Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF
Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM

MATEMATIKA, FYZIKA A VZDĚLÁVÁNÍ

Sborník

z XI. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky
Editoři: A. Trojánek, J. Novotný, D. Hrubý
Jevíčko, srpen 2002

VELKÉ MEZIŘÍČÍ
2004

ISBN 80-214-2601-2 (VUTIUM)

Předmluva

Předkládáme čtenářům sborník z XI. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky, který se konal ve dnech 19. – 22. srpna 2002 v Jevíčku. Jsou v něm zařazeny texty všech přednášek, které byly na semináři předneseny. Navíc je zde otištěn článek V. Roskovce Antinomie vzdělávání. Protože několik článků pojednává o vzdělávání či o školství, zvolili jsme podtitul sborníku „Matematika, fyzika a vzdělávání“. Na závěr jsme připojili přehled populárně vědecké matematické a fyzikální literatury, která vyšla česky nebo slovensky v poslední době.

Sborník vychází ve spolupráci s VUT v Brně – nakladatelstvím VUTIUM. Lze snad oprávněně předpokládat, že tím začíná dlouhodobější spolupráce s tímto význačným nakladatelstvím.

Snahou editorů bylo předložit svébytnou publikaci, ve které mohou najít zajímavé a poučné články nejen účastníci semináře, ale i další zájemci, zejména z řad učitelů matematiky a fyziky. Ať vám alespoň některé texty přinesou nové informace, inspiraci a radost z poznání.

Děkuji autorům příspěvků a všem dalším spolupracovníkům, kteří se podíleli na vzniku sborníku. Zvláštní poděkování patří Mgr. Renatě Chytkové za obětavé zhotovení sazby a představitelům dále uvedených firem, které finančně podpořily jeho vydání.

Aleš Trojánek

Velké Meziříčí, duben 2004

BDS
Bítešská dopravní společnost, s. r. o.
`www.bds-vb.cz`

TDS Brno
`www.tdsbrnosms.cz`

Gremis Velké Meziříčí
stavební a obchodní společnost s. r. o.
`www.gremis.cz`

Falco computer s. r. o.
`www.falcocomputer.cz`

Obsah

OTAZNÍKY NAD VZDĚLÁVÁNÍM

Dag Hrubý

V první části příspěvku je podána stručná informace o teoriích vzdělávání podle knihy *Soudobé teorie vzdělávání* od profesora university v Montrealu Y. Bertranda [B]. Druhá část se týká stručného přehledu historie gymnaziálního školství na našem území v letech 1848 – 1989.[1]

Teorie vzdělávání

Od poloviny sedmdesátých let 20. století se vyskytují pochybnosti o vzdělávání, jsou pokládány otázky, co vlastně představuje základ vzdělávání, různé národní výzkumné komise analyzovaly a analyzují slabiny školských systémů a navrhují radikální změny, které by měly být provedeny ve vzdělávacích programech (Francie, USA, Japonsko, Kanada). Nezaměstnanost, drogy, sociální napětí, násilí na ulicích i násilí v masmediích, rasová nesnášenlivost, znečištění ovzduší a vody, rostoucí množství odpadů, náboženský fundamentalismus, nenávistný nacionalismus, násilí vůči menšinám a přistěhovalcům, kteří připravují o zaměstnání „ty, kdož se v zemi narodili“ – to vše představuje závažné sociální, politické, ekonomické a ekologické problémy.

Je udivujícím sociálním paradoxem, že globální rozšíření komunikačních prostředků, vývoz západních modelů technologického pokroku a svobodného podnikání, industrializace většiny zemí, „otevření“ trhů

[1] Redakční poznámka: O historii našeho školství pojednávají např. tyto publikace:

- Potůček J.: Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 – 1945, 1. díl (1992), 2. díl (1993). Ediční středisko ZČU, Plzeň.
- Morkes F.: Kapitoly o školství, o ministerstvu a jeho představitelích. (Období let 1848 – 2001.) Pedagogické muzeum J. A. Komenského v Praze, Praha 2002.
- Morkes F.: Historický přehled maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí. ÚIV – CERMAT, Praha 2003.

