec{w} \perp \vec{c}$.

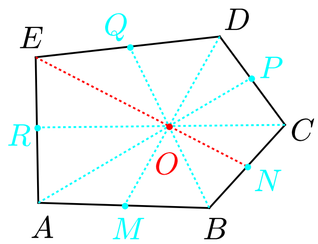
Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tedy tvoří trojúhelník. Jeho strany jsou navíc kolmé na strany trojúhelníku ABC, neboť (jak jsme uvedli již v předchozím odstavci) platí $\vec{u} \perp \vec{a}$, $\vec{v} \perp \vec{b}$ a $\vec{w} \perp \vec{c}$. Oba trojúhelníky tedy mají shodné vnitřní úhly, jsou proto podobné, jak jsme měli ukázat. □

4.2 Další řešené úlohy

Ověřování kolinearity

V literatuře jsme našli více úloh, ve kterých byla potřebná kolinearita dvou vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ prokazována pomocí vektorového součinu, tj. ověřením rovnosti $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$. Pokud však bylo možné stejně efektivně prokázat potřebnou kolinearitu afinním výpočtem, přepracovali jsme postup řešení a zařadili daný námět do Kapitoly 2. Nespornou výhodu vektorového součinu jsme ocenili pouze u dvou nalezených úloh, které proto uvedeme v tomto krátkém paragrafu.

Úloha 4.2.1: *Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník. Označme M, N, P, Q, R po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA. Dokažte, že pokud se úsečky AP, BQ, CR a DM protínají v jednom bodě, pak tento bod leží také na úsečce EN.*[6]



Řešení:
Nechť bod O je společným bodem úseček AP, BQ, CR a DM. Zvolme ho za počátek a označme polohové vektory jednotlivých bodů $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{n} = \overrightarrow{ON}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$. Body M, N, P, Q, R jsou po řadě středy stran AB, BC, CD, DE, EA, platí tedy

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \qquad \vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \qquad \vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}), \qquad \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}), \qquad \vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{e}).$$

Protože body A, P a O jsou kolineární, je vektorový součin odpovídajících vektorů nulový:

$$\vec{a} \times \vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{o}, \qquad \text{odtud} \qquad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{d} \times \vec{a}.$$

[6] [kin–02], str. 1–2 a 4, úloha 7 – 1984 Annual Greek High School Competition.

Analogicky získáme z kolinearity bodů B, Q, O, resp. C, R, O, resp. D, M, O rovnosti

$$\vec{b} \times \vec{d} = \vec{e} \times \vec{b}\,, \qquad \vec{c} \times \vec{e} = \vec{a} \times \vec{c}\,, \qquad \vec{d} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{d}\,,$$

Všechny čtyři rovnosti můžeme spojit do jednoho řetězce

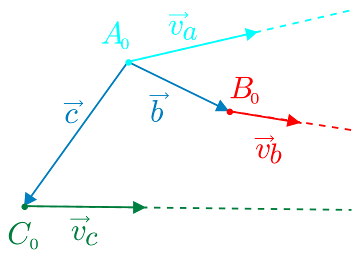
$$\vec{e} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{d} = \vec{d} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{e}\,.$$

Rovnost krajních součinů znamená, že

$$\vec{e} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{o} \qquad \text{neboli} \qquad \vec{e} \times \vec{n} = \vec{o}\,,$$

body E, N, O jsou tedy kolineární. To znamená, že průsečík O leží také na úsečce EN. □

Úloha 4.2.2: *Jestliže tři kosmické sondy letí stálými rychlostmi po třech přímých dráhách, pak nejvýše ve dvou okamžicích mohou jejich pozice ležet v jedné přímce, pokud neležely v přímce ve výchozím čase $t = 0$. Dokažte.*[7]



Řešení:
Nechť proměnné body A, B, C v prostoru značí polohy pohybujících se sond. Tyto body ve výchozím čase $t = 0$ označíme A_0, B_0, C_0 a rychlosti sond označíme po řadě $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$. Pak body A, B, C mají v každém čase $t \geq 0$ vyjádření

$$A(t) = A_0 + t\vec{v}_a\,, \qquad B(t) = B_0 + t\vec{v}_b\,, \qquad C(t) = C_0 + t\vec{v}_c\,.$$

Body A, B, C budou v některém čase t ležet v jedné přímce právě tehdy, když bude platit $\overrightarrow{AB}(t) \parallel \overrightarrow{AC}(t)$. Vyjádřeme tyto vektory

$$\overrightarrow{AB}(t) = B_0 - A_0 + t(\vec{v}_b - \vec{v}_a) = \vec{b} + t\vec{v}_1 \qquad \overrightarrow{AC}(t) = C_0 - A_0 + t(\vec{v}_c - \vec{v}_a) = \vec{c} + t\vec{v}_2\,,$$

kde jsme označili $\vec{b} = B_0 - A_0$, $\vec{c} = C_0 - A_0$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_b - \vec{v}_a$ a $\vec{v}_2 = \vec{v}_c - \vec{v}_a$. Jak víme, zkoumané vektory budou rovnoběžné ($\overrightarrow{AB}(t) \parallel \overrightarrow{AC}(t)$) právě tehdy, když jejich vektorový součin bude roven nulovému vektoru:

$$\overrightarrow{AB}(t) \times \overrightarrow{AC}(t) = \vec{o}\,, \quad \text{neboli} \quad t^2(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + t(\vec{v}_1 \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{v}_2) + (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{o}\,.$$

Podle zadání výchozí body A_0, B_0, C_0 nejsou kolineární, platí tedy

$$\vec{b} \times \vec{c} = (B_0 - A_0) \times (C_0 - A_0) \neq \vec{o}\,.$$

[7] [pra–86], str. 104, úloha 5.36, zadání upraveno.

Vynásobíme-li skalárně poslední vektorovou rovnici (nenulovým) vektorem $\vec{b}\times\vec{c}$, dostaneme jako její důsledek rovnici

$$t^2\langle\vec{v}_1\times\vec{v}_2,\vec{b}\times\vec{c}\rangle + t\Big(\langle\vec{v}_1\times\vec{c},\vec{b}\times\vec{c}\rangle + \langle\vec{b}\times\vec{v}_2,\vec{b}\times\vec{c}\rangle\Big) + |\vec{b}\times\vec{c}|^2 = 0\,.$$

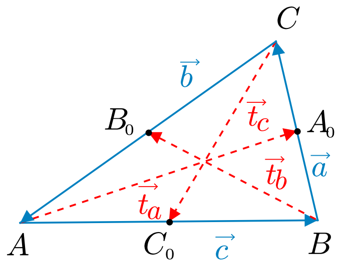
Takováto rovnice – je-li kvadratická nebo lineární – má v oboru $t \geq 0$ nejvýše dva kořeny, ve zbylém případě nemá žádný kořen, neboť přechází v rovnost $|\vec{b}\times\vec{c}|^2 = 0$, která – jak víme – neplatí. Uvažovaná rovnice má tedy nejvýše dva kořeny, tím je tvrzení úlohy dokázáno. $\square$

Vyjadřování obsahů

Jak víme z Kapitoly 1, pro obsah každého rovnoběžníku $ABCD$ a obsah každého trojúhelníku ABC platí vzorce (1.23)

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|\,,\qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\,.$$

Úloha 4.2.3: *Dokažte, že trojúhelník, jehož délky stran se rovnají délkám těžnic trojúhelníku ABC, existuje a má obsah rovný $\frac{3}{4}$ obsahu trojúhelníku ABC.*[8]



Řešení:
Označme postupně A_0, B_0, C_0 středy stran BC, AC, AB trojúhelníku ABC. Existenci trojúhelníku, jehož strany mají délky $|AA_0|$, $|BB_0|$ a $|CC_0|$ dokážeme, když ukážeme, že takový trojúhelník lze sestrojit z $\overrightarrow{AA_0}$, $\overrightarrow{BB_0}$, $\overrightarrow{CC_0}$ v roli vektorů jeho stran. (To nám pak umožní vyjádřit jeho obsah pomocí vektorového součinu.)

Pro vektory stran trojúhelníku $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ platí $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{o}$. Vektory těžnic $\vec{t_a} = \overrightarrow{AA_0}$, $\vec{t_b} = \overrightarrow{BB_0}$, $\vec{t_c} = \overrightarrow{CC_0}$ tvoří trojúhelník, pokud jsou všechny tři nenulové, žádné dva z nich nejsou rovnoběžné a jejich součet je roven nulovému vektoru. První dvě vlastnosti jsou zřejmé, z vyjádření

$$\vec{t_a} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\,,\qquad \vec{t_b} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\,,\qquad \vec{t_c} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\,,$$

plyne i třetí potřebná vlastnost:

$$\vec{t_a} + \vec{t_b} + \vec{t_c} = \frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{o}\,.$$

Z vektorů $\vec{t_a}$, $\vec{t_b}$, $\vec{t_c}$ lze tedy skutečně sestrojit trojúhelník.

[8] [and–03], str. 87, úloha 2.

