Komplexní čísla mám docela rád

RNDr. Dag Hrubý, Gymnasium Jevíčko, založeno 1897

edukátor transmisivní industriální školy, starý, empiricky protřelý praktik dávnoletého receptu

Gymnasium Velké Meziříčí, 25. srpen 2010

1. ÚT

2. ÚT

3. ÚT

Poznámky.
Jak jsem potkal pana Ornesta v lodenovém obleku.

Podívat se na úlohu č. 522, strana 31, z knihy:
Sommer, J., Hübner. V.: Maturitní otázky z mathematiky. Praha 1905.

Článek dr. Bohdana Kulíka z Loun: "Obecná rovnice kubická".
Rozhledy matematicko-přírodovědné. Ročník 19, 1940.

Článek Františka Hradeckého: "Užití komplexních čísel v geometrii".
Rozhledy matematicko-fyzikální. Ročník 48, 1969-70, str. 153, 207, 249.

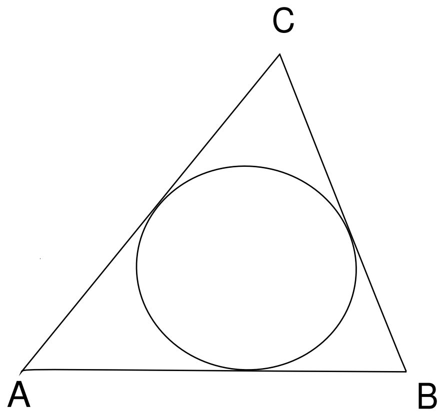
Matematika a fysika ve škole. Ročník 1., č. 1, JČMF, Praha 1948.
Kahuda, F.: Před novými úkoly. Strana 1.
Materna, M.: Matematka a filosofie. Strana 49.
Hruša, K.: Komplexní čísla a trigonometrie. Strana 175, 205.
Zemánek, B. F.: Traktoristický kroužek. Strana 111.

Fink, E.: Bytí, pravda, svět. OIKOYMENH, Praha 1996.

ABERO

Pozdrav matematiků

Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno a, b, ρ.



$$(a, b, \varrho) \longrightarrow (a, b, c)$$

$$c^3 - (a+b)c^2 - [(a-b)2 - 4\rho^2]c + [(a-b)2 + 4\rho^2](a+b) = 0$$

Konstruovatelná úsečka

Trisekce úhlu

Kvadratura kruhu

Reduplikace krychle

Sestrojte trojúhelník, je-li dáno (x, y, z).

$M(12) = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c\}$ $\quad \binom{12}{3} = 220$

$M(14) = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, v_a, v_b, v_c, t_a, t_b, t_c, \rho, r\}$ $\quad \binom{14}{3} = 364$

V daných úlohách máme na mysli euklidovské konstrukce, při kterých používáme přímého pravítka a kružítka. O pravítku se předpokládá, že má nekonečnou délku, jednu hranu a žadné značky pro měření.

Základní euklidovské konstrukce jsou:

a) Přenést danou úsečku na danou polopřímku.

b) Sestrojit daným bodem na danou přímku kolmici nebo sestrojit daným bodem k dané přímce rovnoběžku.

c) Převést daný konvexní úhel k dané polopřímce do dané poloroviny.

d) Rozdělit danou úsečku na n shodných dílů.

e) Sestrojit osu úsečky.

f) Sestrojit osu úhlu.

g) Sestrojit střed úsečky.

Pravidelný 17-úhelník lze sestrojit.

$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$

Kolik je

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

?

Nevím.

Moje kalkulačka CASIO *fx-180P:* *4,000000001*

Tak to zapiš!

