ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

www.KMA.zcu.cz SINCE 1954

Rozklad kotangenty na parciální zlomky a tzv. Herglotzův trik

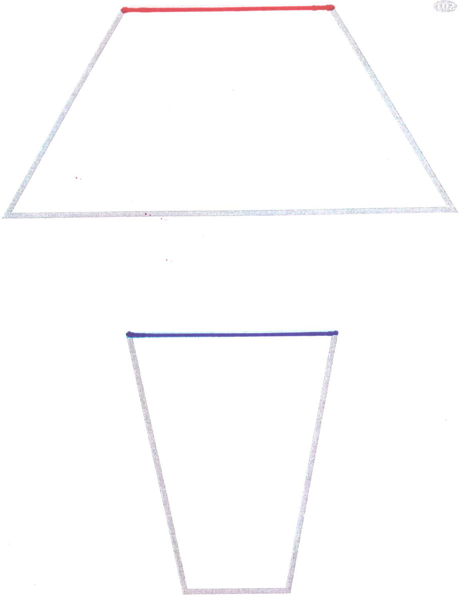
Pavel Drábek

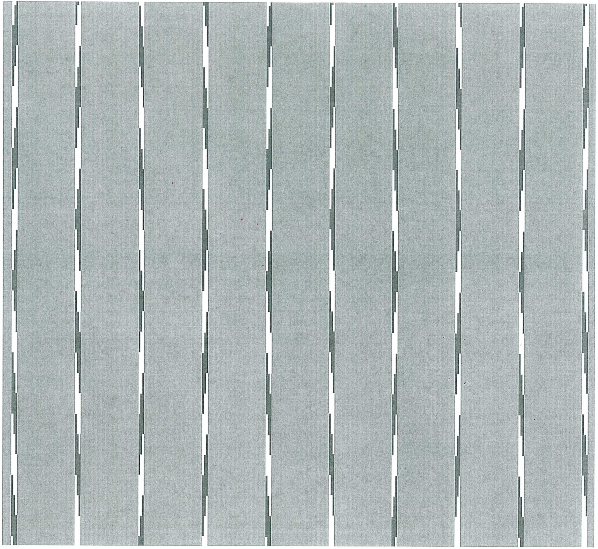
Katedra matematiky, Fakulta aplikovaných věd
Západočeská Univerzita v Plzni