Nyní označme S obsah trojúhelníku ABC a S' obsah trojúhelníku tvořeného těžnicemi. Oba tyto obsahy vyjádříme pomocí vektorových součinů, do druhého vyjádření dosadíme $\vec{a} = -\vec{b} - \vec{c}$ a upravíme:

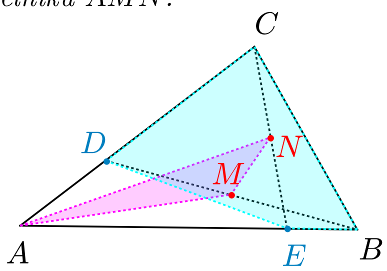
$$S = \frac{1}{2}|\vec{c} \times \vec{b}|\,,$$

$$S' = \frac{1}{2}|\vec{t}_a \times \vec{t}_b| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \times \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\right| = \frac{1}{8}\left|(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} - 2\vec{c})\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\left|(-2\vec{b}\,) \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b}\right| = \frac{3}{8}|\vec{c} \times \vec{b}| = \frac{3}{4}S\,,$$

což jsme měli dokázat. □

Úloha 4.2.4: *Uvnitř stran AC, AB daného trojúhelníku ABC jsou dány po řadě body D, E. Označme M a N po řadě středy úseček BD a CE. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $BCDE$ je roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku AMN.*[9]



Řešení:
Obsahy trojúhelníku AMN a čtyřúhelníku $BCDE$ porovnáme pomocí vektorových součinů

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AN}\right|\,, \qquad S_{DCBE} = S_{ABC} - S_{AED} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

Rozdíl velikostí vektorových součinů v druhém vyjádření je zde roven velikosti jejich vektorového rozdílu, neboť násobené vektory leží v jedné rovině, tedy vektorové součiny jsou oba kolmé na tuto rovinu a mají dokonce stejný směr, neboť násobíme vždy dva vektory v pořadí daném kladným směrem (proti směru hodinových ručiček). Proto

$$S_{DCBE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

K úpravě výrazu pro S_{AMN} vyjádříme potřebné vektory

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\,, \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right).$$

Po dosazení a následném využití toho, že $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AE}$ a $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AD}$, dostaneme

$$S_{AMN} = \frac{1}{8} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \times \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right)\right| = \frac{1}{8} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{4}S_{DCBE}\,,$$

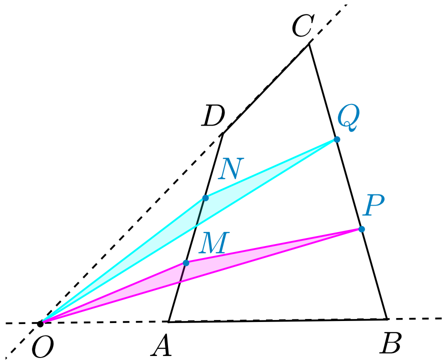
což jsme měli ukázat. □

[9] [gel–07], str. 206, úloha 588.

Úloha 4.2.5: *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$, v němž neplatí $AB \parallel CD$, zvolme body M, N na straně AD a body P, Q na straně BC tak, aby platilo*

$$|AM| = |MN| = |ND| \qquad a \qquad |BP| = |PQ| = |QC| \,.$$

Dokažte, že trojúhelníky MOP a NOQ, kde O je průsečík přímek AB a CD, mají stejný obsah.[10]



Řešení:
Abychom obsahy obou trojúhelníků mohli porovnat pomocí vektorových součinů

$$S_{MOP} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP}\right| , \qquad S_{NOQ} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OQ}\right| ,$$

vhodně vyjádříme nejprve potřebné vektory

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD} ,$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} ,$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD} ,$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} .$$

Pro obsahy trojúhelníků pak po dosazení a využití $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC} \parallel \overrightarrow{OD}$ dostáváme

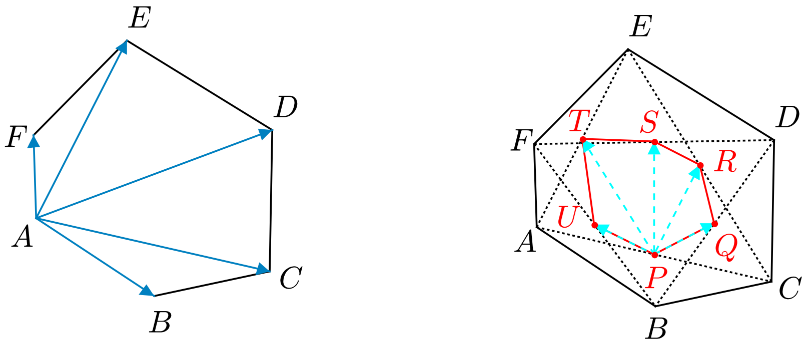
$$S_{MOP} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}\right) \times \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + \frac{2}{9} \cdot \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OB}\right| ,$$

$$S_{NOQ} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}\right) \times \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + \frac{2}{9} \cdot \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OB}\right| .$$

Z posledních dvou rovností je už zřejmé, že $S_{MOP} = S_{NOQ}$. □

[10] [gel–07], str. 206, úloha 587, změněno chybné zadání.

Úloha 4.2.6: *Označme P, Q, R, S, T, U po řadě středy úhlopříček AC, BD, CE, DF, EA, FB konvexního šestiúhelníku $ABCDEF$. Dokažte, že obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ je čtyřikrát větší než obsah šestiúhelníku $PQRSTU$.*[11]



Řešení:
Pro středy P, Q, R, S, T, U úhlopříček AC, BD, CE, DF, EA, FB platí

$$P = \frac{1}{2}(A + C) \qquad Q = \frac{1}{2}(B + D) \qquad R = \frac{1}{2}(C + E)$$

$$S = \frac{1}{2}(D + F) \qquad T = \frac{1}{2}(E + A) \qquad U = \frac{1}{2}(F + B)\,.$$

Obsah S_0 šestiúhelníku $ABCDEF$ můžeme vyjádřit jako součet obsahů trojúhelníků ABC, ACD, ADE a AEF:

$$S_0 = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE}| + |\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}|)\,.$$

Podobně jako v Úloze 4.2.4 je zde součet velikostí vektorových součinů roven velikosti jejich vektorového součtu (neboť násobené vektory leží v jedné rovině, tedy vektorové součiny jsou všechny kolmé na tuto rovinu a mají dokonce stejný směr, neboť násobíme vždy dva vektory v pořadí daném kladným směrem). Proto

$$S_0 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AF}\right|.$$

Analogicky pro obsah S šestiúhelníku $PQRSTU$ platí

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{PT} \times \overrightarrow{PU}\right|.$$

[11] [hor–06].

Nyní vyjádříme potřebné vektory $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PT}$ a $\overrightarrow{PU}$ pomocí vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ a $\overrightarrow{AF}$:

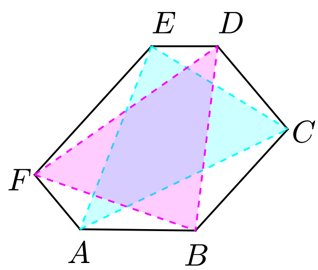
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= Q-P = \frac{1}{2}(B+D-A-C) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}),\\
\overrightarrow{PR} &= R-P = \frac{1}{2}(C+E-A-C) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE},\\
\overrightarrow{PS} &= S-P = \frac{1}{2}(D+F-A-C) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}),\\
\overrightarrow{PT} &= T-P = \frac{1}{2}(E+A-A-C) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}),\\
\overrightarrow{PU} &= U-P = \frac{1}{2}(F+B-A-C) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}),
\end{aligned}$$

Pro obsah šestiúhelníku $PQRSTU$ po dosazení a roznásobení dostáváme

$$\begin{aligned}
S = \frac{1}{8}\Big| &\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AD}\right)+\\
&\left(-\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}\right)+\\
&+\left(-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}\right)\Big| =\\
&= \frac{1}{8}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{AF}\right| = \frac{1}{4}S_0\,.
\end{aligned}$$

□

Úloha 4.2.7: *Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejný obsah.*[12]



Řešení:
Libovolný bod O zvolme jako počátek a označme polohové vektory jednotlivých bodů $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$, $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$, $\vec{f}=\overrightarrow{OF}$. Pro obsahy zkoumaných trojúhelníků užitím vektorového součinu dostáváme rovnosti

$$S_{ACE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AE}\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{e}-\vec{a})\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{c}\times\vec{e}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{e}\right|,$$

[12] [kin–02], str. 1–2 a 4, úloha 6 – 1984 Annual Greek High School Competition.

$$S_{BDF} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BF}\right| = \frac{1}{2}\left|(\vec{d} - \vec{b}\,) \times (\vec{f} - \vec{b}\,)\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{d} \times \vec{f} - \vec{d} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{f}\right|.$$

Protože podle zadání jsou protilehlé strany zkoumaného šestiúhelníku rovnoběžné, vektorové součiny odpovídajících vektorů jsou nulové:

$$\vec{o} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{ED} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{d} - \vec{e}) = \vec{b} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{e} - \vec{a} \times \vec{d} + \vec{a} \times \vec{e},$$

$$\vec{o} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{FE} = (\vec{b} - \vec{c}\,) \times (\vec{e} - \vec{f}\,) = \vec{b} \times \vec{e} - \vec{b} \times \vec{f} - \vec{c} \times \vec{e} + \vec{c} \times \vec{f},$$

