K VÝUCE MOCNIN A LOGARITMŮ

Jaromír Šimša

Velké Meziříčí, 24. 8. 2010

Co nás čeká aneb
Poněkud provokativní podání plánu přednášky

I Mocniny a logaritmy ve středoškolském pojetí (či spíše zajetí?)

II Jistě umíte násobit podle tabulek logaritmů. A podle tabulek kosinů?

III První logaritmy aneb V hlavní roli dvě čísla, která se téměř rovnají 1.

IV Proč jsou některé logaritmy *přirozené* aneb Odhalení mysteriózního čísla e.

V Neučíme funkce příliš staticky – bez důrazu na to, jak u nich fungují (*funkcují*) změny proměnných?

VI *E-výpočty* mocnin a logaritmů – co o nich víme?

VII Komplexní nadhled – stojí za to?

VIII Úlohy pro bystré hlavy žáků i potěšení učitelů

I. Etapy budování mocnin a logaritmů ve škole

(1) $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, obecně $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}}$,

$a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}}}$

(2) $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a, \quad b = \sqrt[3]{a} \Leftrightarrow b^3 = a,$
obecně $\quad b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$

(3) $b = a^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a^m}$

(4) např. číslo $a^{\sqrt{2}}$ nelze algebraicky interpretovat,
$a^r = \lim\limits_{\frac{m}{n} \to r} a^{\frac{m}{n}}$

(5) $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$

Výchozí vztah $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}} \quad (a \in \mathbb{R})$,

formálněji $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ $(n \in \mathbb{N})$.

Základní pravidlo: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$

Výchozí vztah $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}} \quad (a \in \mathbb{R})\,,$

formálněji $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ $(n \in \mathbb{N})$.

Základní pravidlo: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$

Má-li platit i pro $n = 0$: $a^m = a^{m+0} = a^m \cdot a^0$,

definujeme $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. A co 0^0?

Výchozí vztah $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}} \quad (a \in \mathbb{R})$,

formálněji $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ $(n \in \mathbb{N})$.

Základní pravidlo: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$

Má-li platit i pro $n = 0$: $a^m = a^{m+0} = a^m \cdot a^0$,

definujeme $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. A co 0^0?

Jak definovat a^{-n} pro $n \in \mathbb{N}$? (A proč vůbec – za chvíli.)

$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$

Výchozí vztah $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ krát}} \quad (a \in \mathbb{R})$,

formálněji $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ $(n \in \mathbb{N})$.

Základní pravidlo: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$

Má-li platit i pro $n = 0$: $a^m = a^{m+0} = a^m \cdot a^0$,

definujeme $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. A co 0^0?

Jak definovat a^{-n} pro $n \in \mathbb{N}$? (A proč vůbec – za chvíli.)

$$1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0)$$

Škály mocnin $\{a^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ (se základy $a \neq 0$) podřízené pravidlům

$$\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \ (ab)^m = a^m \cdot b^m \ (m, n \in \mathbb{Z})}$$

Libovolně malé i velké kladné hodnoty a^m pro dané $a > 1$.

Praktická motivace pro $\sqrt{}$ a $\sqrt[3]{}$ – geometrické výpočty

$\longrightarrow$ Odmocnění jako *inverzní operace* k umocnění:

$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

Praktická motivace pro $\sqrt{}$ a $\sqrt[3]{}$ – geometrické výpočty

$\longrightarrow$ Odmocnění jako *inverzní operace* k umocnění:

$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

Existence: $a \geq 0$, je-li n sudé (a je-li liché?)

Jednoznačnost: $b \geq 0$ (*aritmetická hodnota* odm.), je-li n sudé.

Praktická motivace pro $\sqrt{}$ a $\sqrt[3]{}$ – geometrické výpočty

$\longrightarrow$ Odmocnění jako *inverzní operace* k umocnění:

$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

Existence: $a \geq 0$, je-li n sudé (a je-li liché?)

Jednoznačnost: $b \geq 0$ (*aritmetická hodnota* odm.), je-li n sudé.

Jak zařadit odmocniny mezi mocniny, aniž bychom narušili jejich „bazální“ škálovou vlastnost? (A proč vůbec – za chvíli.)

$$\sqrt{a} = a^x \Rightarrow a = a^x \cdot a^x = a^{x+x} = a^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Praktická motivace pro $\sqrt{}$ a $\sqrt[3]{}$ – geometrické výpočty

$\longrightarrow$ Odmocnění jako *inverzní operace* k umocnění:

$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

Existence: $a \geq 0$, je-li n sudé (a je-li liché?)

Jednoznačnost: $b \geq 0$ (*aritmetická hodnota* odm.), je-li n sudé.

Jak zařadit odmocniny mezi mocniny, aniž bychom narušili jejich „bazální“ škálovou vlastnost? (A proč vůbec – za chvíli.)

$$\sqrt{a} = a^x \Rightarrow a = a^x \cdot a^x = a^{x+x} = a^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Obecně tak máme motivaci: $a^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a}$

Podobně lze „ospravedlnit“: $a^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$

Je korektní $a^r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ pro racionální $r = \dfrac{m}{n}$?

Je korektní $a^r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ pro racionální $r = \dfrac{m}{n}$?

Ano, pokud $\quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}.$

Je korektní $a^r \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ pro racionální $r = \dfrac{m}{n}$?

Ano, pokud $\quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

To platí, pokud $a > 0$ (záporná a ani neuvažujeme).

Je korektní $a^r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ pro racionální $r = \dfrac{m}{n}$?

Ano, pokud $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

To platí, pokud $a > 0$ (záporná a ani neuvažujeme).

Odbočka:

$\sqrt[3]{-1} = -1$ ano, $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ ne, neboť $(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$.

(Když místo $\sqrt[n]{a^m}$ vezmeme $(\sqrt[n]{a})^m$, $\left(\sqrt[6]{-1}\right)^2$ neexistuje.)

Je korektní $a^r \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ pro racionální $r = \dfrac{m}{n}$?

Ano, pokud $\quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

To platí, pokud $a > 0$ (záporná a ani neuvažujeme).

Odbočka:

$\sqrt[3]{-1} = -1$ ano, $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$ ne, neboť $(-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = 1$.

(Když místo $\sqrt[n]{a^m}$ vezmeme $(\sqrt[n]{a})^m$, $\left(\sqrt[6]{-1}\right)^2$ neexistuje.)

Škály mocnin $\left\{a^r\right\}_{r\in\mathbb{Q}}$ (se základy $a > 0$) podřízené pravidlům

$$\boxed{a^{r+s} = a^r \cdot a^s,\ (ab)^r = a^r \cdot b^r,\ (a^r)^s = a^{r\cdot s}\ (r, s \in \mathbb{Q})}$$

Hodnoty a^r pro dané $a > 0$, $a \neq 1$, zaplní interval $(0, \infty)$ všude hustě a monotónně v závislosti na proměnné $r \in \mathbb{Q}$.