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}&=x\\ a+b&=x\\ ab&=2\end{aligned}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$$\begin{aligned}20+14\sqrt{2}+6x+20-14\sqrt{2}&=x^3\\ x^3-6x-40&=0\end{aligned}$$

$f\colon y=x^3-6x-40$
$y'=3x^2-6,\ y''=6x \qquad y'=0\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2}$
$f(-\sqrt{2})=4\sqrt{2}-40,\ f(\sqrt{2})=-4\sqrt{2}-40$

Nyní budeme řešit rovnici

$$x^3-6x-40=0$$

$$\begin{gathered}x=u+v\\ (u+v)^3-6(u+v)-40=0\\ u^3+3uv(u+v)+v^3-6(u+v)-40=0\\ u^3+v^3=40 \qquad uv=2\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}u^3+\frac{8}{u^3}&=40\\ u^6-40u^3+8&=0\\ t^2-40t+8&=0\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}t=\frac{40\pm\sqrt{1568}}{2}=\frac{40\pm2\sqrt{392}}{2}=20\pm\sqrt{392}\\ u^3=20+\sqrt{392} \qquad v^3=20-\sqrt{392}\\ x=u+v=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\end{gathered}$$

$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10)$$

Rovnice $x^3 - 6x - 40 = 0$ má právě jeden reálný kořen $x = 4$
Zřejmě platí:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

V roce 1494 shrnul františkánský mnich Luca Paccioli v knize Summa de Arithmetica do té doby známé výsledky z aritmetiky, geometrie a trigonometrie. Kniha je zakončena poznámkou, že řešení rovnic

$$x^3 + mx = 0 \quad \text{a} \quad x^3 + n = mx$$

je za daného stavu matematiky nemožné. Tato poznámka dala impuls k podrobnějšímu zkoumání možnosti najít kořeny kubické rovnice. Při jejich hledání se totiž matematikové setkali s čísly, která dnes nazýváme imaginární. Zásluhu na tom mají italtští matematikové. Tím začíná historie komplexních čísel. Vyvrcholení tohoto slavného období jsou Caradanovy vzorce (G. Cardano, 1501-1576), které se pro rovnici

$$x^3 + px + q = 0$$

uvádějí v následujícím tvaru

$$x_1 = u + v \qquad x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v \qquad x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

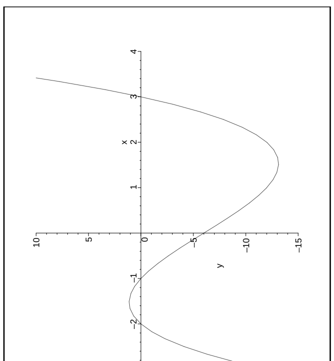
$$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} \quad 3uv + p = 0$$

Velkou nevýhodou těchto vzroců je, že v některých případech vyjadřují reálné kořeny pomocí čísel imaginárních. Tento případ znamenal nepřekonatelné těžkosti a byl nazván *casus irreducibilis.*

Příkladem je rovnice

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

$$x^3 - 7x - 6 = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$$



Metodou Ars Magna řešte rovnice:

$4x^2 + 1 = 8x$

$x^3 + 3x = 4$

$x^3 + 6x = 2$

$x^3 = 9x + 10$

$x^3 + 3x - 2i = 0$

$x^3 = 3x + 18$

Gajdeczka, J.: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. F. Tempsky, Wien 1891.

(Auflösung der quadratische Gleichungen mit Hilfe der goniometrischen Functionen.)

Řešení kvadratické rovnice $x^2 + px = q$ pomocí goniometrických funkcí.
Strana 139

$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \qquad x_2 = -\sqrt{q}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}} = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi} = \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$$

OBECNÁ ROVNICE KUBICKÁ

Dr. Bohdan Kulík, Louny

Rozhledy matematicko-přírodovědecké. Ročník 19 (1939/1940), číslo 1, strana 10, číslo 2, strana 44.

Řešení obecné rovnice 3. stupně pomocí odmocnin ueřejnil první Cardano v roce 1545 v díle "Hieronymi Cardani artis magnue sive de regulis algebraicis liber uns". Nalezl je však již roku 1515 Scipio del Ferro a o 20 let později Tartaglia. Dojdeme k němu nejkratšeji takto:
Obecnou kubickou rovnici

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \tag{1}$$

převeďmě transformací Tschirnhausenovou $x = y - \frac{a_1}{3}$ na jednodušší tvar, který píšeme stručně

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2}$$

Umělým obratem Huddeovým

$$y = u + v, \tag{3}$$

čímž si ponecháváme ještě možnost volby druhého vztahu mezi novými neznámými u, v, nabude rovnice tvaru