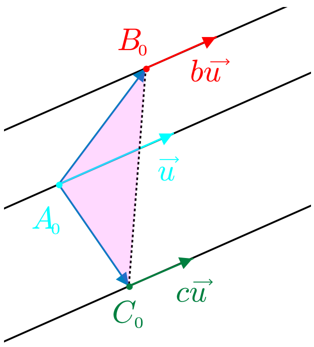
$$\vec{o} = \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{AF} = (\vec{d} - \vec{c}\,) \times (\vec{f} - \vec{a}) = \vec{d} \times \vec{f} - \vec{d} \times \vec{a} - \vec{c} \times \vec{f} + \vec{c} \times \vec{a}.$$

Sečtením všech tří rovností po úpravě dostáváme

$$\vec{c} \times \vec{e} - \vec{c} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{e} = \vec{d} \times \vec{f} - \vec{d} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{f},$$

odtud již podle výše odvozených vyjádření plyne, že $S_{ACE} = S_{BDF}$. □

Úloha 4.2.8: *Tři běžci běží stálými rychlostmi po třech rovnoběžných cestách ležících v jedné rovině. Pozice běžců v ní určují pohyblivé body A, B, C. V počátečním čase $t = 0$ má trojúhelník ABC obsah 2 jednotky, v čase $t = 5$ obsah 3 jednotky. Jaký obsah může mít v čase $t = 10$?*[13]



Řešení:
Body A, B, C v čase $t = 0$ označme A_0, B_0, C_0. Dále označme rychlosti běžců po řadě $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$. Protože běžci běží po rovnoběžných cestách, jsou tyto tři vektory rovnoběžné ($\vec{v}_a \parallel \vec{v}_b \parallel \vec{v}_c$). Nechť tedy $\vec{v}_a = \vec{u}$, pak existují nějaká čísla b, $c \in \mathbf{R}$ pro která $\vec{v}_b = b\vec{u}$, $\vec{v}_c = c\vec{u}$. Body A, B, C v libovolném čase $t > 0$ tedy mají vyjádření

$$A(t) = A_0 + t\vec{u}\,, \qquad B(t) = B_0 + tb\vec{u}\,, \qquad C(t) = C_0 + tc\vec{u}\,.$$

Pro obsah $S(t)$ trojúhelníku ABC v čase t tak dostáváme

$$S(t) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}(t) \times \overrightarrow{AC}(t)\right| = \frac{1}{2}\left|(B_0 + tb\vec{u} - A_0 - t\vec{u}) \times (C_0 + tc\vec{u} - A_0 - t\vec{u})\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{A_0B_0} + t(b-1)\vec{u}) \times (\overrightarrow{A_0C_0} + t(c-1)\vec{u})\right| =$$

[13] [pra–86], str. 104, úloha 5.35.

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} + t\left((b-1)\cdot \vec{u} \times \overrightarrow{A_0C_0} + (c-1)\cdot \overrightarrow{A_0B_0} \times \vec{u}\right)\right| .$$

Při označení $\vec{p} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}$ a $\vec{q} = (b-1)\vec{u} \times \overrightarrow{A_0C_0} + (c-1)\overrightarrow{A_0B_0} \times \vec{u}$ můžeme vyjádření proměnného obsahu zapsat ve tvaru

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot |\vec{p} + t\vec{q}| .$$

Protože podle zadání leží vektory $\overrightarrow{A_0B_0}$ a $\overrightarrow{A_0C_0}$ s vektorem rychlosti $\vec{v}$ v jedné rovině, oba vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ jsou násobky jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$ zmíněné roviny. Pro vhodná $p, q \in \mathbf{R}$ tedy platí $\vec{p} = p\vec{n}$ a $\vec{q} = q\vec{n}$, takže

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot |\vec{p} + t\vec{q}| = \frac{1}{2}\cdot |(p+qt)\vec{n}| = \frac{1}{2}\cdot |p+qt| .$$

Nyní můžeme do nalezeného vztahu dosadit hodnoty obsahů pro $t_0 = 0$, $t = 5$ a pomocí toho pak určit obsah pro $t = 10$.

$$\begin{aligned} 2 = S(0) &= \frac{1}{2}\cdot |p + q\cdot 0| \quad \Rightarrow \quad |p| = 4 ,\\ 3 = S(5) &= \frac{1}{2}\cdot |p + q\cdot 5| \quad \Rightarrow \quad |p+5q| = 6 , \end{aligned}$$

Vypočtěme odtud hodnoty p, q a následně $S(10)$ pro různá znaménka výrazů v absolutních hodnotách

$$\begin{aligned} (p, p+5q) = (4,6) \quad &\Longrightarrow \quad (p,q) = \left(4, \frac{2}{5}\right) \quad \Longrightarrow \quad S(10) = \frac{1}{2}\cdot \left|4 + \frac{2}{5}\cdot 10\right| = 4 ,\\ (p, p+5q) = (4,-6) \quad &\Longrightarrow \quad (p,q) = (4,-2) \quad \Longrightarrow \quad S(10) = \frac{1}{2}\cdot \left|4 - 2\cdot 10\right| = 8 . \end{aligned}$$

Pro $(p, p+5q) = (-4,-6)$, resp. $(p, p+5q) = (-4,6)$ dostáváme už stejné výsledky, úloha má tedy dvě řešení: Obsah trojúhelníku ABC v čase $t = 10$ je 4 nebo 8 jednotek. □

Úloha 4.2.9: *Tři kosmické sondy letí stálými rychlostmi po třech přímých navzájem rovnoběžných drahách. Pozice sond v prostoru určují pohyblivé body A, B, C. V počátečním čase $t = 0$ má trojúhelník ABC obsah 2 jednotky, v čase $t = 1$ obsah 3 jednotky a v čase $t = 2$ obsah 4 jednotky. Dokažte, že dráhy všech tří sond leží v jedné rovině.* [14]

ŘEŠENÍ:
Stejně jako v předchozí Úloze 4.2.8 body A, B, C v čase $t = 0$ označme A_0, B_0, C_0 a rychlosti sond po řadě $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$. Protože sondy letí po rovnoběžných drahách, jsou tyto tři vektory rovnoběžné, mají tedy vyjádření $\vec{v}_a = \vec{u}$, $\vec{v}_b = b\vec{u}$ a $\vec{v}_c = c\vec{u}$, kde $\vec{u} \neq \vec{o}$ a b, $c \in \mathbf{R}$. Stejně jako v Úloze 4.2.8 pro obsah trojúhelníku ABC v čase t dostáváme

$$S(t) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}(t) \times \overrightarrow{AC}(t)\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0} + t\left((b-1)\cdot \vec{u} \times \overrightarrow{A_0C_0} + (c-1)\cdot \overrightarrow{A_0B_0} \times \vec{u}\right)\right| ,$$

[14]Vlastní úloha, inspirovaná úlohou 4.2.8 jako její prostorová varianta.

což při označení $\vec{p} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}$ a $\vec{q} = (b-1)\vec{u} \times \overrightarrow{A_0C_0} + (c-1)\overrightarrow{A_0B_0} \times \vec{u}$ znamená, že

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{p} + t\vec{q}| = \frac{1}{2}\sqrt{\langle \vec{p} + t\vec{q}, \vec{p} + t\vec{q} \rangle} = \frac{1}{2}\sqrt{t^2|\vec{q}\,|^2 + 2t\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + |\vec{p}\,|^2}\,.$$

Nyní můžeme do nalezeného vztahu dosadit zadané hodnoty obsahů pro $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ a ze tří obdržených rovností vypočítat hodnoty $|\vec{p}\,|$, $|\vec{q}\,|$, $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$.

$$2 = S(0) = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}\,|^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}\,| = 4\,,$$

$$3 = S(1) = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{q}\,|^2 + 2\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + |\vec{p}\,|^2}\,,$$

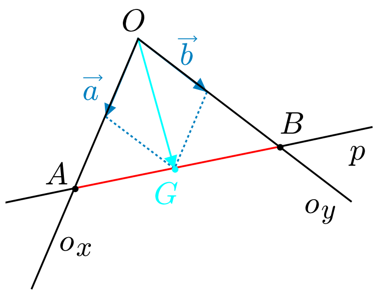
$$4 = S(2) = \frac{1}{2}\sqrt{4|\vec{q}\,|^2 + 4\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + |\vec{p}\,|^2}\,.$$

Umocněním druhé a třetí rovnosti a následným dosazením $|\vec{p}\,| = 4$ obdržíme následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $|\vec{q}\,|$ a $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$

$$\begin{aligned} 36 &= |\vec{q}\,|^2 + 2\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + 16 \quad &\text{neboli} \quad 20 &= |\vec{q}\,|^2 + 2\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle\,, \\ 64 &= 4|\vec{q}\,|^2 + 4\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle + 16 \quad &\text{neboli} \quad 12 &= |\vec{q}\,|^2 + \langle \vec{p}, \vec{q} \rangle\,, \end{aligned}$$

která má řešení $|\vec{q}\,|^2 = 4$ a $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 8$. Odtud dostáváme, že platí $|\vec{p}\,| = 4$, $|\vec{q}\,| = 2$ a $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = 8 = |\vec{p}\,| \cdot |\vec{q}\,|$. Vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$ tedy leží v přímce, která je podle definice vektoru $\vec{p} = \overrightarrow{A_0B_0} \times \overrightarrow{A_0C_0}$ kolmá k rovině $A_0B_0C_0$. Protože jsme vektor $\vec{q}$ (kolmý k rovině $A_0B_0C_0$) zavedli jako součet dvou vektorů kolmých k vektoru $\vec{u}$, platí rovněž $\vec{q} \perp \vec{u}$, takže vektor $\vec{u}$ leží v rovině $A_0B_0C_0$. To už znamená, že v této rovině leží i dráhy všech tří sond, jak jsme měli ukázat. □