Hodnoty a^r pro dané $a > 0$, $a \neq 1$, zaplní interval $(0, \infty)$ všude hustě, *ne však úplně.*

Kladná čísla, která ve škále $\{a^r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ chybějí, prohlásíme za mocniny a^r s iracionálními r:

$$a^r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\frac{m}{n} \to r} a^{\frac{m}{n}}$$

Hodnoty a^r pro dané $a > 0$, $a \neq 1$, zaplní interval $(0, \infty)$ všude hustě, *ne však úplně.*

Kladná čísla, která ve škále $\{a^r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ chybějí, prohlásíme za mocniny a^r s iracionálními r:

$$a^r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\frac{m}{n} \to r} a^{\frac{m}{n}}$$

Jsme téměř u konce: pro $a > 0$, $a \neq 1$ je $\{a^r\}_{r \in \mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ a

$$\boxed{a^{r+s} = a^r \cdot a^s,\ (ab)^r = a^r \cdot b^r,\ (a^r)^s = a^{r \cdot s}\ (r, s \in \mathbb{R})}$$

Hodnoty a^r pro dané $a > 0$, $a \neq 1$, zaplní interval $(0, \infty)$ všude hustě, *ne však úplně.*

Kladná čísla, která ve škále $\{a^r\}_{r \in \mathbb{Q}}$ chybějí, prohlásíme za mocniny a^r s iracionálními r:

$$a^r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\frac{m}{n} \to r} a^{\frac{m}{n}}$$

Jsme téměř u konce: pro $a > 0$, $a \neq 1$ je $\{a^r\}_{r \in \mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ a

$$\boxed{a^{r+s} = a^r \cdot a^s,\ (ab)^r = a^r \cdot b^r,\ (a^r)^s = a^{r \cdot s}\ (r, s \in \mathbb{R})}$$

Poslední krok: definujeme logaritmus

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R})$$

Hodnoty a^r pro dané $a > 0$, $a \neq 1$, zaplní interval $(0, \infty)$ všude hustě, *ne však úplně.*

Kladná čísla, která ve škále $\left\{a^r\right\}_{r\in\mathbb{Q}}$ chybějí, prohlásíme za mocniny a^r s iracionálními r:

$$a^r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\frac{m}{n}\to r} a^{\frac{m}{n}}$$

Jsme téměř u konce: pro $a > 0$, $a \neq 1$ je $\left\{a^r\right\}_{r\in\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+$ a

$$\boxed{a^{r+s} = a^r \cdot a^s,\ (ab)^r = a^r \cdot b^r,\ (a^r)^s = a^{r\cdot s}\ (r, s \in \mathbb{R})}$$

Poslední krok: definujeme logaritmus

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \quad (a > 0,\, a \neq 1,\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R})$$

Raison d'etre logaritmů: $\boxed{\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)}$

$\log_a\colon (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ je spojitý izomorfismus grup,
až na násobek jediný: $\log_b x = k \cdot \log_a x$, kde $k = \log_b a \neq 0$.

Proč jsme při takovém pojetí „v zajetí“?

Algebraický přístup k obecným mocninám a logaritmům přes mocniny se zlomkovými exponenty

(1) je ahistorický,

Proč jsme při takovém pojetí „v zajetí“?

Algebraický přístup k obecným mocninám a logaritmům přes mocniny se zlomkovými exponenty

(1) je ahistorický,

(2) neodpovídá ani současným, ani překonaným způsobům numerických výpočtů,

Proč jsme při takovém pojetí „v zajetí“?

Algebraický přístup k obecným mocninám a logaritmům přes mocniny se zlomkovými exponenty

(1) je ahistorický,

(2) neodpovídá ani současným, ani překonaným způsobům numerických výpočtů,

(3) v jádru se odlišuje od dvou „vyšších“ funkcionálních konstrukcí prostředky matematické analýzy.

II. Jak násobit podle tabulek kosinů?

$x > 0,\ y > 0, \quad x \cdot y =?$

II. Jak násobit podle tabulek kosinů?

$x > 0,\ y > 0, \quad x \cdot y = ?$

$$10^{m-1} < x < 10^m \ \Rightarrow\ x = 10^m \cos\alpha$$

$$10^{n-1} < y < 10^n \ \Rightarrow\ y = 10^m \cos\beta$$

$$x \cdot y = 10^{m+n} \cos\alpha \cos\beta = 10^{m+n} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

II. Jak násobit podle tabulek kosinů?

$x > 0,\ y > 0, \quad x \cdot y = ?$

$$10^{m-1} < x < 10^m \ \Rightarrow\ x = 10^m \cos\alpha$$
$$10^{n-1} < y < 10^n \ \Rightarrow\ y = 10^m \cos\beta$$

$$x \cdot y = 10^{m+n} \cos\alpha \cos\beta = 10^{m+n} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Realita numerických výpočtů konce 16. století,
předzvěst převodního „vynálezu“

$$l(xy) = l(x) + l(y)\,.$$

II. Jak násobit podle tabulek kosinů?

$x > 0,\ y > 0, \quad x \cdot y = ?$

$$10^{m-1} < x < 10^m \ \Rightarrow\ x = 10^m \cos\alpha$$
$$10^{n-1} < y < 10^n \ \Rightarrow\ y = 10^m \cos\beta$$

$$x \cdot y = 10^{m+n} \cos\alpha \cos\beta = 10^{m+n} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

Realita numerických výpočtů konce 16. století,
předzvěst převodního „vynálezu“

$$l(xy) = l(x) + l(y)\,.$$

Pierre-Simon Laplace (1749–1829):
Logarithms ... by shortening the labours, doubled the life of astronomers.

Michael Stifel (1487–1567) v knize *Arithmetica integra* (1544) sestavil škálu mocnin čísla 2

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	36	...

a objasnil, jak snadno je možno čísla z této škály násobit.

Michael Stifel (1487–1567) v knize *Arithmetica integra* (1544) sestavil škálu mocnin čísla 2

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	36	...

a objasnil, jak snadno je možno čísla z této škály násobit.

S jednoduchým (geniálním) nápadem přišli John Napier (1550–1617) a nezávisle Jost Bürgi (1552–1632): při omezeném n bude škála mocnin

$$a^{-n}, a^{-n+1}, \ldots, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, \ldots, a^{n-1}, a^{n}$$

tím „rovnoměrnější“, čím bližší číslu 1 bude základ a.

Michael Stifel (1487–1567) v knize *Arithmetica integra* (1544) sestavil škálu mocnin čísla 2

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	36	...

a objasnil, jak snadno je možno čísla z této škály násobit.

S jednoduchým (geniálním) nápadem přišli John Napier (1550–1617) a nezávisle Jost Bürgi (1552–1632): při omezeném n bude škála mocnin

$$a^{-n}, a^{-n+1}, \dots, a^{-1}, a^0, a^1, \dots, a^{n-1}, a^n$$

tím „rovnoměrnější“, čím bližší číslu 1 bude základ a.

(Pochybnost: nebude rozpětí té škály kolem čísla 1 příliš úzké, aby mělo praktický význam?)

Napier: $a = 0{,}9999999$, Bürgi $a = 1{,}0001$.

III. Čím byly první logaritmy?

Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)
řec. logos+arithmos (čísla poměrů?)

III. Čím byly první logaritmy?

Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)
řec. logos+arithmos (čísla poměrů?)

Encyclopædia Britannica (1794):
Logarithms indicate the ratios of numbers to one another; being a series of numbers in arithmetical progression, corresponding to others in geometrical progression.

Rozdíl libovolných dvou logaritmů **určuje podíl** těch dvou čísel, která jsou jimi reprezentována.

Bürgi: *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen* (1620)

III. Čím byly první logaritmy?

Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)
řec. logos+arithmos (čísla poměrů?)

Encyclopædia Britannica (1794):
Logarithms indicate the ratios of numbers to one another; being a series of numbers in arithmetical progression, corresponding to others in geometrical progression.