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{4}$$

Druhý vztah mezi u, v lze volit tak, že položíme

$$3uv = -p, \tag{5}$$

čímž dostaneme

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{6}$$

Se stejným oprávněním lze postupovat i naopak. Za splnění podmínek (5),(6) bude jistě rovnici (4) vyhověno.
Z (5), (6) ale také plyne

$$(u^3 - v^3)^2 = (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 = q^2 + \frac{4}{27}p^3$$

$$u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3} = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \tag{7}$$

Ze vztahů (6),(7) plyne

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Z těchto vzorců lze složit řešení

$$y = u + v,$$

a konečně

$$x = y - \frac{a_1}{3}.$$

*Ehrendfried Walter von Tschirnhausen (*1654 Horní Lužice - †1708 Drážďany), matematik a filosof. Kromě své činnosti filosofické (doporučoval spojení matematiky a fyziky se studiemi filosofickými) se zabýval i otázkami ryze technickými. Založil brusírnu zrcadel a skla, v níž se podařilo vybrousit kus váhy 80 kg a účastnil se se též na vynálezu výroby míšeňského porcelánu.*

*Jean Hudde (*1633 - †1704), též Hudenius. Významný nizozemský matematik. Říkával žertem, že dovede napsati rovnici křivky, znázorňující jakýkoliv profil.*

$$\boxed{4x^2 + 1 = 8x}$$

Kořen budeme hledat ve tvaru $x = u + \sqrt{v}$.
Po dosazení dostáváme:

$$4(u^2 + v) + 1 + 8u\sqrt{v} = 8u + 8\sqrt{v}$$

Z porovnání koeficientů u iracionálních členů plyne:

$$8u = 8, u = 1.$$

Po dosazení $u = 1$ je $v = \frac{3}{4}$ a dostáváme kořen $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tento postup použjeme pro řešení kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$x = u + v$

$$\begin{aligned}
a(u+v)^2 + b(u+v) + c &= 0 \\
au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c &= 0 \\
2auv + bu &= 0 \\
v &= -\frac{b}{2a} \\
au^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \\
au^2 &= \frac{b^2}{4a} - c \\
u^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
|u| &= \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} \\
x = u + v &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x^3 + 6x = 2}$$

$x = u + v$
$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 6(u+v) = 2$

$$u^3 + v^3 = 2 \quad uv = -2$$
$$u^3 - \frac{8}{u^3} = 2$$
$$u^6 - 2u^3 - 8 = 0$$
$$t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2) = 0$$

$$t = 4, t = -2 \qquad u^3 = 4, u^3 = -2 \qquad u = \sqrt[3]{4}, u = -\sqrt[3]{2}$$

$$v = -\frac{2}{u} = -\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = -\frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}} = -\sqrt[3]{2}$$
$$x = u + v = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

$$\boxed{x^3 = 9x + 10}$$

$$x = u + v \qquad u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 9(u+v) + 10$$

$$u^3 + v^3 = 10, uv = 3$$

$$u^3 = 5 \pm \sqrt{-2} \qquad v^3 = 5 \mp \sqrt{-2}$$

$$u = \sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} \qquad v = \sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}}$$

$$5 + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3 = (a^3 - 6ab^2) + (3a^2b - 2b^3)\sqrt{-2}$$

$$5 = a^3 - 6ab^2 \qquad 1 = 3a^2b - 2b^3 \qquad a = -1, b = 1$$

$$\sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} = -1 + \sqrt{-2} \qquad \sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}} = -1 - \sqrt{-2}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{5 + \sqrt{-2}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{-2}} = (-1 + \sqrt{-2}) + (-1 - \sqrt{-2}) = -2$$

$$\boxed{x^3 + 3x - 2i = 0}$$

Pokus

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 2i &= 0 \\ x(x^2 + 3) &= 2i \end{aligned}$$

Hornerovo schéma

	1	0	3	$-2i$
i	1	i	2	0
i	1	2i	0	

$$x^3 + 3x - 2i = (x - i)^2(x + 2i)$$

Ars magna

$$x = u + v \qquad u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 3(u + v) = 2i$$