Úloha 4.2.10: *Uvnitř úhlu s vrcholem O a rameny tvořenými polopřímkami o_x, o_y je dán bod G. Uvažujme všechny přímky procházející bodem G, které protínají polopřímky o_x, o_y v bodech A, B. Při jakém umístění této přímky bude obsah trojúhelníku OAB minimální?*[15]



Řešení:
Daný vektor $\overrightarrow{OG}$ (nezávislý na uvažovaných přímkách p) rozložme na součet dvou vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve směrech daných polopřímek o_x, resp. o_y, jak je patrné z obrázku:

$$\overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{b}\,.$$

[15]Klasická úloha s vlastním vektorovým řešením, inspirovaným řešením prostorové analogie z Úlohy 4.2.13.

K libovolné uvažované přímce p a jejím průsečíkům A, B popsaným v zadání existují reálná čísla $\alpha, \beta > 0$ taková, že $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$ a $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$. Zároveň bod G leží na úsečce AB, takže existují reálná čísla $\lambda, \mu > 0$ taková, že $\lambda + \mu = 1$ a

$$G = \lambda A + \mu B\,, \qquad \text{neboli} \qquad \overrightarrow{OG} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}\,.$$

Po dosazení za vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ dostaneme

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OG} = \lambda\alpha\vec{a} + \mu\beta\vec{b}\,.$$

Porovnáním koeficientů u lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$ dostáváme $\lambda\alpha = \mu\beta = 1$, což po dosazení do $\lambda + \mu = 1$ vede ke vztahu

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\,,$$

z něhož podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem hodnot $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ vyplývá

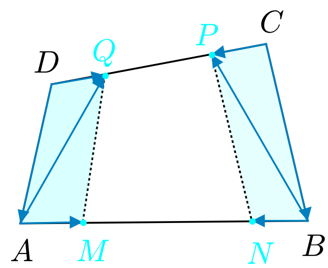
$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}} \le \frac{1}{2}\,, \qquad \text{neboli} \qquad \alpha\beta \ge 4\,,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = 2$. Pro obsah trojúhelníku OAB tak dostáváme odhad

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{\alpha\beta}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \ge \frac{4}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|\,,$$

přitom rovnost nastane, jak víme, v případě $\alpha = \beta = 2$, neboli $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. Minimální obsah tedy bude mít zkoumaný trojúhelník v situaci, kdy $G = \frac{1}{2}(A + B)$. Tehdy bude daný bod G středem úsečky AB. □

Úloha 4.2.11: *V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ zvolme body M, N na straně AB a body P, Q na straně CD tak, aby platilo $|AM| = |NB|$ a $|CP| = |QD|$. Dokažte, že pokud čtyřúhelníky $AMQD$ a $BCPN$ mají stejný obsah, pak strana AB je rovnoběžná se stranou CD.*[16]



Řešení:
Předpokládejme tedy, že se obsahy čtyřúhelníků $AMQD$ a $BCPN$ rovnají, a vyjádřeme jejich rovnost pomocí obsahů odpovídajících trojúhelníků:

$$S_{AQD} + S_{AMQ} = S_{BCP} + S_{BPN}\,.$$

[16] [gel–07], str. 204–205.

Když tyto obsahy vyjádříme vektorovými součiny příslušných vektorů, obdržíme[17]

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DQ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BN}),$$

neboli

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AM} \times (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}) = \overrightarrow{CP} \times \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) \times \overrightarrow{BN}.$$

Z rovností $|AM| = |NB|$, $|CP| = |QD|$ ze zadání plynou vektorové rovnosti

$$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM}, \qquad \overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{DQ},$$

po dosazení tedy dostáváme

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{DQ} = -\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM}.$$

Podle pravidel pro počítání s vektorovým součinem dále upravujeme:

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM},$$

$$(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{DQ} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}) \times \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM},$$

$$(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}) \times (\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM}.$$

Protože $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{o}$, platí $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. Po dosazení, následném roznásobení a s přihlédnutím k rovnostem $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DQ} = \vec{o}$ postupně dostaneme

$$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}) \times (\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM},$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{DQ} \times \overrightarrow{AM},$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{DQ} = (2\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DC}) \times \overrightarrow{AM},$$

$$(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) \times \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{MA} \times (\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{QC}),$$

$$(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) \times \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{MA} \times (\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{QC}) = \vec{o},$$

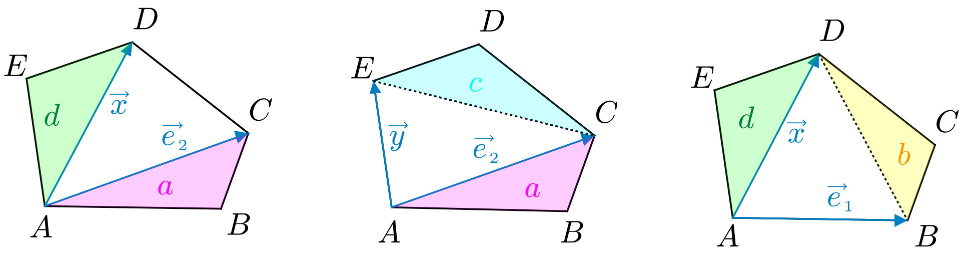
$$\overrightarrow{BM} \times \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{QC} = \vec{o}.$$

Protože vektory $\overrightarrow{BM}$ a $\overrightarrow{MA}$ jsou stejně jako vektory $\overrightarrow{DQ}$ a $\overrightarrow{QC}$ souhlasně rovnoběžné, jsou dva vektorové součiny v poslední rovnosti rovněž souhlasně rovnoběžné vektory, musí se tedy oba rovnat nulovému vektoru. Vektory $\overrightarrow{BM}$ a $\overrightarrow{DQ}$ jsou tudíž kolineární, a proto $AB \parallel CD$. □

[17] Pořadí činitelů v součinech volíme tak, aby všechny vektorové součiny (tj. vektory kolmé k rovině čtyřúhelníku) byly souhlasně rovnoběžné a bylo je tak možno sčítat jako (skalární) obsahy.

Úloha 4.2.12: *Písmenem s označíme obsah libovolného konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ a písmeny a, b, c, d, e po řadě obsahy trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEA, EAB. Dokažte tzv.* Möbiův vztah[18]

$$s^2 - s(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ae) = 0\,.$$



Řešení:

Jsou-li $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ dva lineárně nezávislé vektory roviny pětiúhelníku $ABCDE$, má každý její vektor $\vec{x}$ vyjádření $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Z implikací

$$\vec{e}_1 \times \vec{x} = x_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \quad\Longrightarrow\quad x_2 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{x}}{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}\,,$$

$$\vec{x} \times \vec{e}_2 = x_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \quad\Longrightarrow\quad x_1 = \frac{\vec{x} \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}$$

dostáváme pro vektor $\vec{x}$ rovnost

$$\vec{x} = \frac{\vec{x} \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}\vec{e}_1 + \frac{\vec{e}_1 \times \vec{x}}{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}\vec{e}_2\,. \tag{4.3}$$

Uvedené podíly vektorových součinů mají následující význam. Všechny vektorové součiny jsou součiny vektorů z roviny pětiúhelníku, výsledkem je tedy vždy vektor kolmý na rovinu pětiúhelníku. V bázi prostoru tvořené vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ a nějakým třetím vektorem $\vec{e}_3$ mají zkoumané vektorové součiny první dvě souřadnice nulové. Můžeme tedy čitatele i jmenovatele zlomků v (4.3) chápat jako reálná (tj. kladná i záporná) čísla, udávající třetí souřadnici příslušného vektorového součinu. Po vektorovém vynásobení rovnosti (4.3) libovolným vektorem $\vec{y}$ z roviny pětiúhelníku dostáváme po úpravě

$$(\vec{x} \times \vec{e}_2)\,(\vec{e}_1 \times \vec{y}) + (\vec{e}_1 \times \vec{x})\,(\vec{e}_2 \times \vec{y}) + (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)\,(\vec{x} \times \vec{y}) = 0\,. \tag{4.4}$$

Volíme-li $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{x} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AE}$, pak pro obsah pětiúhelníku $ABCDE$ máme trojí vyjádření (podle způsobu triangulace z obrázku)[19]

$$s = a + \frac{1}{2}(\vec{x} \times \vec{e}_2) + d = c + \frac{1}{2}(\vec{y} \times \vec{e}_2) + a = d + \frac{1}{2}(\vec{x} \times \vec{e}_1) + b\,,$$

[18] [pra–86], str. 104, úloha 5.37.