a zmnohonásobení vztahů mezi zeměmi vedlo k rostoucímu napětí ve vzájemných vztazích, kde nikdo nechce nikomu v ničem ustoupit. Je překvapivé, že otevřenost, která byla umožněna pokrokem, plodí svůj pravý opak, tendence k sociální, kulturní a etnické uzavřenosti; každá národní či sociální jednotka věnuje velký díl energie na ochranu své sociální, ekonomické, náboženské a kulturní identity; všechna prohlášení o volné výměně zboží a informací jsou doprovázena přísnějšími zákony v oblasti přistěhovalectví. Jinak řečeno je v současnosti vytvářena jakási „společenská síť" složená ze vztahů mezi jednotlivými entitami (národy, zeměmi, etnickými společenstvími, náboženskými společenstvími), které spolu zápasí v atmosféře neustále rostoucí soutěživosti. O roli vzdělávání ve společnosti musíme uvažovat právě v souvislostech s tímto více než problematickým vývojem. Společnost se potýká s významnými problémy, a proto musí po svých různých institucích požadovat, aby přispívaly k řešení těchto problémů. Škola si nemůže dovolit zaujmout pozici mrtvého brouka nebo si s pedagogickou reformou jen pohrávat, aby vytvořila iluzi změny. Profesor Y. Bertrand ve své knize [B] udává následující klasifikaci teorií vzdělávání.

Spiritualistické teorie – nazývané také metafyzické nebo transcendentální teorie. Adepti těchto teorií se zajímají o vztah mezi lidským já a univerzem, a to z metafyzického pohledu. Jako dominantní zdroje tohoto vzdělávacího proudu se často uvádějí zen-budhismus a taoismus. Člověk se musí naučit osvobozovat se od viditelného světa a překračovat sama sebe.

Personalistické teorie – jsou nazývány také humanistické, nedirektivní, organické, svobodné nebo otevřené. Opírají se o pojem lidského já a o pojmy svobody a autonomie osoby. Pánem svého vzdělávání musí být sama osoba, která se nachází v procesu učení, to ona musí řídit své vzdělávání a užívat přitom své vnitřní energie. Úkolem učitele ve vztahu k žákům je usnadňovat učení. Neustálou snahou má být vedení dítěte k seberealizaci.

Kognitivně psychologické teorie studují u žáků rozvoj takových kognitivních procesů, jako jsou usuzování, analýza, řešení problémů, vytváření reprezentací, prekonceptů, mentálních obrazů atd. Tyto teorie se více zajímají o duševní procesy, základy těchto teorií lze hledat ve výzkumech kognitivní psychologie, které se týkají různých aspektů učení. Učitel musí počítat s procesy učení a s dosavadními poznatky učícího se jedince. Je obzvláště nutné objevit, jaké jsou poznatky, které má žák, jaké jsou jeho modely, reprezentace, způsoby zpracování informace, je-li chápání naivní či spontánní.

Technologické teorie zdůrazňují zdokonalení předávání informací použitím vhodných technologií. Slovu „technologie" zde musíme dát velmi široký význam. Poslední tendence směřují k multimediím, k hypertextu, k interaktivním programům atd. Cílem je například vytvoření multimediálního prostředí, využívajícího pojmy a nástroje umělé inteligence, simulace scén ze skutečného života. Na počátku byly ovlivněny teorií systémů a kybernetikou. Učitelé ztrácejí kontrolu nad vzdělávacím procesem a předávají ji jiným osobám, kterými jsou technologové vzdělávání, specialisté na média, teoretikové informatiky, pedagogičtí poradci, experti na teorii systémů, tvůrci taxonomií, autoři didaktických testů, kognitivní a konstruktivističtí psychologové atd. Armáda specialistů se vrhla na vzdělávací akt a naložila s ním ... způsobem typickým pro specialisty. Učitel se náhle ocitá uprostřed procesu, který nemůže kontrolovat, protože je řízený jinými specialisty.