Rozdíl libovolných dvou logaritmů **určuje podíl** těch dvou čísel, která jsou jimi reprezentována.

Bürgi: *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen* (1620)

Mají být v tabulkách v aritmetické řadě čísla, nebo jejich logaritmy? (Hledáme v nich v obou směrech.)

III. Čím byly první logaritmy?

Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)
řec. logos+arithmos (čísla poměrů?)

Encyclopædia Britannica (1794):
Logarithms indicate the ratios of numbers to one another; being a series of numbers in arithmetical progression, corresponding to others in geometrical progression.

Rozdíl libovolných dvou logaritmů **určuje podíl** těch dvou čísel, která jsou jimi reprezentována.

Bürgi: *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen* (1620)

Mají být v tabulkách v aritmetické řadě čísla, nebo jejich logaritmy? (Hledáme v nich v obou směrech.)

V Napierových tabulkách byly v aritmetické řadě ostré úhly s krokem $1'$. Jim příslušely zapisované goniometrické hodnoty a jejich logaritmy.

Každý řádek Napierovy tabulky měl tvar:

$$\boxed{\alpha \quad \sin\alpha \quad \mathrm{nap}(\sin\alpha) \quad \mathrm{nap}(\mathrm{tg}\,\alpha) \quad \mathrm{nap}(\cos\alpha) \quad \cos\alpha \quad 90^\circ - \alpha}$$

Sedm údajů: dva úhly a pět (zpravidla sedmimístných) přirozených čísel.

Hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ – ne poměry, nýbrž délky – celá čísla z intervalu $x \in \langle 0, 10^7 \rangle$ (plný sinus: $\sin 90^0 = 10^7$).

Každý řádek Napierovy tabulky měl tvar:

$$\boxed{\alpha \quad \sin\alpha \quad \mathrm{nap}(\sin\alpha) \quad \mathrm{nap}(\mathrm{tg}\,\alpha) \quad \mathrm{nap}(\cos\alpha) \quad \cos\alpha \quad 90^\circ-\alpha}$$

Sedm údajů: dva úhly a pět (zpravidla sedmimístných) přirozených čísel.

Hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ – ne poměry, nýbrž délky – celá čísla z intervalu $x \in \langle 0, 10^7 \rangle$ (plný sinus: $\sin 90^0 = 10^7$).

Napierův logaritmus (zkr. nap) – pro nás *funkce* s předpisem:

$$\boxed{y = \mathrm{nap}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y}$$

Každý řádek Napierovy tabulky měl tvar:

$$\boxed{\alpha \quad \sin\alpha \quad \mathrm{nap}(\sin\alpha) \quad \mathrm{nap}(\mathrm{tg}\,\alpha) \quad \mathrm{nap}(\cos\alpha) \quad \cos\alpha \quad 90^\circ - \alpha}$$

Sedm údajů: dva úhly a pět (zpravidla sedmimístných) přirozených čísel.

Hodnoty $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ – ne poměry, nýbrž délky – celá čísla z intervalu $x \in \langle 0, 10^7 \rangle$ (plný sinus: $\sin 90^0 = 10^7$).

Napierův logaritmus (zkr. nap) – pro nás *funkce* s předpisem:

$$\boxed{y = \mathrm{nap}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y}$$

Pro Napiera byla x, y celá nezáporná čísla: hledal postupně vždy tu hodnotu y, pro kterou má celočíselné zaokrouhlení příslušného $x \in \langle 0, 10^7 \rangle$ danou hodnotu $\sin\alpha$ či $\cos\alpha$. Nepočítal tedy $\mathrm{nap}(x)$ pro *každé* sedmimístné x. (!)

$$\boxed{a_k = 0{,}9999999^k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k}$$

Rekurentní výpočet: $a_0 = 1$,

$$a_{k+1} = (1 - 10^{-7})a_k = a_k - 10^{-7}a_k$$

$$\boxed{a_k = 0{,}9999999^k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k}$$

Rekurentní výpočet: $a_0 = 1$,

$$a_{k+1} = (1 - 10^{-7})a_k = a_k - 10^{-7}a_k$$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
1	$0{,}\underline{9999999}0000000$
2	$0{,}\underline{9999998}0000001$
3	$0{,}\underline{9999997}0000002$
4	$0{,}\underline{9999996}0000005$
5	$0{,}\underline{9999995}0000010$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
6	$0{,}\underline{9999994}0000015$
7	$0{,}\underline{9999993}0000021$
8	$0{,}\underline{9999992}0000028$
9	$0{,}\underline{9999991}0000036$
10	$0{,}\underline{9999990}0000045$

$\mathrm{nap}(0) = 10^7$, podtržené číslo je vždy $\mathrm{nap}(k)$.

Žádné od 0 do 10^7 nebude chybět: $a_k - a_{k+1} = 10^{-7}a_k < 10^{-7}$.

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
99	$0{,}\underline{9999901}0004851$
100	$0{,}\underline{9999900}0004950$
101	$0{,}\underline{9999899}0005050$
$\vdots$	$\vdots$
999	$0{,}\underline{9999001}0498484$
1 000	$0{,}\underline{9999000}0499484$
1 001	$0{,}\underline{9998999}0500483$
$\vdots$	$\vdots$
3 162	$0{,}\underline{9996838}4997015$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
3 163	$0{,}\underline{9996837}5000176$
$\vdots$	$\vdots$
9 999	$0{,}\underline{9990005}9968348$
10 000	$0{,}\underline{9990004}9978342$
10 001	$0{,}\underline{9990003}9988337$
$\vdots$	$\vdots$
99 999	$0{,}\underline{9900499}3225914$
100 000	$0{,}\underline{9900498}3325414$
100 001	$0{,}\underline{9900497}3424916$
$\vdots$	$\vdots$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
999 999	$0{,}\underline{9048375}0399552$
1 000 000	$0{,}\underline{9048374}1351177$
1 000 001	$0{,}\underline{9048373}2302803$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
9 999 999	$0{,}\underline{3678794}5956542$
10 000 000	$0{,}\underline{3678794}2277747$
10 000 001	$0{,}\underline{3678793}8598953$

Poznámka: $\quad \mathrm{e}^{-1} = 0{,}\underline{3678794}411171\ldots$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
999 999	$0{,}\underline{9048375}0399552$
1 000 000	$0{,}\underline{9048374}1351177$
1 000 001	$0{,}\underline{9048373}2302803$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
9 999 999	$0{,}\underline{3678794}5956542$
10 000 000	$0{,}\underline{3678794}2277747$
10 000 001	$0{,}\underline{3678793}8598953$

Poznámka: $\mathrm{e}^{-1} = 0{,}\underline{3678794}411171\ldots$

Rychlejší pohyb ve škále $\{a_k\}$: $a_{k+100} \doteq a_k(1 - 10^{-5})$ apod.
(Chyba $\left(1 - 10^{-7}\right)^{100} \doteq 1 - 10^{-5}$ je cca $0{,}5 \cdot 10^{-11}$.)

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
999 999	$0{,}\underline{9048375}0399552$
1 000 000	$0{,}\underline{9048374}1351177$
1 000 001	$0{,}\underline{9048373}2302803$

k	$a_k = \left(1 - 10^{-7}\right)^k$
$\vdots$	$\vdots$
9 999 999	$0{,}\underline{3678794}5956542$
10 000 000	$0{,}\underline{3678794}2277747$
10 000 001	$0{,}\underline{3678793}8598953$

Poznámka: $\mathrm{e}^{-1} = 0{,}\underline{3678794}411171\ldots$

Rychlejší pohyb ve škále $\{a_k\}$: $a_{k+100} \doteq a_k(1 - 10^{-5})$ apod.
(Chyba $\left(1 - 10^{-7}\right)^{100} \doteq 1 - 10^{-5}$ je cca $0{,}5 \cdot 10^{-11}$.)