[19] Pořadí činitelů ve vektorových součinech, které opět považujeme za čísla, volíme tak, aby to byly vesměs kladné hodnoty (při vhodné volbě bázového vektoru $\vec{e}_3$).

odkud plynou rovnosti

$$\vec{x} \times \vec{e}_2 = 2(s-a-d)\,, \qquad \vec{y} \times \vec{e}_2 = 2(s-a-c)\,, \qquad \vec{x} \times \vec{e}_1 = 2(s-b-d)\,.$$

Poslední tři vztahy spolu se vztahem $e = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 \times \vec{y})$ dosadíme do výše odvozené rovnosti (4.4) a tu pak snadno upravíme do Möbiova vztahu, který jsme měli dokázat:

$$-2(s-a-d)\cdot 2e + 2(s-b-d)\cdot 2(s-a-c) - 2a \cdot 2d = 0\,,$$
$$s^2 - s(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0\,. \qquad \square$$

Vyjadřování objemů

Jak bylo uvedeno v Podkapitole 1.3, pro objem rovnoběžnostěnu určeného třemi nekomplanárními vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ platí vzorec (1.27)

$$V = |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\rangle|\,,$$

Odtud přímo plyne vyjádření (1.28) pro objem trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$

$$V = \frac{1}{2}|\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}\rangle|$$

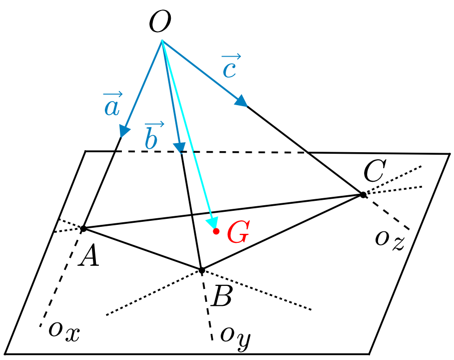
a vztah (1.29) pro objem čtyřstěnu $ABCD$

$$V = \frac{1}{6}|\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle|\,.$$

Dále budeme využívat v tomto paragrafu vztah mezi dvěma smíšenými součiny $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle$ a $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\rangle$ vyjádřený pravidlem (1.26)

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} &=& a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} \\ \vec{b} &=& b_1\vec{u} + b_2\vec{v} + b_3\vec{w} \\ \vec{c} &=& c_1\vec{u} + c_2\vec{v} + c_3\vec{w} \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}\rangle \cdot \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Úloha 4.2.13: *Uvnitř trojhranu s vrcholem O a rameny tvořenými polopřímkami o_x, o_y, o_z je dán bod G. Uvažujme všechny roviny procházející bodem G, které protínají polopřímky o_x, o_y, o_z v bodech A, B, C. Při jakém umístění této roviny bude objem čtyřstěnu $OABC$ minimální?*[20]



[20] [dju–06], str. 92, úloha 9, IMO 1973.

Řešení:
Daný vektor $\overrightarrow{OG}$ (nezávislý na uvažovaných rovinách ϱ) rozložme na součet tří vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ve směrech daných polopřímek o_x, o_y, o_z, jak je patrné z obrázku:

$$\overrightarrow{OG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

K libovolné uvažované rovině ϱ a jejím průsečíkům A, B, C popsaným v zadání existují reálná čísla $\alpha, \beta, \gamma > 0$ taková, že $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \gamma\vec{c}$. Zároveň bod G leží v trojúhelníku ABC, takže existují reálná čísla $\lambda, \mu, \nu > 0$ taková, že $\lambda + \mu + \nu = 1$ a

$$G = \lambda A + \mu B + \nu C\,, \qquad \text{neboli} \qquad \overrightarrow{OG} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}\,.$$

Po dosazení za vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ dostaneme

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OG} = \lambda\alpha\vec{a} + \mu\beta\vec{b} + \nu\gamma\vec{c}\,.$$

Porovnáním koeficientů u lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dostáváme $\lambda\alpha = \mu\beta = \nu\gamma = 1$, což po dosazení do $\lambda + \mu + \nu = 1$ vede ke vztahu

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1\,,$$

z něhož podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem hodnot $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$ vyplývá

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\gamma}} \le \frac{1}{3}\,, \qquad \text{neboli} \qquad \alpha\beta\gamma \ge 27\,,$$

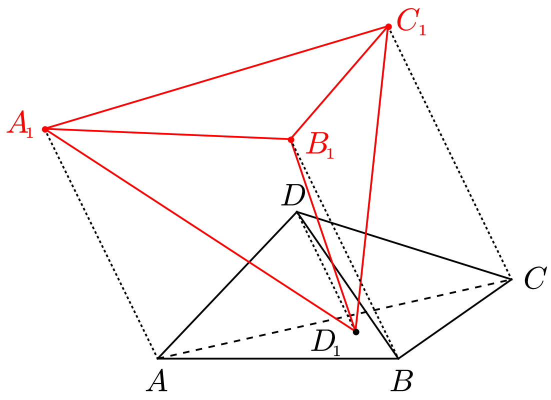
přičemž rovnost nastane právě tehdy, když $\alpha = \beta = \gamma = 3$. Pro objem čtyřstěnu $OABC$ tak dostáváme (užitím smíšeného součinu) odhad

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left|\langle\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\rangle\right| = \frac{\alpha\beta\gamma}{6} \cdot \left|\langle\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle\right| \ge \frac{27}{6} \cdot \left|\langle\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle\right|\,,$$

přitom rovnost nastane, jak víme, v případě $\alpha = \beta = \gamma = 3$, neboli $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{3}$. Minimální objem tedy bude mít čtyřstěn v situaci, kdy $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$. Tehdy bude daný bod G těžištěm stěny ABC vyťaté rovinou ϱ na daném trojhranu. $\square$

Úloha 4.2.14: *Je dán čtyřstěn $ABCD$. Nechť D_1 je libovolný bod uvnitř trojúhelníku ABC a nechť A_1, B_1, C_1 jsou průsečíky přímek rovnoběžných s DD_1 a procházejících vrcholy A, B, C vždy se stěnou čtyřstěnu protilehlou tomuto vrcholu. Dokažte, že objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven jedné třetině objemu čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$.*[21]

[21] [dju–06], str. 33, úloha 6 z MMO v Moskvě roku 1964.



Řešení:
Podle zadání bod D_1 leží uvnitř trojúhelníku ABC, existují tedy kladná čísla a, b, c pro která platí $a + b + c = 1$ a

$$\overrightarrow{DD_1} = a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC}\,.$$

Ze zadání víme, že $\overrightarrow{DD_1} \parallel \overrightarrow{AA_1}$, a tedy existuje reálné číslo k takové, že $\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{DD_1}$. Dosadíme-li do zřejmé rovnosti $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1}$ nejprve za $\overrightarrow{AA_1}$ a pak za $\overrightarrow{DD_1}$, dostaneme

$$\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{DA} + k\left(a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC}\right) = (ka+1)\overrightarrow{DA} + kb\overrightarrow{DB} + kc\overrightarrow{DC}\,.$$

Protože bod A_1 leží v rovině DBC a vektory $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ jsou lineárně nezávislé, musí být koeficient u vektoru $\overrightarrow{DA}$ v předchozím vyjádření nulový, tedy

$$ka + 1 = 0 \qquad \text{neboli} \qquad k = -\frac{1}{a}\,.$$

Odtud pro vektor $\overrightarrow{DA_1}$ a analogickým postupem pro vektory $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ dostáváme

$$\overrightarrow{DA_1} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{DB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{DC}\,, \qquad \overrightarrow{DB_1} = -\frac{a}{b}\overrightarrow{DA} - \frac{c}{b}\overrightarrow{DC}\,, \qquad \overrightarrow{DC_1} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{DA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{DB}\,.$$

Nyní najdeme vektory $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$:

$$\overrightarrow{D_1A_1} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DA_1} = -\left(a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC}\right) - \frac{b}{a}\overrightarrow{DB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{DC} =$$

$$= -a\overrightarrow{DA} - \frac{b}{a}(a+1)\overrightarrow{DB} - \frac{c}{a}(a+1)\overrightarrow{DC}\,,$$

analogicky pak

$$\overrightarrow{D_1B_1} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB_1} = -\left(a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC}\right) - \frac{a}{b}\overrightarrow{DA} - \frac{c}{b}\overrightarrow{DC} =$$

$$= -\frac{a}{b}(b+1)\overrightarrow{DA} - b\overrightarrow{DB} - \frac{c}{b}(b+1)\overrightarrow{DC}\,,$$

$$\overrightarrow{D_1C_1} = -\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC_1} = -\left(a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC}\right) - \frac{a}{c}\overrightarrow{DA} - \frac{b}{c}\overrightarrow{DB} =$$

$$= -\frac{a}{c}(c+1)\overrightarrow{DA} - \frac{b}{c}(c+1)\overrightarrow{DB} - c\overrightarrow{DC}\,.$$

Pro objem čtyřstěnu $ABCD$ užitím smíšeného součinu dostáváme rovnost

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right\rangle\right|$$

a pro objem čtyřstěnu $A_1B_1C_1D_1$

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{6}\left|\left\langle \overrightarrow{D_1A_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C_1}\right\rangle\right|.$$