Sociokognitivní teorie zdůrazňují význam kulturních a sociálních faktorů při výstavbě poznatků, jde tedy o sociální a kulturní interakce, které utvářejí podobu pedagogiky a didaktiky, velký důraz je kladen na sociální a kulturní kontext poznání. Pochybují o oprávněnosti dominantního postavení kognitivistického proudu v pedagogickém výzkumu a upozorňují na přehnaný psychologický pohled na vzdělávání. Tento proud je silný ve Francii a USA.

Sociální teorie se opírají o princip, že vzdělání má umožnit řešení problémů sociálních a kulturních i problémů životního prostředí. Hlavním posláním vzdělávání je příprava žáků na řešení těchto problémů. Hlavní témata jsou sociální a kulturní nerovnost, sociální a kulturní dědičnost, různé formy segregace, elitářství, problémy životního prostředí, negativní vliv technologií a industrializace, degradace života na planetě Zemi.

Akademické teorie soustřeďují svou pozornost na předávání obecných poznatků. Obvykle jsou v opozici proti příliš velkému vlivu specializovaného vzdělávání. Akademický proud je rozdělen na dvě skupiny myslitelů: tradicionalisty a generalisty. Tradicionalisté chtějí, aby byly předávány klasické a na jednotlivých kulturách či současných sociálních strukturách nezávislé obsahy. Generalisté kladou důraz na obecné vzdělání a středem jejich zájmu je kritické myšlení, schopnost adaptace, otevřenost ducha apod. V obou případech je úkolem vyučujícího předávání daných obsahů a úkolem žáka je jejich asimilace. Akademické teorie počítají s učitelovým výkladem těch poznatků, které tvoří jádro všeobecného vzdělání. Často také zdůrazňují, že je neustále nutno směřovat k vysoké kvalitě a že ve studiu i v práci je nutno vyvinout maximální úsilí. Předávají se tak zároveň hodnoty jako disciplína, vytrvalá práce, úcta k tradici a demokratickým zásadám a také smysl pro občanskou zodpovědnost.

Akademické teorie definují takové charakteristiky obecného vzdělání, jež mají žákovi umožnit, aby se stal široce kultivovaným člověkem. Zastánci akademických teorií vycházejí z přesvědčení o nedostatečné kulturnosti studentů, která plyne z nevyhovujícího obecného vzdělání a často rovněž z předčasné specializace učiva předmětů vyučovaných na vysoké škole.

Podle Y. Bertranda je nejlepší taková teorie, která u žáka podporuje získání znalostí založených na pochopení ekologických, sociálních a kulturních problémů. Úkolem dnešních žáků bude proměnit společnost z hlediska jiných hodnot, než je soutěživost, segregace, rasismus atd. Aby toho mohli dosáhnout, budou potřebovat vzdělání, které jim umožní vyřešit jejich vlastní sociální, ekologické, kulturní a politické problémy. Toto nazývá ekosociální kompetencí. Vzdělávání musí spočívat v „nových“ vzdělávacích strategiích, které budou přiměřenější globálnímu řešení problémů naší planety. Teorie vzdělání musí ve svém kurikulu obsahovat studium multikulturních vztahů, pozitivních a negativních dosahů ekonomického vývoje, ekologie a principů demokracie. Vzdělávání musí sloužit k objevování nové budoucnosti pro naši planetu.

Dvacáté století je charakteristické jednak informační explozí, a jednak naprostým nepochopením smyslu skutečnosti. Lidé žijící v minulých stoletích měli k dispozici méně poznatků, ale více interpretačních schémat. Dnes je tomu jinak, rychlý vývoj poznání stále více znesnadňuje pohled na celek. Hlavní slovo mají jednotlivé specializace. Významného španělského filosofa Ortegu y Gasseta to vedlo k prohlášení, že dnešní profesionálové, inženýři, advokáti a vědci jsou vycvičení, ale nekultivovaní barbaři.