Zopakujme: Napier nehledal indexy k pro všechna čísla $a_k = 0{,}*******$, nýbrž jen pro tabulkové hodnoty sinu a kosinu.

$$\sin 0°1' \doteq 2{,}908\,882 \cdot 10^{-4} \doteq \left(1 - 10^{-7}\right)^{81\,425\,712}$$

$$\sin 0°2' \doteq 5{,}817961 \cdot 10^{-4} \doteq \left(1 - 10^{-7}\right)^{74\,494\,240}$$

$$\boxed{y = \mathrm{nap}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y}$$

Násobení čísel $a, b \in (0, 1)$ podle Napierových tabulek:

$$\boxed{\mathrm{nap}(10^7 a) + \mathrm{nap}(10^7 b) = \mathrm{nap}(10^7 ab)}$$

$$\boxed{y = \operatorname{nap}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y}$$

Násobení čísel $a, b \in (0, 1)$ podle Napierových tabulek:

$$\boxed{\operatorname{nap}(10^7 a) + \operatorname{nap}(10^7 b) = \operatorname{nap}(10^7 ab)}$$

Bez tohoto posunu desetinné čárky:

$$\boxed{\operatorname{nap}(ab) = \operatorname{nap}(a) + \operatorname{nap}(b) - \operatorname{nap}(1)} \quad (\operatorname{nap}(1) = 161\,180\,948)$$

$$\boxed{y = \mathrm{nap}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y}$$

Násobení čísel $a, b \in (0,1)$ podle Napierových tabulek:

$$\boxed{\mathrm{nap}(10^7 a) + \mathrm{nap}(10^7 b) = \mathrm{nap}(10^7 ab)}$$

Bez tohoto posunu desetinné čárky:

$$\boxed{\mathrm{nap}(ab) = \mathrm{nap}(a) + \mathrm{nap}(b) - \mathrm{nap}(1)} \quad (\mathrm{nap}(1) = 161\,180\,948)$$

Henry Briggs (1556–1630): praktické požadavky

$$l(ab) = l(a) + l(b) \quad (\text{a tedy } l(1) = 0)$$

a $l(10) = 1$ (v důsledku čehož $l(10^k) = k$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$).

Při násobení *nás* (uživatele desítkové soustavy) totiž nejvíce potěší činitelé 10^k.

Briggsovy první tabulky dekadických logaritmů (1617, 1624)

Briggsovy první tabulky dekadických logaritmů (1617, 1624)

Poznámka: Na závislost $y = 10^x$ jako na „mocninnou“ záležitost (tak jsme ji právě zapsali) ještě dlouho nikdo nepomýšlel, mluvilo se o „antilogaritmech“.

Briggsovy první tabulky dekadických logaritmů (1617, 1624)

Poznámka: Na závislost $y = 10^x$ jako na „mocninnou“ záležitost (tak jsme ji právě zapsali) ještě dlouho nikdo nepomýšlel, mluvilo se o „antilogaritmech“.

Zpět k Napierovi: $\dfrac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y$

Posuňme v x, resp. y desetinnou čárku o 7 míst doprava, resp. doleva. Dostaneme

$$x = \left(1 - 10^{-7}\right)^{10^7 y} = z^y, \quad \text{kde} \quad z = \left(1 - 10^{-7}\right)^{10^7} \doteq \mathrm{e}^{-1},$$

což je novověká definice logaritmu $y = \log_z x$ při základu z.

Briggsovy první tabulky dekadických logaritmů (1617, 1624)

Poznámka: Na závislost $y = 10^x$ jako na „mocninnou“ záležitost (tak jsme ji právě zapsali) ještě dlouho nikdo nepomýšlel, mluvilo se o „antilogaritmech“.

Zpět k Napierovi: $\dfrac{x}{10^7} = \left(1 - 10^{-7}\right)^y$

Posuňme v x, resp. y desetinnou čárku o 7 míst doprava, resp. doleva. Dostaneme

$$x = \left(1 - 10^{-7}\right)^{10^7 y} = z^y, \quad \text{kde} \quad z = \left(1 - 10^{-7}\right)^{10^7} \doteq \mathrm{e}^{-1},$$

což je novověká definice logaritmu $y = \log_z x$ při základu z.

Jak však s jinými základy (např. $z = 10$) počítat z^y pro čísla y s N desetinnými místy, když nemáme k dispozici vyjádření $z = w^{10^N}$, umožňující převod $z^y = w^{10^N y}$? To je esence triku pánů Napiera a Bürgi: vybrali základy z, která taková vyjádření mají. (Nejde o shazov, naopak …)

IV. Přirozené logaritmy a jejich základ

Kolem roku 1650 (dekadické logaritmy již byly zavedeným prostředkem výpočtů) se předmětem zájmu stala funkce

$$L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0),$$

IV. Přirozené logaritmy a jejich základ

Kolem roku 1650 (dekadické logaritmy již byly zavedeným prostředkem výpočtů) se předmětem zájmu stala funkce

$$L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0),$$

obdařená stejným „kouzlem“: pro libovolná $a, b > 0$ platí

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = L(a) + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}(t/a)}{t/a} =$$
$$= L(a) + \int_1^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = L(a) + L(b)$$

(použili jsme substituci $u = t/a$).

Říkalo se jí proto *hyperbolický* či *přirozený* logaritmus.

IV. Přirozené logaritmy a jejich základ

Kolem roku 1650 (dekadické logaritmy již byly zavedeným prostředkem výpočtů) se předmětem zájmu stala funkce

$$L(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0),$$

obdařená stejným „kouzlem“: pro libovolná $a, b > 0$ platí

$$L(ab) = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = L(a) + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}(t/a)}{t/a} =$$
$$= L(a) + \int_1^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = L(a) + L(b)$$

(použili jsme substituci $u = t/a$).

Říkalo se jí proto *hyperbolický* či *přirozený* logaritmus.

Můžeme tuto funkci přiblížit středoškolákům, když už jsme je obeznámili s technikou výpočtů prvních logaritmů?

Víme, že logaritmy lze počítat numericky s přesností $1/n$ pomocí funkce

$$y = l_n(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

Víme, že logaritmy lze počítat numericky s přesností $1/n$ pomocí funkce

$$y = l_n(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

a to na dvojicích hodnot (x_k, y_k):

$$y_k = \frac{k}{n} \quad \text{a} \quad x_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Víme, že logaritmy lze počítat numericky s přesností $1/n$ pomocí funkce

$$y = l_n(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

a to na dvojicích hodnot (x_k, y_k):

$$y_k = \frac{k}{n} \quad \text{a} \quad x_k = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Protože pro každé $i = 0, 1, 2, \dots$ máme

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n},$$

lze jednoduchá čísla y_k zapsat také takto složitě:

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}.$$

Přepišme to: $$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Přepišme to: $$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Geometricky to je součet obsahů k obdélníků, každý se základnou $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ a výškou $\dfrac{1}{x_i}$, které lze v souvislé řadě přikreslit do prvního kvadrantu ke grafu funkce $y = \dfrac{1}{x}$.