Využijeme-li odvozená vyjádření vektorů $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1B_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ a vzpomeneme-li na pravidlo (1.26) dostáváme vyjádření

$$\left|\left\langle \overrightarrow{D_1A_1} \times \overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C_1}\right\rangle\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right\rangle\right| \cdot \left|\det \begin{pmatrix} a & \frac{b}{a}(a+1) & \frac{c}{a}(a+1) \\ \frac{a}{b}(b+1) & b & \frac{c}{b}(b+1) \\ \frac{a}{c}(c+1) & \frac{b}{c}(c+1) & c \end{pmatrix}\right|.$$

Ukážeme-li, že poslední determinant má hodnotu $D = 3$, bude úloha s ohledem na vypsaná vyjádření objemů V_{ABCD} a $V_{A_1B_1C_1D_1}$ vyřešena. Počítejme

$$D = \det \begin{pmatrix} a & \frac{b}{a}(a+1) & \frac{c}{a}(a+1) \\ \frac{a}{b}(b+1) & b & \frac{c}{b}(b+1) \\ \frac{a}{c}(c+1) & \frac{b}{c}(c+1) & c \end{pmatrix} = \frac{1}{abc} \cdot \det \begin{pmatrix} a^2 & b(a+1) & c(a+1) \\ a(b+1) & b^2 & c(b+1) \\ a(c+1) & b(c+1) & c^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{abc} \cdot \left(a^2b^2c^2 + abc(a+1)(b+1)(c+1) + abc(a+1)(b+1)(c+1)\right) -$$

$$-\frac{1}{abc} \cdot \left(a^2bc(b+1)(c+1) + ab^2c(a+1)(c+1) + abc^2(a+1)(b+1)\right) =$$

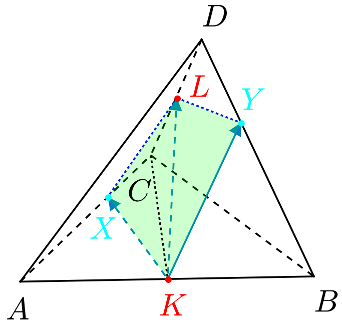
$$= (abc + 2(a+1)(b+1)(c+1)) - (a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) + c(a+1)(b+1)) =$$

$$= (abc + 2abc + 2ab + 2ac + 2bc + 2a + 2b + 2c + 2)-$$

$$-((abc + ab + ac + a) + (abc + ab + bc + b) + (abc + ac + bc + c)) = a + b + c + 2\,,$$

takže díky rovnosti $a + b + c = 1$ je potřebná rovnost $D = 3$ dokázána. □

Úloha 4.2.15: *Nechť K, L jsou po řadě středy hran AB, CD daného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že každá rovina obsahující přímku KL rozděluje čtyřstěn $ABCD$ na dvě části stejného objemu.*[22]



Řešení:

Nechť α je libovolná rovina obsahující přímku KL a nechť tato rovina protne hrany AC, BD po řadě v bodech X, Y. (Analogicky se posoudí případ, kdy rovina α protne hrany AD a BC.) Pak existují reálná čísla $\lambda, \mu \in \langle 0, 1 \rangle$ taková, že $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BY} = \mu \overrightarrow{BD}$. Pro vektory $\overrightarrow{KX}$, $\overrightarrow{KY}$, $\overrightarrow{KL}$ platí

$$\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \quad \overrightarrow{KY} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BY} = \mu \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,,$$

$$\overrightarrow{KL} = L - K = \frac{1}{2}(C + D) - \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\,,$$

přičemž tyto vektory leží všechny tři v rovině α. Proto existují reálná čísla a, b, c (z nichž alespoň jedno je nenulové) tak, že

$$a\overrightarrow{KX} + b\overrightarrow{KY} + c\overrightarrow{KL} = \vec{o}\,.$$

Po dosazení za vektory $\overrightarrow{KX}$, $\overrightarrow{KY}$, $\overrightarrow{KL}$ do předchozí rovnosti dostaneme

$$\frac{b-a}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\lambda a + \frac{c}{2}\right)\overrightarrow{AC} + \left(\mu b + \frac{c}{2}\right)\overrightarrow{BD} = \vec{o}\,.$$

Protože vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ jsou lineárně nezávislé, musí být koeficienty u těchto vektorů v předchozím vyjádření nulové, a tedy podle koeficientu u $\overrightarrow{AB}$ platí $a = b$; protože však nemůže být $a = b = 0$ (pak by totiž platilo i $c = 0$), ze srovnání koeficientů u $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BD}$ plyne $\lambda = \mu$. Máme dokázat, že rovina α dělí celý čtyřstěn na dvě části stejného objemu, že tedy v našem případě objem mnohostěnu $KXLYBC$ je roven polovině objemu V čtyřstěnu $ABCD$. Objem $KXLYBC$ je zřejmě roven součtu objemu čtyřstěnu $KXLC$ a jehlanu $KLCBY$ s podstavou $LCBY$, přičemž objem jehlanu $KLCBY$ je roven rozdílu objemů čtyřstěnů $KBDC$ a $KYDL$:

$$V_{KXLYBC} = V_{KXLC} + V_{KLCBY} = V_{KXLC} + V_{KBCD} - V_{KYDL}\,. \tag{4.5}$$

[22] [dju–06], str. 226, úloha navržena Československem na MMO v Austrálii roku 1988.

K určení objemů jednotlivých čtyřstěnů užijeme smíšený součin:

$$V = \frac{1}{6}\Big|\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle\Big|, \qquad V_{KXLC} = \frac{1}{6}\Big|\langle \overrightarrow{KX} \times \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KL}\rangle\Big|,$$

$$V_{KBCD} = \frac{1}{6}\Big|\langle \overrightarrow{KB} \times \overrightarrow{KC}, \overrightarrow{KD}\rangle\Big|, \qquad V_{KYDL} = \frac{1}{6}\Big|\langle \overrightarrow{KY} \times \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KL}\rangle\Big|.$$

Potřebné vektory zapíšeme jako lineární kombinace vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ a zkoumané objemy vyjádříme v závislosti na objemu celého čtyřstěnu V. Z obrázku vidíme, že

$$\overrightarrow{KB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,, \qquad \overrightarrow{KC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{KD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\,.$$

Nyní využijeme již dříve odvozené vektorové rovnosti a rovnost $\lambda = \mu$:

$$\overrightarrow{KX} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}\,, \qquad \overrightarrow{KY} = \mu\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}\,,$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,.$$

Pro hledané objemy tak užitím pravidla (1.26) dostaneme

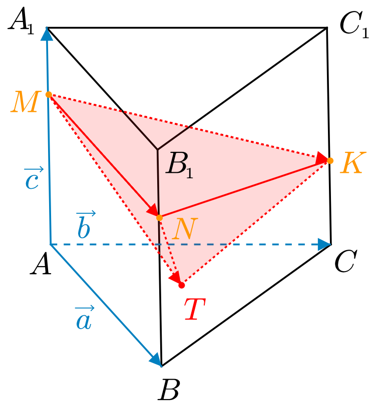
$$V_{KXLC} = V \cdot \left|\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = V \cdot \Big|\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda)\Big| = \frac{1}{4}(1-\lambda)V\,,$$

$$V_{KBCD} = V \cdot \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}V\,,$$

$$V_{KYDL} = V \cdot \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \lambda \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = V \cdot \Big|-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\lambda)\Big| = \frac{1}{4}(1-\lambda)V\,.$$

(Využili jsme toho, že $\lambda \leq 1$.) Díky zjištěné rovnosti $V_{KXLC} = V_{KYDL}$ tak z (4.5) již dostáváme dokazovanou rovnost $V_{KXLYBC} = \frac{1}{2}V$. $\square$

Úloha 4.2.16: *Na bočních hranách AA_1, BB_1, CC_1 trojbokého hranolu $ABCA_1B_1C_1$ jsou vybrány po řadě body M, N, K tak, že součet délek úseček AM, BN, CK je roven délce boční hrany tohoto hranolu. Najděte poměr objemů daného hranolu a čtyřstěnu $MNKT$, kde T je těžiště podstavy ABC.*[23]



Řešení:
Označíme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Pro body M, N, K existují reálná čísla $\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{c}$, $\overrightarrow{BN} = \beta\vec{c}$, $\overrightarrow{CK} = \gamma\vec{c}$. Podle zadání je

$$|\vec{c}| = |\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{BN}| + |\overrightarrow{CK}|\,, \qquad \text{neboli} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1\,.$$

K vyjádření objemu V hranolu $ABCA_1B_1C_1$ a objemu V_1 čtyřstěnu $MNKT$ užijeme smíšený součin:

$$V = \frac{1}{2}\left|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle\right|\,, \qquad V_1 = \frac{1}{6}\left|\langle \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MT}\rangle\right|\,.$$

Nyní vyjádřeme vektory $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MT}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, přitom využijeme rovnosti $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$:

$$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\alpha\vec{c} + \vec{a} + \beta\vec{c} = \vec{a} + (\beta - \alpha)\vec{c}\,,$$

$$\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = -\alpha\vec{c} + \vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{b} + (\gamma - \alpha)\vec{c}\,,$$

$$\overrightarrow{MT} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \alpha\vec{c}\,.$$

Pro objem V_1 tak užitím pravidla (1.26) dostáváme

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta - \alpha \\ 0 & 1 & \gamma - \alpha \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\alpha \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle\right| = \frac{1}{3}V \cdot \left|-\alpha - \frac{1}{3}(\beta - \alpha) - \frac{1}{3}(\gamma - \alpha)\right| =$$

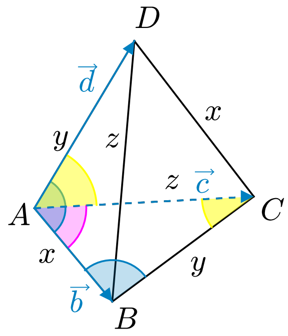
$$= \frac{1}{9}V \cdot |-\alpha - \beta - \gamma| = \frac{1}{9}V\,,$$

přičemž v posledním kroku jsme využili výše odvozenou rovnost $\alpha + \beta + \gamma = 1$. □

[23] [jur–96], str. 97–98, úloha 11.3.