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= 2i \\ uv &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3 - \frac{1}{u^3} &= 2i \\ u^6 - 2iu^3 - 1 &= 0 \\ z^2 - 2iz - 1 &= 0 \\ (z - i)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$u^3 = i, v^3 = i \Longrightarrow u = \sqrt[3]{i} = -i, v = \sqrt[3]{i} = -i$$

$$x_1 = u + v = -2i, \quad x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = i, \quad x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = i$$

$$\boxed{x^3 = 3x + 18}$$

$f\colon y = x^3 - 3x - 18$
$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1), \quad y'' = 6x$
$x_{max} = -1, f(-1) = -16, \quad x_{min} = 1, f(1) = -20$
$f(2) \cdot f(4) = (-16) \cdot 34 = -544 < 0$
Rovnice má právě jeden reálný kořen. Není těžké zjistit, že $x = 3$.
$x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6) = (x-3)(x + \frac{3 - i\sqrt{15}}{2})(x + \frac{3 + i\sqrt{15}}{2})$

Ars magna
$x = u + v$

$$\begin{aligned}
x^3 &= 3x + 18 \\
(u+v)^3 &= 3(u+v) + 18 \\
u^3 + v^3 + 3uv(u+v) &= 3(u+v) + 18 \\
u^3 + v^3 &= 18 \\
uv &= 1, v = \frac{1}{u} \\
u^3 + \frac{1}{u^3} &= 18 \\
u^6 - 18u^3 + 1 &= 0 \\
t^2 - 18t + 1 &= 0, t = u^3, D = 320 \\
t &= \frac{18 \pm \sqrt{320}}{2} = 9 \pm \sqrt{80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^3 = 9 + \sqrt{80}, v^3 = 18 - u^3 &= 9 - \sqrt{80} \\
u = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}, \qquad v &= \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \\
x = u + v = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}
\end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = ?$$

Bydžovský, B., Vojtěch, J.: Sbírka úloh z matematiky. JČMF, Praha 1924.

$$\sqrt{i} + \sqrt{-i} = ? \quad \sqrt{3 + 4i} + \sqrt{3 - 4i} = ? \quad \sqrt{1 - i} - \sqrt{1 + i} = ?$$

$$\sqrt{a + bi} + \sqrt{a - bi} = ?$$

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$\sin x = x - \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \cdots$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$z = |z| e^{ix}$$

$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\forall n \in N\colon 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Pro která $a \in R$ platí:

$$\forall x \in R\colon a^x \geq 1 + x$$

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi}$$

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Transformace v Gaussově rovině (G)

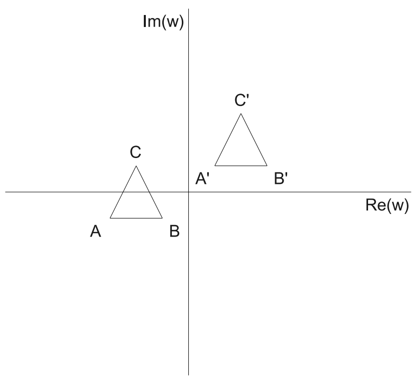
TRANSLACE (posunutí)

$$\boxed{w = z + a} \quad a \in C, a \neq 0$$

Zobrazení přiřazuje každému bodu $z \in G$ bod $z + a$.
Směr posunutí je $Arg(a)$ a velikost posunutí je $|a|$.

Úloha.

V translaci $w = z + 4 + 3i$ zobrazte trojúhelník ABC, jsou-li vrcholy A, B, C obrazy komplexních čísel $a = -3 - 2i, b = -1 - 2i, c = -2 + i$.



$a' = 4 + 3i - 3 - 2i = 1 + i$
$b' = 4 + 3i - 1 - 2i = 3 + i$
$c' = 4 + 3i - 2 + \ \ i = 2 + 4i$

HOMOTETIE (stejnolehlost)
Zobrazení

$$\boxed{w = kz} \quad k \in \mathbb{R}, k \neq 0, k \neq 1$$

přiřazuje každému bodu $z \in G, z \neq 0$ bod kz, který leží na přímce Oz.