(I bez obrázku jistě *vidíte*, že jde o integrální součet zmíněné funkce pro dělení $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ s reprezentanty v levých krajních bodech dělících intervalů).

Přepišme to: $y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i)$

Geometricky to je součet obsahů k obdélníků, každý se základnou $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ a výškou $\frac{1}{x_i}$, které lze v souvislé řadě přikreslit do prvního kvadrantu ke grafu funkce $y = \frac{1}{x}$.
(I bez obrázku jistě *vidíte*, že jde o integrální součet zmíněné funkce pro dělení $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k$ s reprezentanty v levých krajních bodech dělících intervalů).
Intuitivně je jasné, co se bude dít, když budeme náš parametr přesnosti $1/n$ stlačovat k nule:
Budeme se přibližovat k (rovněž „mirifici-logaritmické“) funkci $y = L(x)$, jejíž každá hodnota y bude obsahem útvaru mezi hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ a intervalem $\langle 1, x \rangle$ osy x.

Překvapivé spojení logaritmické vlastnosti s jednoduchou kuželosečkou (hyperbolou) muselo přinést ovoce.

Její (té vlastnosti) nositelka, funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{D}$$

právem získala mezi všemi logaritmickými funkcemi unikátní postavení.

Překvapivé spojení logaritmické vlastnosti s jednoduchou kuželosečkou (hyperbolou) muselo přinést ovoce.

Její (té vlastnosti) nositelka, funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{D}$$

právem získala mezi všemi logaritmickými funkcemi unikátní postavení.

Z integrálové definice (D) lze prostředky matematické analýzy v oboru $\mathbb{R}$ odvodit všechny známé vlastnosti logaritmické funkce $y = \ln x$ a (k ní jako inverzní) exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$, včetně té, že hodnota e^x je (pro $x \in \mathbb{Q}$) skutečně x-tá mocnina čísla e podle algebraické konstrukce.

Překvapivé spojení logaritmické vlastnosti s jednoduchou kuželosečkou (hyperbolou) muselo přinést ovoce.

Její (té vlastnosti) nositelka, funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{D}$$

právem získala mezi všemi logaritmickými funkcemi unikátní postavení.

Z integrálové definice (D) lze prostředky matematické analýzy v oboru $\mathbb{R}$ odvodit všechny známé vlastnosti logaritmické funkce $y = \ln x$ a (k ní jako inverzní) exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$, včetně té, že hodnota e^x je (pro $x \in \mathbb{Q}$) skutečně x-tá mocnina čísla e podle algebraické konstrukce.
Pro matematickou analýzu je ovšem významnější vlastnost:

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x} \qquad (\text{neboť} \quad (\ln x)' = 1/x)$$

Dvě základní mocninné řady (v historickém pořadí):

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots)\mathrm{d}t = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad (|x| < 1)\end{aligned}$$

a

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Pozor: Číslo e je v teorii s definicí (D) zaváděno vztahem

$$\ln \mathrm{e} = 1, \quad \text{tedy} \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1,$$

takže se pak *dokazuje* rovnost

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pozor: Číslo e je v teorii s definicí (D) zaváděno vztahem

$$\ln \mathrm{e} = 1, \quad \text{tedy} \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1,$$

takže se pak *dokazuje* rovnost

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

My tu limitu vidíme z výsledku „naší“ konstrukce

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

když položíme $y = 1$.

Pozor: Číslo e je v teorii s definicí (D) zaváděno vztahem

$$\ln \mathrm{e} = 1, \quad \text{tedy} \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1,$$

takže se pak *dokazuje* rovnost

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

My tu limitu vidíme z výsledku „naší" konstrukce

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny},$$

když položíme $y = 1$.

Kolik času ve výuce bychom potřebovali, aby nepadala (ta limita pro základ e) na hlavy studentů „z nebe" ?

Není marné vědět, odkud se to všechno vzalo?!

V. Funkce jsou ... o změnách hodnot!

Aritmetické a geometrické posloupnosti (funkce na $\mathbb{N}$) zavádíme ve škole nikoliv předpisy, nýbrž zákonitostmi

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{resp.} \quad a_{n+1}/a_n = q.$$

V. Funkce jsou ... o změnách hodnot!

Aritmetické a geometrické posloupnosti (funkce na $\mathbb{N}$) zavádíme ve škole nikoliv předpisy, nýbrž zákonitostmi

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{resp.} \quad a_{n+1}/a_n = q.$$

Dva základní způsoby vyjádření změny hodnoty proměnné w

$$w_2 - w_1 \quad \text{a} \quad w_2/w_1$$

mají uplatnění v řadě praktických situací (*o kolik* či *kolikrát*).

V. Funkce jsou ... o změnách hodnot!

Aritmetické a geometrické posloupnosti (funkce na $\mathbb{N}$) zavádíme ve škole nikoliv předpisy, nýbrž zákonitostmi

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{resp.} \quad a_{n+1}/a_n = q.$$

Dva základní způsoby vyjádření změny hodnoty proměnné w

$$w_2 - w_1 \quad \text{a} \quad w_2/w_1$$

mají uplatnění v řadě praktických situací (*o kolik* či *kolikrát*).

Dynamika lineární funkce f:

$$f(x) - f(y) = A \cdot (x - y) \quad (A = \text{konst.})$$

V. Funkce jsou ... o změnách hodnot!

Aritmetické a geometrické posloupnosti (funkce na $\mathbb{N}$) zavádíme ve škole nikoliv předpisy, nýbrž zákonitostmi

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{resp.} \quad a_{n+1}/a_n = q.$$

Dva základní způsoby vyjádření změny hodnoty proměnné w

$$w_2 - w_1 \quad \text{a} \quad w_2/w_1$$

mají uplatnění v řadě praktických situací (*o kolik* či *kolikrát*).

Dynamika lineární funkce f:

$$f(x) - f(y) = A \cdot (x - y) \quad (A = \text{konst.})$$

Přínosné a netriviální je poznání, že lineární funkce jsou charakterizovány obecněji vyjádřenou zákonitostí:

změna $f(x) - f(y)$ *závisí pouze na změně* $x - y$.

Věta 1. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v).$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = Ax + B$.

Věta 1. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v).$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = Ax + B$.

Důkaz: $I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = A$

Stačí dokázat, že $f(x) = Ax$ pro racionální $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Věta 1. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v).$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = Ax + B$.

Důkaz: $I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = A$

Stačí dokázat, že $f(x) = Ax$ pro racionální $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Pro celé $n > 1$ uvažme n rozdílů

$$f(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{0}{n}), f(\tfrac{2}{n}) - f(\tfrac{1}{n}), f(\tfrac{3}{n}) - f(\tfrac{2}{n}), \ldots, f(\tfrac{n}{n}) - f(\tfrac{n-1}{n}).$$

Podle podmínky jsou stejné a jejich součet je $f(1) - f(0) = A$,

Věta 1. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v).$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = Ax + B$.