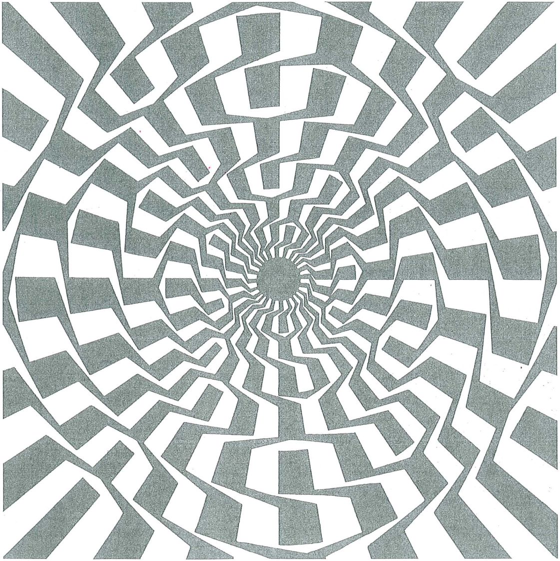
26. srpna 2010, Velké Meziříčí

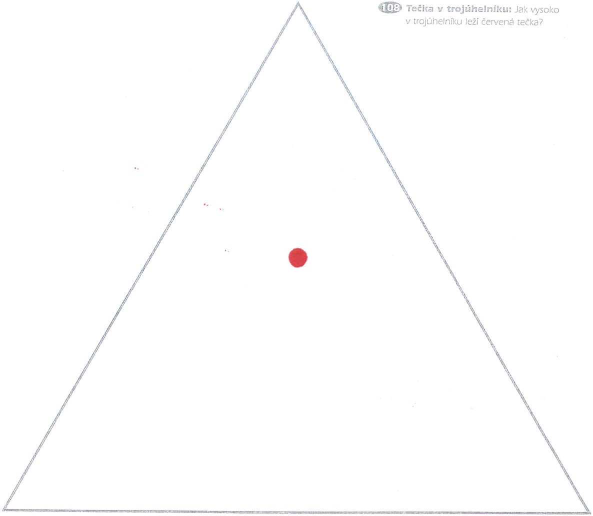
Učení je trénink mozku. Je to prostředek k tomu, aby člověk byl schopen pochopit vědomosti nabyté jinými lidmi a tvůrčím způsobem s nimi nakládal. Poznávání se někdy přirovnává k hledání světla v temnotách. Role učitele v tomto procesu je žáka motivovat a vést, naznačovat mu správnou cestu, případně upozorňovat na úskalí a špatné směry. Ke světlu však musí žák dojít sám. Učitel k němu nemůže žáka donést ani nemůže žákovi světlo přinést a postavit mu jej "pod nos". Mám ale vážné obavy, že právě takto je často učení interpretováno a chápáno.

102 **Lichoběžníková iluze:**
Která úsečka je delší,
červená, nebo modrá?

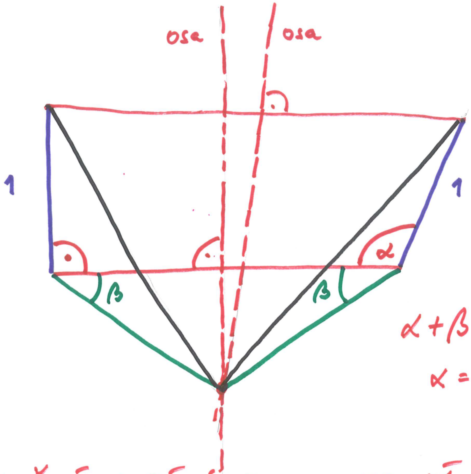








108 **Tečka v trojúhelníku:** Jak vysoko v trojúhelníku leží červená tečka?



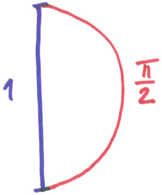
VĚTA "SSS":

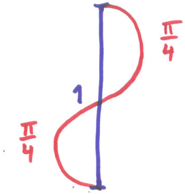
$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \beta$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

"KAŽDÝ TUPÝ ÚHEL JE PRAVÝ"

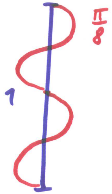
$\Downarrow$

"KAŽDÝ ÚHEL JE PRAVÝ"

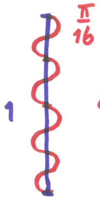




$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$



$4\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$



$8\times\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$

ČERVENÁ ČÁRA
SE BLÍŽÍ K MODRÉ.
JEJÍ DÉLKA NE!

Při anonymním hodnocení mé přednášky jedna studentka napsala:

"Přednáška mi nebyla k ničemu. Ve finále jsem se to musela stejně naučit sama."

Od té doby posluchačům sděluji, že tato anonymní studentka vystihla poměrně trefně princip studia. Učitel nemá za úkol studenty látku naučit. Jeho úkolem je studentům sdělit co se mají naučit a jakými prostředky toho mohou dosáhnout. Samotná práce, zvaná "učení", je však na nich.

LEONHARD EULER (1707 – 1783)

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right),$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\text{"} \sum_{n=1}^{\infty} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \text{"}$$

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x+n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

GUSTAV HERGLOTZ (1881 - 1953)

profesorem v Lipsku a Göttingen

$$f(x) \stackrel{def}{=} \pi \operatorname{cotg} \pi x$$

$$g(x) \stackrel{def}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x+n}$$

$$\stackrel{?}{\Longrightarrow} \quad f(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Implikaci dokážeme v pěti krocích.

1. krok:

- f je spojitá funkce v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- g — " —

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{-2x}{n^2-x^2} \Rightarrow$$

$$g(x) = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2}$$

$\forall x_0 \notin \mathbb{Z}\ \exists\, \mathcal{U}(x_0) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: konverguje stejnoměrně

(odhad pomocí Weierstrassova kritéria)

Vynecháme konečný počet členů:

$$n = 1, \quad 2n-1 \leq x_0^2$$

$$2n-1 > x_0^2 \implies n^2 - x_0^2 > (n-1)^2 > 0 \implies$$

$$0 < \frac{1}{n^2 - x_0^2} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

Ostrá nerovnost $\implies \exists\, \mathcal{U}(x_0)\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0)$:

$$0 < \frac{1}{n^2 - x^2} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty \underset{\text{W.k.}}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$ konverguje absolutně! a stejnoměrně!