ROTACE (otočení) kolem počátku
Buď ε komplexní jednotka $\varepsilon = \cos\varphi + i\sin\varphi$.
Zobrazení

$$\boxed{w = \varepsilon z}$$

přiřazuje každému bodu $z = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)$ bod

$$w = (\cos\varphi + i\sin\varphi)|z|(\cos\psi + i\sin\psi)$$
$$w = |z|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$$

Bod w má od počátku stejnou vzdálenost jako z, protože je $|w| = |z|$ a jeho argument je $Arg(w) = \varphi + \psi$.
Přitom se bod z otočí kolem počátku v kladném smyslu (proti směru pohybu hodinových ručiček), jeli $\varphi > 0$ a v záporném smyslu (ve směru pohybu hodinových ručiček), jeli $\varphi < 0$.

ROTACE (otočení) kolem bodu z_0 bod w
Buď ε komplexní jednotka $\varepsilon = \cos\varphi + i\sin\varphi$ a bod $z_0 \in \mathbb{G}$
Zobrazení

$$\boxed{w = z_0 + \varepsilon(z - z_0)}$$

přiřazuje každému bodu $z \in \mathbb{G}$ bod $w = z_0 + (cos\varphi + i\sin\varphi)(z - z_0)$
Často se také používá vyjádření

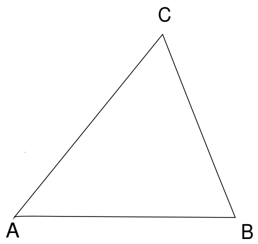
$$w = \varepsilon z + (1 - \varepsilon)z_0$$

Úloha.
Body A, B, C jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku, právě když jim odpovídající komplexní čísla a, b, c splňují rovnost

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

Dokažte.

Řešení:



Označme $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. Bod C dostaneme z B otočením o $\frac{\pi}{3}$ okolo bodu A, bod B dostaneme z A otočením o $\frac{\pi}{3}$ okolo bodu C.

$$c = a + (b-a)\varepsilon \Rightarrow a - c = (a-b)\varepsilon$$

$$b = c + (a-c)\varepsilon \Rightarrow b - c = (a-b)\varepsilon^2$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = (a-b)^2 + (a-b)^2\varepsilon^4 + (b-a)^2\varepsilon^2$$

$$(a-b)^2 + (a-b)^2\varepsilon^4 + (b-a)^2\varepsilon^2 = (a-b)^2(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)$$

$$1+\varepsilon^2+\varepsilon^4 = 1 + \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} + \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3} = 0$$

SYMETRIE (souměrnost) podle reálné osy
Zobrazení

$$\boxed{w = \overline{z}}$$

přiřazuje každému bodu $z \in \mathbb{G}$ bod souměrně sdružený.
Protože $Re(z) = Re(\overline{z}), Im(z) = -Im(\overline{z})$, jsou body $z, \overline{z}$ souměrné podle reálné osy.

KRUHOVÁ INVERZE

Kruhovou inverzí rozumíme transformaci

$$\boxed{w = \frac{1}{\overline{z}}}$$

Kruhovou inverzi lze psát ve tvaru

$$w = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{z}{z\overline{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

To znamená, že bod w leží na polopřímce Oz.
Je-li $z = x + yi$, pak

$$w = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x - yi} = \frac{x + yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

Úloha.
Vrcholy trojúhelníku ABC jsou obrazy čísel a, b, c
v Gaussově rovině. Sestrojte obraz trojúhelníku v zobrazení:
a) $w = z + 1 + i$ b) $w = 2z$ c) $w = zi$ d) $w = \overline{z}$
je-li dáno $a = -2 + i, b = 1 - 2i, c = 3 + 2i$.

Úloha.
V kruhové inverzi zobrazte kruh $K = \{z \in \mathbb{G}\colon |z - 3| < 2\}$.
Řešení:
Rovnici kružnice $|z - 3| = 2$ napíšeme ve tvaru

$$(z - 3)(\overline{z} - 3) = 4.$$

Kruh K je dán nerovnicí

$$z\overline{z} - 3(z + \overline{z}) + 5 \leq 0$$

Po dosazení $w = \frac{1}{\overline{z}}$, resp. $z = \frac{1}{\overline{w}}$ obdržíme

$$5w\overline{w} - 3(w + \overline{w}) + 1 \leq 0$$

$$\left| w - \frac{3}{5} \right| \leq \frac{2}{5}$$

Množiny bodů v Gaussově rovině
Jsou-li u, v komplexní čísla, pak výraz

$$|u - v|$$

určuje vzdálenost obrazů komplexních čísel u, v v Gaussově rovině.
Položíme-li
$u = u_1 + u_2 i, v = v_1 + v_2 i$ dostaneme

$$|u - v| = |(u_1 + u_2 i) - (v_1 + v_2 i)| = |(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2 i)| =$$