Důkaz: $I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 0$, $f(1) = A$

Stačí dokázat, že $f(x) = Ax$ pro racionální $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Pro celé $n > 1$ uvažme n rozdílů

$$f(\tfrac{1}{n}) - f(\tfrac{0}{n}), f(\tfrac{2}{n}) - f(\tfrac{1}{n}), f(\tfrac{3}{n}) - f(\tfrac{2}{n}), \ldots, f(\tfrac{n}{n}) - f(\tfrac{n-1}{n}).$$

Podle podmínky jsou stejné a jejich součet je $f(1) - f(0) = A$, takže jsou všechny rovny A/n. Odtud postupně

$$f(\tfrac{1}{n}) = f(\tfrac{0}{n}) + \tfrac{A}{n} = \tfrac{A}{n}, f(\tfrac{2}{n}) = f(\tfrac{1}{n}) + \tfrac{A}{n} = \tfrac{2A}{n}, \ldots$$

tedy $f(\frac{m}{n}) = A \cdot \frac{m}{n}$ pro každé $m = 1, 2, \ldots, n - 1$. $\square$

Podmínku $x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v)$ lze zapsat:

$$x + y = u + v \Rightarrow f(x) + f(y) = f(u) + f(v)$$

Podmínku $x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v)$ lze zapsat:

$$x + y = u + v \Rightarrow f(x) + f(y) = f(u) + f(v)$$

Za předpokladu $f(0) = 0$ volbou $u = 0$ a $v = x + y$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

S oborem $x, y \in \mathbb{R}$ to je tzv. Cauchyova funkcionální rovnice.

Podmínku $x - y = u - v \Rightarrow f(x) - f(y) = f(u) - f(v)$ lze zapsat:

$$x + y = u + v \Rightarrow f(x) + f(y) = f(u) + f(v)$$

Za předpokladu $f(0) = 0$ volbou $u = 0$ a $v = x + y$:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

S oborem $x, y \in \mathbb{R}$ to je tzv. Cauchyova funkcionální rovnice.

Existence řešení různých od $f(x) = Ax$.

František Neuman: *Funkcionální rovnice*, Matematický seminář SNTL, sv. 24, SNTL, Praha 1986, 104 s.

Co je dynamikou exponenciálních funkcí?

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

Co je dynamikou exponenciálních funkcí?

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \;\Rightarrow\; \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

Důkaz: Důsledek Věty 1 pro funkci $g\colon I \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$:

$$g(x) - g(y) = \ln f(x) - \ln f(y) = \ln \tfrac{f(x)}{f(y)},$$

$$g(x) = ax + b \;\Rightarrow\; f(x) = \mathrm{e}^{ax+b} = B \cdot A^x, \quad \text{kde} \quad B = \mathrm{e}^b, A = \mathrm{e}^a\,.$$

Co je dynamikou exponenciálních funkcí?

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$x - y = u - v \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

Důkaz: Důsledek Věty 1 pro funkci $g\colon I \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$:

$$g(x) - g(y) = \ln f(x) - \ln f(y) = \ln \tfrac{f(x)}{f(y)},$$

$$g(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{ax+b} = B \cdot A^x, \quad \text{kde} \quad B = \mathrm{e}^b, A = \mathrm{e}^a\,.$$

Exponenciální funkce jsou proto charakterizovány zákonitostí:

změna $f(x)/f(y)$ závisí pouze na změně $x - y$.

Příklady: princip *spojitého* úrokování, …

Ještě jednou

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$(*) \qquad x - y = u - v \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

$I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 1$, $f(1) = A > 0$, $f(x) =?$

Ještě jednou

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$(*) \qquad x - y = u - v \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

$I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 1$, $f(1) = A > 0$, $f(x) =?$

Ze *součinu* n stejných *podílů*

$$A = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(\frac{k}{n})}{f(\frac{k-1}{n})} = \left(\frac{f(\frac{1}{n})}{f(\frac{0}{n})}\right)^n = f(\tfrac{1}{n})^n = A \Rightarrow f(\tfrac{1}{n}) = \sqrt[n]{A},$$

obecně $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{A^m}$. Takové odvození tedy kopíruje konstrukci škály mocnin čísla A s racionálními exponenty.

Ještě jednou

Věta 2. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}^+$ a pro libovolná $x, y, u, v \in I$ platí

$$(*) \qquad x - y = u - v \Rightarrow \frac{f(x)}{f(y)} = \frac{f(u)}{f(v)}.$$

Je-li f *spojitá* na I, pak $f(x) = B \cdot A^x$.

$I = \langle 0, 1\rangle$, $f(0) = 1$, $f(1) = A > 0$, $f(x) = ?$

Ze *součinu* n stejných *podílů*

$$A = \prod_{k=1}^{n} \frac{f(\frac{k}{n})}{f(\frac{k-1}{n})} = \left(\frac{f(\frac{1}{n})}{f(\frac{0}{n})}\right)^n = f(\tfrac{1}{n})^n = A \Rightarrow f(\tfrac{1}{n}) = \sqrt[n]{A},$$

obecně $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{A^m}$. Takové odvození tedy kopíruje konstrukci škály mocnin čísla A s racionálními exponenty.

Kdo nám teď ten úkol „uložil“? Touha rozkrýt zákonitost $(*)$ (v níž žádné mocniny nevystupují!).

Aritmetické posloupnosti $\longleftrightarrow$ Lineární funkce

Geometrické posloupnosti $\longleftrightarrow$ Exponenciální funkce

$$\text{Aritmetické posloupnosti} \longleftrightarrow \text{Lineární funkce}$$

$$\text{Geometrické posloupnosti} \longleftrightarrow \text{Exponenciální funkce}$$

Přehled zákonitostí základních funkcí:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) - f(y) = \Phi(x-y) \;&\Leftrightarrow\; f(x) = ax + b \\ \frac{f(x)}{f(y)} = \Phi(x-y) \;&\Leftrightarrow\; f(x) = b \cdot a^x = b \cdot \mathrm{e}^{cx} \\ f(x) - f(y) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right) \;&\Leftrightarrow\; f(x) = b + a \ln x = b + \log_c x \\ \frac{f(x)}{f(y)} = \Phi\left(\frac{x}{y}\right) \;&\Leftrightarrow\; f(x) = b \cdot x^a \end{aligned}}$$

Aritmetické posloupnosti $\longleftrightarrow$ Lineární funkce

Geometrické posloupnosti $\longleftrightarrow$ Exponenciální funkce

Přehled zákonitostí základních funkcí:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)-f(y)=\Phi(x-y) &\Leftrightarrow f(x)=ax+b \\ \frac{f(x)}{f(y)}=\Phi(x-y) &\Leftrightarrow f(x)=b\cdot a^x=b\cdot \mathrm{e}^{cx} \\ f(x)-f(y)=\Phi\left(\frac{x}{y}\right) &\Leftrightarrow f(x)=b+a\ln x=b+\log_c x \\ \frac{f(x)}{f(y)}=\Phi\left(\frac{x}{y}\right) &\Leftrightarrow f(x)=b\cdot x^a \end{aligned}}$$

Má to nějaký praktický význam?
Ano, například při hledání druhu jednoduché závislosti $v=f(u)$ z tabulky, tj. z dané konečné množiny dvojic (u,v).

VI. Jak se dnes mocniny a logaritmy počítají?

$$a^b = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^b = \mathrm{e}^{b \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R})$$

VI. Jak se dnes mocniny a logaritmy počítají?

$$a^b = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^b = \mathrm{e}^{b \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R})$$

Pro $x = \boxed{b \ln a}$ využijeme Taylorovu řadu

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Stačí tedy vyřešit otázku, jak počítat (přirozené) logaritmy.

VI. Jak se dnes mocniny a logaritmy počítají?

$$a^b = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^b = \mathrm{e}^{b \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R})$$

Pro $x = \boxed{b \ln a}$ využijeme Taylorovu řadu

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Stačí tedy vyřešit otázku, jak počítat (přirozené) logaritmy.