2. krok:

- f je periodická s periodou 1
- g — " —

$$g_N(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

$$g_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} =$$

$$= g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}$$

PŘEJDEME K LIMITĚ PRO $N \to \infty$:

$$g(x+1) = \lim_{N\to\infty}\left(g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} g_{N-1}(x) + 0 + 0$$

$$= g(x)$$

3. krok:

- f je lichá funkce
- g — " —

$$g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : \quad g_N(-x) = -g_N(x)$$

PRO $N \to \infty$: $\quad g(-x) = -g(x)$

4. krok: f a g splňují

$$p\left(\frac{x}{2}\right)+p\left(\frac{x+1}{2}\right)=2p(x),\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}+\frac{\cos\frac{\pi(x+1)}{2}}{\sin\frac{\pi(x+1)}{2}}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi x}{2}}-\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\right)=$$

$$= \pi 2 \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} =$$

$$= 2\pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2}\right)} = 2\pi \operatorname{cotg} \pi x =$$

$$= 2 f(x)$$

$$g_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

$$\frac{1}{\frac{x}{2}+n} + \frac{1}{\frac{x+1}{2}+n} = 2\left(\frac{1}{x+2n} + \frac{1}{x+2n+1}\right)$$

$$g_N\left(\frac{x}{2}\right) + g_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}$$

$$N \to \infty :$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2g(x) + 0$$

Mnoho škol se dnes snaží získat studenty za každou cenu. Při současném toku finančních prostředků je to pochopitelné. Výsledkem ale je, že některé školy šíří mýtus o tom, že vědomosti je u nich možné získat snadno, jakoby mimochodem, bez vynaložení sebemenší námahy. Jsem přesvědčen o tom, že je třeba být upřímný a přiznat, že učení, jako každý trénink, vyžaduje trpělivost, úsilí a občas může i "bolet".

HERGLOTZŮV TRIK:

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x) = \pi \operatorname{cotg} \pi x - \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right)$$

PLATÍ:

$$h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2h(x)$$

- h je spojitá v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
- h je periodická s periodou 1
- h je lichá
- h v okolí celočíselných hodnot jako v okolí nuly

2x l'Hospital $\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \left(\pi \operatorname{cotg} \pi x - \frac{1}{x} \right) = 0$$

a $$\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to 0(n)} h(x) = 0$$

5. krok: POLOŽÍME-LI (DODEFINUJEME)

$$h(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

POTOM $$h(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

h je periodická $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in [0,1]$

$$h(x_0) = m = \max_{x \in \mathbb{R}} h(x)$$

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m$$

$$\Rightarrow \quad h\left(\frac{x_0}{2}\right) = h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = m \quad !$$

POUŽIJEME ROVNICI PRO $\frac{x_0}{2}$:

$$h\left(\frac{x_0}{2^2}\right) + h\left(\frac{\frac{x_0}{2}+1}{2}\right) = 2m$$

$$\Longrightarrow \quad h\left(\frac{x_0}{2^2}\right) = m \quad !$$

POSTUPNÝMI ITERACEMI :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad h\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \quad !$$

h je spojitá v 0 $\Rightarrow$ $h(0) = m$

ZÁROVEŇ $h(0)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{m = 0}$

ODTUD : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \leqq 0$

h je lichá funkce $\Rightarrow h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x+n}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Nikdo se nestane závodním ani rekreačním hráčem tenisu, pokud bude jen sedět u televize a sledovat přímý přenos z Wimbledonu nebo jiného tenisového turnaje. Nikdo se nenaučí nahazovat, pokud bude jen sledovat zedníky při práci. A nikdo se nenaučí matematiku nebo jiný předmět, pokud se nenaučí zpaměti základní pravidla a poučky. Tak to vždy bylo, je a bude. Známé rčení:

"Bez práce nejsou koláče"

je hluboce pravdivé a platí nejen pro sport či fyzickou práci, ale i pro vzdělávací proces ve všech jeho formách a na všech jeho úrovních.

Děkuji za Vaši pozornost!

Děkuji za Vaši pozornost!