$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Úloha.
V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z,
pro která platí:
a) $|z| = 1$
b) $|z - 3| = 2$
c) $|z - (2 + 2i)| = 1$
d) $1 \leq |z| \leq 2$

Úloha.
V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z,
pro která platí:
a) $|z| = |z - 1|$
b) $|z| \geq |z - 1|$
c) $|z - 2 - i| = |z - 4 + i|$
d) $|z - 2 - i| \leq |z - 4 + i|$

Úloha.
V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z,
pro která platí:
a) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ $\qquad |z - 1| + |z + 1| = 4$
b) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a, 0 < a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$
c) $|z - z_1| = |Re(z)|$ $\qquad |z - 1| = |Re(z)|$
d) $|\frac{\pi}{2} + Arg(z)| < \frac{\pi}{6}$

Úloha.

V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro která platí:

$$|z-1|+|z+1|=4$$

Řešení 1:

Položme $z=x+yi$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= 4\\
\sqrt{(x-1)^2+y^2} &= 4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}\\
(x-1)^2+y^2 &= 16-8\sqrt{(x+1)^2+1}+(x+1)^2+y^2\\
8\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= 16+4x\\
2\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= 4+x\\
4(x+1)^2+4y^2 &= 16+8x+x^2\\
3x^2+4y^2 &= 12\\
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3} &= 1
\end{aligned}$$

Řešení 2:

Uvažme, že $|z|^2=x^2+y^2=(x+yi)(x-yi)=z\overline{z}$

$$\begin{aligned}
|z-1| &= 4-|z+1|\\
(z-1)(\overline{z}-1) &= 16-8|z+1|+(z+1)(\overline{z}+1)\\
4|z+1| &= 8+(z+\overline{z})\\
2\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= 4+x\\
3x^2+4y^2 &= 12\\
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3} &= 1
\end{aligned}$$

Úloha.
Jaké největší hodnoty může dosáhnout absolutní hodnota komplexního čísla z, pro které platí:

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1?$$

Řešení:
Položíme $z=|z|(cos\varphi+i\sin\varphi)$ a označíme $|z|^2=t$.
Potom platí

$$z^2=t(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=\frac{|z^2+1|^2}{|z|^2}=\frac{(1+t\cos 2\varphi)^2+(t\sin 2\varphi)^2}{t}$$

$$t\cdot\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=1+2t\cos 2\varphi+t^2\cos^2 2\varphi+t^2\sin^2 2\varphi$$

za podmínky

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|=1$$

dostáváme

$$t^2+(2\cos 2\varphi-1)t+1=0$$

$$t=\frac{1-2\cos 2\varphi\pm\sqrt{(1-2\cos 2\varphi)^2-4}}{2}$$

Největší t bude, když $\cos 2\varphi=-1$, tedy $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Pak je

$$t=\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\qquad |z|=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

Úloha.
Mezi komplexními čísly z, která vyhovují nerovnici

$$|z-25i|\leq 15$$

najděte takové, které má $Arg(z)$ nejmenší.

Úloha.

Vypočtěte obsah trojúhelníku ABC, jsou-li vrcholy A, B, C obrazy komplexních čísel $a = 1 - i, b = 2 + 2i, c = -1 + i$.