Pro každé $x \in (-1, 1\rangle$ máme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \ldots$$

Tak můžeme počítat $\ln a$ jen pro $a \in (0, 2\rangle$.
Navíc je to hodně pomalé pro a blízká krajním mezím.
Taková kritická a (ani $a > 2$) však nepotřebujeme. Proč?

Ve dvojkové soustavě: $a = 2^m \cdot a_0$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $a_0 \in \langle 1, 2)$

$$\boxed{\ln a = (m+1)\ln 2 + \ln \frac{a_0}{2}} \quad \left(\frac{1}{2} \le \frac{a_0}{2} < 1\right)$$

Ve dvojkové soustavě: $\quad a = 2^m \cdot a_0$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $a_0 \in \langle 1, 2)$

$$\boxed{\ln a = (m+1)\ln 2 + \ln \frac{a_0}{2}} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \frac{a_0}{2} < 1\right)$$

Pro $x = 1 - \dfrac{a_0}{2}$ tak platí $0 < x < \frac{1}{2}$ a

$$\ln \frac{a_0}{2} = \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

Konvergence rychlejší než u řady $q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$ pro $q = \frac{1}{2}$.

Ve dvojkové soustavě: $a = 2^m \cdot a_0$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $a_0 \in \langle 1, 2)$

$$\boxed{\ln a = (m+1)\ln 2 + \ln \frac{a_0}{2}} \quad \left(\frac{1}{2} \leq \frac{a_0}{2} < 1\right)$$

Pro $x = 1 - \dfrac{a_0}{2}$ tak platí $0 < x < \frac{1}{2}$ a

$$\ln \frac{a_0}{2} = \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

Konvergence rychlejší než u řady $q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$ pro $q = \frac{1}{2}$.

Ještě efektivnější výpočet (s odhadem $q = \frac{1}{9}$):

$$x = \frac{1 - a_0}{1 + a_0} \Rightarrow \ln a_0 = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right),$$

neboť z $a_0 \in \langle 1, 2)$ plyne $x \in \langle 0, \frac{1}{3})$ neboli $x^2 \in \langle 0, \frac{1}{9})$.

Takto lze dokonce počítat $\ln a_0$ pro každé kladné číslo a_0.

VII. V oboru $\mathbb{C}$ se pěstuje nejen algebra, ale i analýza (a geometrie) ...

Mocniny a odmocniny

$$z^k \quad (z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{a} \qquad \sqrt[n]{z} \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$$

do jedné škály nespojujeme a dále je algebraicky nerozšiřujeme ($\sqrt[n]{z}$ má n „rovnoprávných“ hodnot, je-li $z \neq 0$).

VII. V oboru $\mathbb{C}$ se pěstuje nejen algebra, ale i analýza (a geometrie) ...

Mocniny a odmocniny

$$z^k \quad (z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{a} \qquad \sqrt[n]{z} \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$$

do jedné škály nespojujeme a dále je algebraicky nerozšiřujeme ($\sqrt[n]{z}$ má n „rovnoprávných“ hodnot, je-li $z \neq 0$).

S inspirací, avšak nezávisle na výsledcích analýzy v oboru $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

VII. V oboru $\mathbb{C}$ se pěstuje nejen algebra, ale i analýza (a geometrie) ...

Mocniny a odmocniny

$$z^k \quad (z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{a} \qquad \sqrt[n]{z} \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$$

do jedné škály nespojujeme a dále je algebraicky nerozšiřujeme ($\sqrt[n]{z}$ má n „rovnoprávných“ hodnot, je-li $z \neq 0$).

S inspirací, avšak nezávisle na výsledcích analýzy v oboru $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}$$

Poloměr konvergence je ∞, součet je *celá* funkce s derivací

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)' = 0 + 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots = \exp(z).$$

Pravidlem o násobení absolutně konvergentních řad se odvodí:

$$\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})}$$

Důsledky:

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, $\exp(z) \neq 0$, $\big(\exp(z)\big)^k = \exp(kz)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \exp(z)$, kde $\mathrm{e} = \exp(1)$.

Pravidlem o násobení absolutně konvergentních řad se odvodí:

$$\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})}$$

Důsledky:

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, $\exp(z) \neq 0$, $\big(\exp(z)\big)^k = \exp(kz)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \exp(z)$, kde $\mathrm{e} = \exp(1)$.

(Pozor: $(\mathrm{e}^z)^w$ má zatím smysl pouze pro $w = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, není-li $z = 1$.)

Pravidlem o násobení absolutně konvergentních řad se odvodí:

$$\boxed{\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})}$$

Důsledky:

$\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, $\exp(z) \neq 0$, $\big(\exp(z)\big)^k = \exp(kz)$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\mathrm{e}^z \overset{\text{def}}{=} \exp(z)$, kde $\mathrm{e} = \exp(1)$.

(Pozor: $(\mathrm{e}^z)^w$ má zatím smysl pouze pro $w = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, není-li $z = 1$.)

Z takové teorie už vyplyne teorie komplexního sinu a kosinu

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Zásadní význam: $\boxed{\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)}$

$\longrightarrow$ Logaritmus nenulového komplexního čísla

$$\boxed{w = \ln z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z = \mathrm{e}^w}$$

má nekonečně mnoho hodnot $w = \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\arg z$.

Zásadní význam: $\boxed{\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)}$

$\longrightarrow$ Logaritmus nenulového komplexního čísla

$$\boxed{w = \ln z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z = \mathrm{e}^w}$$

má nekonečně mnoho hodnot $w = \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i}\arg z$.

Proto má (zpravidla) nekonečně mnoho hodnot i obecná mocnina

$$\boxed{a^b \overset{\text{def}}{=} \exp(b \cdot \ln a) \quad (a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)}$$

Zásadní význam: $\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)}$

$\longrightarrow$ Logaritmus nenulového komplexního čísla

$$\boxed{w = \ln z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z = e^w}$$

má nekonečně mnoho hodnot $w = \ln_{\mathbb{R}} |z| + i \arg z$.

Proto má (zpravidla) nekonečně mnoho hodnot i obecná mocnina

$$\boxed{a^b \overset{\text{def}}{=} \exp(b \cdot \ln a) \quad (a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)}$$

Rovnost $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ neplatí ani „množinově“, dokonce i v případě, kdy $b, c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Zásadní význam: $\boxed{\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)}$

$\longrightarrow$ Logaritmus nenulového komplexního čísla

$$\boxed{w = \ln z \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z = \mathrm{e}^w}$$

má nekonečně mnoho hodnot $w = \ln_{\mathbb{R}} |z| + \mathrm{i} \arg z$.

Proto má (zpravidla) nekonečně mnoho hodnot i obecná mocnina

$$\boxed{a^b \overset{\text{def}}{=} \exp(b \cdot \ln a) \quad (a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0)}$$

Rovnost $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ neplatí ani „množinově“, dokonce i v případě, kdy $b, c \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Například $z^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{3}} \cdot z^{\frac{1}{6}}$, kde $z \neq 0$, má sice ne 36, ale přesto 6 různých hodnot, jen jedna z nich je z^1. (Jsou to čísla $\sqrt[6]{z^6}$.)