Na závěr Kapitoly 4 uveďme dvě náročnější prostorové úlohy, které nelze zařadit do žádného z předchozích paragrafů, neboť v nich zajímavým způsobem využíváme vektorový, resp. skalární součin dvou vektorů k vyjádření sinu, resp. kosinu jejich odchylky.

Úloha 4.2.17: *V daném čtyřstěnu mají každé dvě mimoběžné hrany stejnou délku. Ukažte, že všechny stěny takového čtyřstěnu jsou ostroúhlé trojúhelníky.*[24]



Řešení:
Stěny daného čtyřstěnu jsou zřejmě čtyři navzájem shodné trojúhelníky a tři stěnové úhly u každého jeho vrcholu jsou trojicí vnitřních úhlů trojúhelníku tvořícího každou stěnu. Součet stěnových úhlů u každého vrcholu je tedy π. Nejprve dokažme pomocné Lemma.

Lemma: V libovolném čtyřstěnu platí: Součet každých dvou stěnových úhlů u kteréhokoliv vrcholu je větší než třetí stěnový úhel u téhož vrcholu.

Důkaz:
Bez újmy na obecnosti můžeme tvrzení Lemmatu pro obecný čtyřstěn $ABCD$ vyjádřit jedinou nerovností

$$|\sphericalangle DAC| < |\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAC|\,.$$

Ta je splněna triviálně, je-li součet na pravé straně větší než π. V opačném případě využijeme toho, že funkce kosinus je klesající na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, a proto je předchozí nerovnost mezi dvěma hodnotami z tohoto intervalu ekvivalentní s nerovností

$$\cos|\sphericalangle DAC| > \cos\left(|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BAC|\right)\,,$$

kterou lze zapsat díky vzorci pro kosinus součtu takto:

$$\cos|\sphericalangle DAC| > \cos|\sphericalangle DAB|\cos|\sphericalangle BAC| - \sin|\sphericalangle DAB|\sin|\sphericalangle BAC|\,. \tag{4.6}$$

Uvažujme nekomplanární vektory $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Užitím skalárního a vektorového součinu můžeme nerovnost (4.6) přepsat do tvaru

$$\frac{\langle\vec{c},\vec{d}\rangle}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|} > \frac{\langle\vec{b},\vec{d}\rangle}{|\vec{b}|\cdot|\vec{d}|}\cdot\frac{\langle\vec{b},\vec{c}\rangle}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|} - \frac{|\vec{b}\times\vec{d}|}{|\vec{b}|\cdot|\vec{d}|}\cdot\frac{|\vec{b}\times\vec{c}|}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}\,,$$

[24] [mur–88], str. 56–57, úloha 2, S.G./2.(1972/2).

který po vynásobení kladnou hodnotou $|\vec{b}|^2 \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{d}|$ přejde v ekvivalentní nerovnost

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \cdot \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle > \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \left|\vec{b} \times \vec{d}\right| \cdot \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| .$$

Stačí tedy dokázat poslední nerovnost mezi třemi součiny dvojic reálných čísel, kterou algebraicky přepíšeme do podoby

$$\langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \cdot \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle < \left|\vec{b} \times \vec{d}\right| \cdot \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| . \tag{4.7}$$

Podle výsledku Příkladu 4.1.4 můžeme zapsat levou stranu nerovnosti (4.7) následujícím způsobem

$$\langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \cdot \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle = \left\langle \vec{b} \times \vec{d}, \vec{c} \times \vec{b} \right\rangle .$$

K důkazu (4.7) tedy stačí zdůvodnit nerovnost

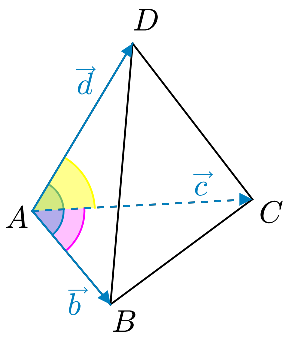
$$\left\langle \vec{b} \times \vec{d}, \vec{c} \times \vec{b} \right\rangle < \left|\vec{b} \times \vec{d}\right| \cdot \left|\vec{c} \times \vec{b}\right| ,$$

neboli vysvětlit, proč nenulové vektory $\vec{b} \times \vec{d}$ a $\vec{c} \times \vec{b}$ nejsou souhlasně rovnoběžné. To je snadné: Kdyby to byly dva směrové vektory téže přímky, v rovině kolmé k této přímce by ležely všechny tři nekomplanární vektory $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, což je spor. Důkaz Lemmatu je tak ukončen. $\diamond$

Tvrzení úlohy nyní okamžitě plyne z právě dokázaného Lemmatu. $\square$

Poznámka:
Lemma z předchozího řešení je známým výsledkem z *geometrie trojhranu*, uvedeným mezi ukázkami na str. 125–133 publikace [vyš–66], v níž je také vysvětleno, že tato geometrie je vlastně *geometrií sférického trojúhelníku.* Nebudeme se těmito geometriemi zde zabývat a i jejich další výsledek (v naší práci poslední) vyjádříme pomocí stěnových úhlů obecného čtyřstěnu.

Úloha 4.2.18: *Dokažte, že součet všech tří stěnových úhlů u kteréhokoliv vrcholu každého čtyřstěnu je menší než* 2π.[25]



[25] [vyš–66], str. 132, věta 8,6.

Řešení:
Důkaz provedeme sporem. Připustíme existenci čtyřstěnu $ABCD$, ve kterém pro stěnové úhly u vrcholu A, jejichž velikosti označíme

$$\alpha = |\sphericalangle BAC|\,, \qquad \beta = |\sphericalangle CAD|\,, \qquad \gamma = |\sphericalangle DAB|\,,$$

platí $\alpha + \beta + \gamma \geq 2\pi$. To vzhledem k $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ zřejmě znamená, že

$$\pi < 2\pi - \gamma \leq \alpha + \beta < 2\pi\,.$$

Protože funkce kosinus je na intervalu $(\pi, 2\pi)$ rostoucí, dostáváme nerovnost

$$\cos(2\pi - \gamma) \leq \cos(\alpha + \beta) \qquad \text{neboli} \qquad \cos\gamma \leq \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.$$

To lze pomocí skalárních a vektorových součinů vektorů $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ zapsat ve tvaru

$$\frac{\langle \vec{d}, \vec{b}\rangle}{|\vec{d}| \cdot |\vec{b}|} \leq \frac{\langle \vec{b}, \vec{c}\rangle}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \cdot \frac{\langle \vec{d}, \vec{c}\rangle}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} - \frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \cdot \frac{|\vec{d} \times \vec{c}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}\,.$$

Upravenou nerovnost

$$|\vec{d} \times \vec{c}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \leq \langle \vec{d}, \vec{c}\rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle - \langle \vec{d}, \vec{b}\rangle \cdot \langle \vec{c}, \vec{c}\rangle$$

můžeme díky výsledku Příkladu 4.1.4 přepsat do tvaru

$$|\vec{d} \times \vec{c}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| \leq \langle \vec{d} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{b}\rangle\,,$$

což je Cauchyova-Schwarzova nerovnost s obráceným znakem nerovnosti, takže v ní musí nastat rovnost. Vektory $\vec{d} \times \vec{c}$ a $\vec{c} \times \vec{b}$ proto musí ležet v jedné přímce, a tedy vektory $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v rovině k ní kolmé, a to je spor, neboť jde o vektory tří nekomplanárních hran DA, DB, DC. $\square$

Závěr

Během přípravy disertační práce, která vyžadovala zpracování velkého množství úloh získaných z různých tuzemských i zahraničních zdrojů – sbírek, učebnic a ročenek matematických olympiád – jsem si rozšířila vědomosti v oblasti vektorové algebry získané studiem na vysoké škole a naučila jsem se vektorovou metodu účinně využívat při řešení mnoha geometrických problémů.

Pod vlivem zmíněné práce s literaturou i četných diskuzí o geometrii a její výuce se svým školitelem jsem dospěla k pohledu na problematiku vektorů, který jsem vyložila v první, teoreticky pojaté kapitole práce. Tento výklad, který lze považovat za jistý „spojovací most" mezi koncepcemi vektorového učiva na střední škole a ve vysokoškolských kurzech, může být hodnocen jako první přínos této práce.