Řešení:

Pro obsah trojúhelníku platí

$$S(T) = |S|, \quad S = \frac{1}{4i}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 1 \\ 2+2i & 2-2i & 1 \\ -1+i & -1-i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1-i & 1+i \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16i$$

$$S = \frac{1}{4i}\Delta = \frac{1}{4i}(-16i) = -4$$

$$S(T) = |S| = |-4| = 4$$

Komplexní souřadnice

Nechť $\mathbb{E}^2$ značí Euklidovu rovinu a $\mathbb{G}$ Gaussovu rovinu. V $\mathbb{E}^2$ je bod určen uspořádanou dvojici $[x, y]$ reálných čísel, v $\mathbb{G}$ lze bod vyjádřit číslem $z = x + yi$. Je-li

$$z = x + yi \qquad \overline{z} = x - yi$$

pak

$$z + \overline{z} = 2x \qquad z - \overline{z} = 2yi$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})}$$

Tyto rovnice představují transformaci do komplexních souřadnic. Je-li

$$F(x, y) = 0$$

rovnice popisující nějakou množinu M bodů v $\mathbb{E}^2$, obdržíme transformací do komplexních souřadnic rovnici

$$F\left(\frac{1}{2}(z + \overline{z}), \frac{1}{2i}(z - \overline{z})\right) = 0,$$

která popisuje množinu M v $\mathbb{G}$.

Úloha.

Přímku o rovnici $x + y + 1 = 0$ vyjádřete rovnicí v komplexních souřadnicích.

Řešení:

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ \frac{1}{2}(z + \overline{z}) + \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) + 1 &= 0 \\ z + \overline{z} - iz + i\overline{z} + 2 &= 0 \\ (1 - i)z + (1 + i)\overline{z} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Poznámka.

$|z + 1 + i| = |z|$

$(z + 1 + i)(\overline{z} + 1 - i) = z\overline{z}$

$z\overline{z} + (1 + i)\overline{z} + (1 - i)z + 2 = z\overline{z}$

$(1 - i)z + (1 + i)\overline{z} + 2 = 0$

Úloha.
Přímku o rovnici $ax + by + c = 0$ vyjádřete rovnicí v komplexních souřadnicích.
Řešení:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ \frac{1}{2}a(z+\overline{z}) + \frac{1}{2i}b(z-\overline{z}) + c &= 0 \\ az + a\overline{z} - biz + bi\overline{z} + 2c &= 0 \\ (a-bi)z + (a+bi)\overline{z} + 2c &= 0 \end{aligned}$$

Položíme-li

$$a + bi = \alpha \qquad 2c = \beta$$

dostáváme obecnou rovnici přímky v komplexníxh souřadnicích

$$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$$

Úloha.
V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z,
pro která platí:

$$z(\overline{b} - \overline{a}) + \overline{z}(b - a) = b\overline{b} - a\overline{a}$$

Úloha.
Nechť $a, b \in C, a \neq b$. Určete rovnici přímky, která je určena body a, b.
Řešení:

$$\frac{z-a}{b-a} = t$$

Vzhledem k

$$t \in R \Leftrightarrow t = \overline{t}$$

$$\frac{z-a}{b-a} = \overline{\frac{z-a}{b-a}} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$$

$$(z-a)(\overline{b}-\overline{a}) = (\overline{z}-\overline{a})(b-a)$$

$$z\overline{b} - a\overline{b} - z\overline{a} + a\overline{a} = \overline{z}b - \overline{a}b - \overline{z}a + a\overline{a}$$

$$(\overline{b}-\overline{a})z - (b-a)\overline{z} = a\overline{b} - \overline{a}b$$

Množina uspořádaných dvojic reálných čísel

Rovnost dvojic

$$(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a = c \wedge b = d$$

SČÍTÁNÍ DVOJIC

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+b, c+d)$$

Neutrální prvek

$$(a,b) \oplus (x,y) = (a,b) \qquad (x,y) = (0,0)$$

$$(a,b) \oplus (x,y) = (a+x, b+y)$$

$$a + x = a \wedge b + y = b \Longrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

Inverzní prvek

$$(a,b) \oplus (x,y) = (0,0) \qquad (x,y) = (-a,-b)$$

$$(a,b) \oplus (x,y) = (a+x, b+y)$$

$$a + x = 0 \wedge b + y = 0 \Longrightarrow x = -a \wedge y = -b$$

NÁSOBENÍ DVOJIC

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Neutrální prvek

$$(a,b) \odot (x,y) = (a,b) \qquad (x,y) = (1,0)$$

$$(a,b) \odot (x,y) = (ax - by, ay + bx)$$

$$ax - by = a \wedge ay + bx = b \Longrightarrow x = 1 \wedge y = 0$$

Inverzní prvek

$$(a,b) \odot (x,y) = (1,0)$$

$$(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right), (x,y) \neq (0,0)$$

$$(a,b) \odot (x,y) = (ax - by, ay + bx)$$

$$ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0$$

$$x = \frac{x}{x^2+y^2} \wedge y = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

Úloha.