Během šedesátých let odsunuly klasickou kulturu na druhé místo dva současně působící vlivy – proměna kultury působením masmedií a různé pokusy o demokratizaci vzdělávání. Věda, technologie a média měly významný vliv na vývoj kultury a na kurikulum. Osmdesátá a devadesátá léta znamenají v Severní Americe návrat tradicionalistických a generalistických teorií vzdělávání oblíbených v 50. letech. Objevují se přání vrátit se k soutěživosti, k podpoře vynikajících jedinců a k posílení soukromé iniciativy ve školství. V současnosti znovu probíhají stejné debaty o zhoubných účincích demokratizace vzdělávání a o ochuzení vzdělávání těch nejlepších. Opakovaně vyjadřovaná touha vrátit se ke klasickému akademickému vzdělávání spočívá velmi často v tom, že kvalita a vynikající výsledky alespoň části populace jdou na úkor demokratizace vzdělávání. Lebel (1966): „Dejme si pozor, abychom nezpřístupnili nejvyšší vzdělání všem bez rozdílu; učiňme je spíše přístupným těm, kteří k němu mají schopnosti, to znamená těm, kteří mohou, a těm, kteří chtějí, lidem nadaným a ke studiu ochotným. Jen takoví a žádní jiní se mohou věnovat studiu humanitních předmětů a výzkumu. Demokratizace výuky musí přispět k vytvoření silné intelektuální a morální aristokracie, jinak nebude ani elity, ani demokracie“.

Podle některých autorů (Joly 1982, Bloom 1990, Morin a Brunet 1992) dochází ke snížení kvality vzdělání, ke snížení kvality přípravy mladých lidí. Tato situace zneklidňuje školské úřady, rodiče, pedagogický výzkum. Vytváříme demokracii vycvičených ignorantů, lidé už neumějí napsat několik vět, které by dávaly smysl, lidé už nečtou, ke zkouškám se dostavuje mnoho průměrných kandidátů. Je to úpadek civilizace a kultury.

Historické mezníky našeho školství

1849 Exnerův – Bonitzův „Nástin organizace gymnázií a reálek“

Nástin se stal základním právním dokumentem ovlivňujícím rozvoj a existenci gymnázií a reálek na dlouhou dobu. Gymnázia byla osmiletá a reálky šestileté. Maturitní zkoušky byly zavedeny původně jen na gymnáziích.

1869 Zákon o obecném školství

Zákon stanovil povinnou osmiletou školní docházku. Moravský sněm jej schválil v roce 1869, český sněm v roce 1874. Tento zákon zdůraznil všeobecně vzdělávací charakter reálek se zřetelem k matematicko-přírodovědným disciplínám. Reálky byly rozšířeny na sedm tříd a výuka na nich byla doplněna o deskriptivní geometrii. Zavedením maturity na reálkách byly reálky zrovnoprávněny s gymnázii. Byly též zřízeny čtyřleté učitelské ústavy ukončené maturitou.

1878 Maturita pro dívky

Maturitní zkouška byla umožněna i dívkám, externím kandidátkám a privatistkám na chlapeckých gymnáziích.

1908 – 1910 Marchetova reforma

Marchetova reforma byla poslední úpravou středního školství v habsburské monarchii. Na základě ankety organizované ministerstvem mezi odbornou veřejností byla provedena úprava maturitních zkoušek. Změna pojetí zkoušek spočívala v tom, že na rozdíl od dosavadního stavu, kdy se u ní zjišťovaly vědomosti potřebné pro vysokoškolské studium, nově koncipovaná maturitní zkouška měla prokázat vzdělání plynoucí z předchozího studia. Došlo též ke zrovnoprávnění maturitní zkoušky na gymnáziích, reálkách, reálných gymnáziích a na reformních reálných gymnáziích.

1918 Zákon z 28. října 1918

Zákonem bylo stanoveno, že zůstávají v platnosti veškeré dosavadní rakouské zákony a nařízení.

1919 Návrhy JČMF na reformu středních škol

Jedná se o komplexní návrh obsahové i formální reformy školství, který se stal základem pro další práci organizovanou již ministerstvem školství.

20. a 30. léta 20. století

Reformní snahy a drobné změny hodinových dotací na jednotlivých školách i změny obsahu maturit.