V dalších kapitolách práce jsem se snažila ukázat, že mnoho základních a známých geometrických poznatků lze snadno dokázat pomocí vektorové metody. V zadání naprosté většiny uvedených geometrických příkladů a úloh přitom není o vektorech ani zmínka, v jejich řešeních pak téměř nikdy nepočítáme v souřadnicích. Právě tento aspekt činí z aparátu vektorové algebry efektivní metodický prostředek geometrického výzkumu, který tak i v očích učitelů a jejich žáků může ztratit punc pouhé konstrukce pro účely analytické geometrie, jenž svůj skutečný význam prokazuje spíše až při aplikacích vně samotné matematiky, především ve fyzice.

U řady převzatých příkladů a úloh bylo nutné upřesnit zadání a doplnit či zcela přepracovat zdrojová řešení. Takto sestavený kompilační text jsem doplnila na některých místech původními příklady a úlohami, nebo původními vektorovými důkazy klasických výsledků. Na tyto přínosné prvky předložené práce upozorňuji v poznámkách pod čarou k jednotlivým námětům. Jsem si vědoma, že jsem nemohla projít veškeré zdroje k zadanému tématu.

Věřím, že čtenáři práce, ať už současní učitelé matematiky nebo jejich budoucí kolegové, kteří se na své povolání teprve připravují, ocení jak specifický výklad teorie, tak četné ukázky jejího využití, a že práce s textem jim přinese hlubší porozumění vektorové metodě. Doufám, že z námětů tohoto díla budou někteří i čerpat inspiraci při obsahové přípravě vlastního vyučování geometrie.

Literatura

Učebnice a knihy

[and–06] Andrescu, T.; Andrica, D. *Complex Numbers from A to... Z;* Birkhauser: Boston, 2006.

[beč–02] Bečvář, J. *Lineární algebra;* Matfyzpress: Praha, 2002, 2. vyd.

[bom–96] Bombardelli, M. et al. *Matematička Natjecanja: učebnica strednjih škola;* Hrvatsko matematičko društvo, Element: Zagreb, 1996.

[bud–71] Budinský, B.; Šmakal, S. *Vektory v geometrii;* Mladá fronta: Praha, 1971.

[eng–97] Engel, E. *Problem Solving Strategies;* Springer Verlag: New York, 1997.

[gar–05] Gardiner, A. D.; Bradley, C. J. *Plane Euclidean Geometry: Theory and Problems;* UKMT: United Kingdom, 2005.

[gel–07] Gelca, R.; Andreescu, T. *Putnam and Beyond;* Springer Science + Business Media: LLC New York, 2007.

[hon–01] Honsberger, R. *Mathematical Chestnuts from Around the World;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 2001.

[hor–93] Horák, P. *Algebra a teoretická aritmetika;* Masarykova univerzita: Brno, 1993, 2. vyd.

[hor–97] Horák, P.; Janyška, J. *Analytická geometrie;* Masarykova univerzita: Brno, 1997.

[jur–96] Jurjevič, K. A.; Alexandrovič, T. D. *Stereometrija 10;* MFTI: Moskva, 1996.

[koč–09] Kočandrle, M.; Boček, L. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie;* Prometheus: Praha, 2009, 3. vyd.

[kuř–89] Kuřina, F. *Umění vidět v matematice;* SPN: Praha, 1989.

[lar–90] Larson, L. C. *Metódy riešenia matematických problémov;* Alfa: Bratislava, 1990.

[pon–04] Ponarin, Ja. P. *Elementarnaja geometrija;* díl 1, MCNP: Moskva, 2004.

[pra–86] Prasolov, V. V. *Plane geometry;* díl 1, Nauka: Moscow, 1986.

[pra–86] Prasolov, V. V. *Plane geometry;* díl 2, Nauka: Moscow, 1986.

[pra–86] Prasolov, V. V. *Stereometrija;* Nauka: Moscow, 1989.

[sav–03] Savchev, S.; Andreescu, T. *Mathematical Miniatures;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 2003.

[sek–86] Sekanina, M. et al. *Geometrie I;* SPN: Praha, 1986, 2. vyd.

[vyš–66] Vyšín, J. *Základy vektorové algebry;* SPN: Praha, 1966.

Sbírky úloh

[and–03] Andreescu, T.; Andrica, D. *360 Problems for Mathematical Contests;* GIL Publishing House: Zalau, 2003.

[and–05] Andronache, M. et al. *Romanian Mathematical Competitions 2005;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucharest, 2005.

[bal–97] Baluna, M.; Becheanu, M. *Romanian Mathematical Competitions 1997;* Bren Product SRL: Bucaresti, 1997.

[bar–95] Barbeau, E.J. et al. *Five Hundred Mathematical Challenges;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 1995.

[bech–95] Becheanu, M.; Enescu, B. *Romanian Mathematical Competitions 1995;* GIL Publishing House: Zalau, 1995.

[bech–96] Becheanu, M. et al. *Romanian Mathematical Competitions 1996;* GIL Publishing House: Zalau, 1996.

[bech–02] Becheanu, M. et al. *Romanian Mathematical Competitions 2002;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucaresti, 2002.

[bech–03] Becheanu, M. et al. *Romanian Mathematical Competitions 2003;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucaresti, 2003.

[bech–04] Becheanu, M.; Gologan, R. *Romanian Mathematical Competitions 2004;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucaresti, 2004.

[bech–07] Becheanu, M.; Enescu, B. *Balkan Mathematical Olympiads 1984–2006;* GIL Publishing House: Zalau, 2007.

[dju–06] Djukic, D. et al. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004;* Springer: New York, 2006.

[gar–97] Gardiner, A. *The Mathematical Olympiad Handbook;* Oxford University Press: Oxford, 1997.

[gol–07] Gologan, R. *Romanian Mathematical Competitions 2007;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucharest, 2007.

[gol–08] Gologan, R.; Schwarz, D. *Romanian Mathematical Competitions 2008;* Romanian Mathematical Society, Theta Foundation: Bucharest, 2008.

[grb–03] Grbac, N.; Hanjš, Ž. *Mathematical Competitions in Croatia;* Element: Zagreb, 2003.

[gro–02] Grozdev, S.; Kolev, E.; Mushkarov, O.; Nikolov N. *Bulgarian Mathematical Competitions 1997–2002;* Union of Bulgarian Mathematicians: Sofia, 2002.

[hor–06] Horák, K. et al. *54. ročník MO na středních školách;* JČMF: Praha, 2006.

[hor–10] Horák, K. et al. *57. ročník MO na středních školách;* JČMF: Praha, 2010.

[kla–88] Klamkin, M. S. *U.S.A. Mathematical Olympiads, 1972–1986;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 1988.

[kuc–03] Kuczma, M. E. *International Mathematical Olympiads 1986–1999;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 2003.

[mur–88] Murray, S. K. *USA Mathematical Olympiads 1972–1986;* The Mathematical Association of America: Washington DC, 1988.

[neg–05] Negut, A. *Problems For the Mathematical Olympiads: From the First Team Selection Test to the IMO;* GIL Publishing House: Zalau, 2005.

[tho–07] Thoai, P. D. *The Vietnamese Mathematical Olympiad (1990–2006): Selected Problems;* Education Publishing House: Hanoi, 2007.

Články a příspěvky ve sbornících

[kin–02] Kin, Y. Li. *Vector Geometry.* Mathematical Excalibur, roč. 6; 2002, č. 5; s. 1–2,4.

[kin–04] Kin, Y. Li. *Geometry via Complex Numbers.* Mathematical Excalibur, roč. 9; 2004, č. 1; s. 1–2,4.

[kol–68] Koliha, J. *Polohové vektory.* Matematika ve škole, roč. 18; 1968, č. 5; s. 291–298.

[lei–06] Leischner, P. *Ptolemaiova nerovnost.* Matematika – Fyzika – Informatika, roč. 15; 2006, č. 7; s. 385–392.

[šim–97] Šimša, J. *Archimédova statika v geometrii.* Rozhledy matematicko – fyzikální, roč. 74, 1997; s. 14–24.

[švr–01] Švrček, J. *Čtverce a trojúhelníky připsané stranám trojúhelníku (II.část).* In *Makos 2001: Sborník příspěvků z mezinárodního workshopu Sloup v Čechách 10.–13. 10. 2001;* Univerzita J. E. Purkyně: Ústí nad Labem, 2001; s. 48–51.

Internetové a jiné texty

[ked–99] Kedlaya, K. *Notes on Euclidean Geometry;* internetový text z 3. 8. 1999 na bázi poznámek pro USA Math Olymp Program (MOP).
http://www-math.mit.edu/ kedlaya/geometryunbound/geom-080399.pdf

[kaz–06] *International Zhautykov Olympiad;* Alma-Ata, 2006.
http://izho.kz/eng/

[cze–11] *60. ročník matematické olympiády;*
http://www.math.muni.cz/mo

[cze–04] *10. přípravné střetnutí MO (CZE-POL-SVK);* soutěžní text, Bílovec, 2004.

[ira–00] *18th Iranian Mathematical Olympiad 2000-2001;* leták soutěže.