V množině $R \times R$ řešte rovnice:

a) $(2,-3) \oplus (x,y) = (4,2)$ b) $(2,3) \odot (x,y) = (8,-6)$

Množina uspořádaných dvojic reálných čísel typu $(a, 0)$
Rovnost dvojic

$$(a, 0) = (b, 0) \Longleftrightarrow a = b$$

SČÍTÁNÍ DVOJIC

$$(a, 0) \oplus (b, 0) = (a + b, 0)$$

NÁSOBENÍ DVOJIC

$$(a, 0) \odot (b, 0) = (ab, 0)$$

Nechť je dána množina $S = \{(a, 0), a \in R\}$, $S \subset C, C = R \times R$
Uvažujme zobrazení

$$f : R \longrightarrow S, f(x) = (x, 0)$$

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y)$$

Zobrazení f je prosté a zachovává obě operace sčítání a násobení.
Můžeme tak ztotožnit každé $x \in R$ s komplexním číslem $(x, 0) \in C$.
Přesněji řečeno, zobrazení f je izomorfismus $\langle R, +, \cdot \rangle$ na $\langle S, +, \cdot \rangle$.
Z toho plyne, že $\langle R, +, \cdot \rangle$ lze izomorfně vnořit do $\langle C, +, \cdot \rangle$.
V tomto smyslu lze tedy psáti $R \subset C$.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$$

Úloha.
Pro která $n \in N$ platí

$$(1+i)^n = \overline{(1+i)^n}\,?$$

Řešení:
Zřejmě platí

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in R.$$

Vzledem k

$$1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

je

$$z = (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$$

$$z \in R \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow n = 4k$$

Úloha.
Jsou dána komplexní čísla $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $v = \cos\psi + i\sin\psi$.
Určete $|u-v|$ a $Arg(u-v)$.
Řešení:

$$u - v = (\cos\varphi - \cos\psi) + i(\sin\varphi - \sin\psi), \varphi > \psi$$

$$|u-v| = \sqrt{(\cos\varphi - \cos\psi)^2 + (\sin\varphi - \sin\psi)^2}$$

$$|u-v| = \sqrt{2 - 2(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi)}$$

$$|u-v| = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\varphi-\psi)}$$

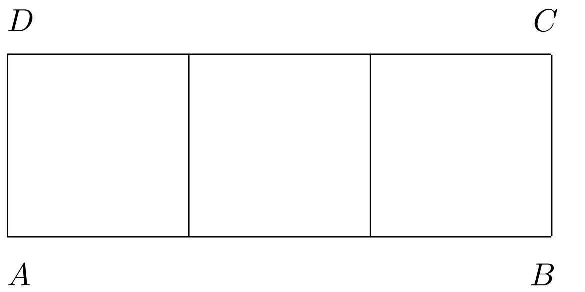
$$|u-v| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$$

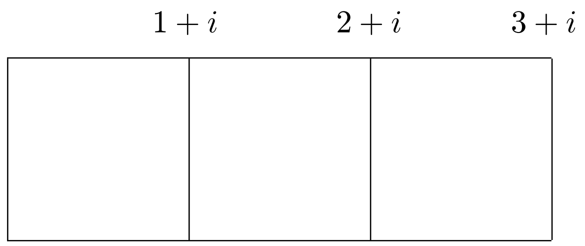
$$\cos\vartheta = \frac{\cos\varphi - \cos\psi}{2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|} \qquad \sin\vartheta = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{2\left|\sin\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|} \qquad \vartheta = Arg(u-v)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = \frac{2\sin(\frac{\varphi-\psi}{2})\cos(\frac{\varphi+\psi}{2})}{-2\sin(\frac{\varphi+\psi}{2})\sin(\frac{\varphi-\psi}{2})} = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{cotg}\left(-\frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi+\psi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi+\psi}{2}\right)$$

$$\vartheta = \frac{\pi+\varphi+\psi}{2}$$


D
C
A
B


$1+i$
$2+i$
$3+i$