Ukázka obecné mocniny:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}\pi)^{\mathrm{i}} &= \exp(\mathrm{i}\ln(\mathrm{i}\pi)) = \exp\left(\mathrm{i}\left(\ln\pi + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi + i\ln\pi\right) = \\
&= e_{\mathbb{R}}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}(\cos\ln\pi + i\sin\ln\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

Ukázka obecné mocniny:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}\pi)^{\mathrm{i}} &= \exp(\mathrm{i}\ln(\mathrm{i}\pi)) = \exp\left(\mathrm{i}\left(\ln\pi + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi + i\ln\pi\right) = \\
&= e_{\mathbb{R}}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}(\cos\ln\pi + i\sin\ln\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

(Ukažte podobně, že $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \subset \mathbb{R}^{+}$.)

Ukázka obecné mocniny:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}\pi)^{\mathrm{i}} &= \exp(\mathrm{i}\ln(\mathrm{i}\pi)) = \exp\left(\mathrm{i}\left(\ln\pi + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi + i\ln\pi\right) = \\
&= e_{\mathbb{R}}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}(\cos\ln\pi + i\sin\ln\pi) \quad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

(Ukažte podobně, že $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \subset \mathbb{R}^+$.)

Proč jsem se vrátil od e^z k $\exp(z)$?

Nejen proto, abyste lépe viděli, totiž je v tom rozdíl:

Ukázka obecné mocniny:

$$(\mathrm{i}\pi)^{\mathrm{i}} = \exp(\mathrm{i}\ln(\mathrm{i}\pi)) = \exp\left(\mathrm{i}\left(\ln\pi + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2k\pi + i\ln\pi\right) =$$

$$= e_{\mathbb{R}}^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}(\cos\ln\pi + i\sin\ln\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Ukažte podobně, že $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \subset \mathbb{R}^{+}$.)

Proč jsem se vrátil od e^z k $\exp(z)$?

Nejen proto, abyste lépe viděli, totiž je v tom rozdíl:

$$e^z = \exp(z\ln e) = \exp(z(1 + \mathrm{i}\cdot 2k\pi)) =$$

$$= \exp(z)\exp(2k\pi\mathrm{i}z) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}\colon\ \exp(2k\pi\mathrm{i}z) = 1 \ \Leftrightarrow\ z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

VIII. Nerutinní úlohy jsou … prubířské kameny!

1. Zjednodušte $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$, kde logaritmy se berou při stejném základu z.

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 6$.

5. Jen s tužkou na papíře zjistěte, které ze dvou čísel je větší: $\log_{10} 8$, nebo $(\log_{10} 9)^2$?

1. Zjednodušte $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$, kde logaritmy se berou při stejném základu z.

$a > 0$, $a \neq 1$, $\log a > 0$

1. Zjednodušte $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$, kde logaritmy se berou při stejném základu z.

$a > 0$, $a \neq 1$, $\log a > 0$

$V = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} \Rightarrow \log V = \dfrac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a)$

1. Zjednodušte $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$, kde logaritmy se berou při stejném základu z.

$a > 0$, $a \neq 1$, $\log a > 0$

$$V = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} \Rightarrow \log V = \frac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a)$$

$$\Rightarrow V = \log a$$

Odpověď: Je-li $a \leq 0$ nebo $\log a \leq 0$, výraz nemá smysl. Je-li $a > 0$ a $\log a > 0$, výraz je roven $\log a$.

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $\quad 2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $\quad 2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

Ne, bude to $\quad x \neq 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^x + 3^x \neq 5^x$!

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $\quad 2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

Ne, bude to $\quad x \neq 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^x + 3^x \neq 5^x$!

$$2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $\quad 2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

Ne, bude to $\quad x \neq 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^x + 3^x \neq 5^x$!

$$2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

Pro $x < 1$: $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

Ne, bude to $x \neq 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^x + 3^x \neq 5^x$!

$$2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

Pro $x < 1$: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

Pro $x > 1$: $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

2. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $2^x + 3^x = 5^x$.

Očekáváte $\quad 2^x + 3^x = 5^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow x = 1$?

Ne, bude to $\quad x \neq 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2^x + 3^x \neq 5^x$!

$$2^x + 3^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

Pro $x < 1$: $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

Pro $x > 1$: $\quad \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1.$

Zbývá do rovnice dosadit $x = 1$ a přesvědčit se, že je jejím kořenem.

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

---

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

Připomeňme převodní vztah: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

a jeho důkaz: $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \square$

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

Připomeňme převodní vztah: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

a jeho důkaz: $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \square$

Důsledek: $\boxed{\log_b a \cdot \log_a b = 1}$

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

Připomeňme převodní vztah: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

a jeho důkaz: $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \square$

Důsledek: $\boxed{\log_b a \cdot \log_a b = 1}$

Teď už k vlastní úloze:

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$$

3. Z hodnot $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ sestavte výraz pro hodnotu $\log_{abc} x$.

Připomeňme převodní vztah: $\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$

a jeho důkaz: $b^{\log_b a \cdot \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \square$

Důsledek: $\boxed{\log_b a \cdot \log_a b = 1}$

Teď už k vlastní úloze:

$$\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log_a x} + \dfrac{1}{\log_b x} + \dfrac{1}{\log_c x}}$$

Nezapomenout na případ $x = 1$!

4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 6.$

4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 6.$

Základy jsou navzájem převrácená čísla: $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1.$

4. V oboru $\mathbb{R}$ řešte rovnici $\left(\sqrt{2}+1\right)^x + \left(\sqrt{2}-1\right)^x = 6.$

Základy jsou navzájem převrácená čísla: $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1.$

Substituce $y = \left(\sqrt{2}+1\right)^x$:

$$y + \frac{1}{y} = 6 \Leftrightarrow y = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 3 + 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 3 - 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 \Leftrightarrow x = -2$$

5. Jen s tužkou na papíře zjistěte, které ze dvou čísel je větší: $\log_{10} 8$, nebo $(\log_{10} 9)^2$?

5. Jen s tužkou na papíře zjistěte, které ze dvou čísel je větší: $\log_{10} 8$, nebo $(\log_{10} 9)^2$?

Místo $\log_{10}$ pišme pouze log:

$$
\begin{aligned}
(\log 9)^2 &= \bigl(\log(10 \cdot 0{,}9)\bigr)^2 = \bigl(1 + \log 0{,}9\bigr)^2 = \\
&= 1 + 2\log 0{,}9 + \bigl(\log 0{,}9\bigr)^2 > 1 + 2\log 0{,}9 = \\
&= 1 + \log\bigl(0{,}9^2\bigr) = \log 8{,}1 > \log 8
\end{aligned}
$$

Odpověď: $(\log 9)^2 > \log 8$

5. Jen s tužkou na papíře zjistěte, které ze dvou čísel je větší: $\log_{10} 8$, nebo $(\log_{10} 9)^2$?

Místo $\log_{10}$ pišme pouze log:

$$\begin{aligned}(\log 9)^2 &= \bigl(\log(10 \cdot 0{,}9)\bigr)^2 = \bigl(1 + \log 0{,}9\bigr)^2 = \\ &= 1 + 2\log 0{,}9 + \bigl(\log 0{,}9\bigr)^2 > 1 + 2\log 0{,}9 = \\ &= 1 + \log\bigl(0{,}9^2\bigr) = \log 8{,}1 > \log 8\end{aligned}$$

Odpověď: $\quad (\log 9)^2 > \log 8$

Poznámka: $\log 8 \doteq 0{,}903$, $(\log 9)^2 \doteq 0{,}911$.