1948 Školský zákon z roku 1948

Zákon zavedl jednotné základní devítileté vzdělání pro veškerou mládež od šesti do patnácti let, na které pak navazovalo čtyřleté gymnázium. Začíná ideologizace a sovětizace školství, . . .

1951 Zřízení státních kurzů pro přípravu pracujících

1953 Reforma z roku 1953

Byla zrušena gymnázia. Reforma chtěla zajistit pro většinu mládeže úplné jedenáctileté střední vzdělání. Prakticky většina mládeže navštěvovala jenom osmiletou školu od šesti do čtrnácti let. Pro vysoké školy a některá povolání připravovala Jedenáctiletá střední škola, JSŠ. Proti cyklickým osnovám byly vyzvedávány osnovy lineární.

1960 Školský zákon z roku 1960

Školský zákon zavádí opět devítiletou školní docházku a JSŠ je nahrazena tříletou Střední všeobecně vzdělávací školou (SVVŠ).

1968 Zákon o gymnáziích

Střední všeobecně vzdělávací škola byla rozšířena na školu čtyřletou a byl jí vrácen název gymnázium. Učební plány gymnázia navazovaly na domácí tradici a na zahraniční trendy. Projekt předpokládal zavedení osmiletých gymnázií. Gymnázia se dělila na přírodovědné a humanitní větve, byly zaváděny volitelné a nepovinné předměty.

1. polovina 70. let 20. století

Měnila se kritéria pro přijímání uchazečů ke studiu (byla zavedena tzv. komplexní hodnocení ze ZŠ a byl brán zřetel k třídnímu původu,. . .).

Byly zavedeny internátní střední školy pro pracující (jednoleté!) jako školy gymnaziálního typu. (Vážně poškodily dobrou pověst gymnaziálního vzdělávání.) Podobný charakter a úroveň měly dvouleté kurzy pro příslušníky SNB a vojáky vojsk MV.

1976 Další rozvoj československé vzdělávací soustavy

Tímto dokumentem byla opět zkrácena základní škola na osmiletou. Všeobecná docházka byla prodloužena na deset let. Gymnázium bylo definováno jako všeobecně vzdělávací polytechnická škola připravující především k vysokoškolskému studiu a pro taková povolání a funkce, v jejichž kvalifikačních předpokladech se výrazně uplatňuje přiměřené zvládnutí všeobecného společenskovědního, matematicko přírodovědného a filologického vzdělání. Střední školy se členily na: střední odborná učiliště, gymnázia, střední odborné školy a konzervatoře. Na některých oborech středních odborných učilišť je možno od této doby získat maturitu.

1978 Zákon o opatřeních v soustavě základních a středních škol

Tento zákon zrušil podstatnou část zákona z roku 1960. Vývoj gymnázia směřoval k typové a obsahové unifikaci a k výraznému oslabení humanitní orientace, byl omezován počet humanitních větví.

1983 Omezení zaměření gymnázií

Počítá se pouze se zaměřením na matematiku, programování, tělesnou výchovu a cizí jazyky – poslední bylo nakonec rovněž zrušeno. Základy výroby a odborné přípravy (ZVOP) se zaváděly na všechna experimentální gymnázia – na úkor latiny a estetické výchovy. Bylo zřejmé, že se naplňuje tendence nastartovaná stranickými dokumenty z počátku 70. let: zrušit humanitní pojetí gymnázia a zrušit diferenciaci ve prospěch jednotnosti.

1984 Školský zákon

Uzákonění nové koncepce gymnázia bylo realizováno od školního roku 1984/1985. Zavádějí se v podstatě dva druhy gymnázií: gymnázium tzv. základní a gymnázium se zaměřením. Počet typů gymnázií se zredukoval na čtyři (matematika, matematika a fyzika, programování, tělesná výchova). Větve byly zrušeny. Latina a estetická výchova byly zatlačeny mezi volitelné a nepovinné předměty. Tato koncepce gymnázia, která fungovala v praxi bez podstatných změn až do převratu v roce 1989, byla prosazena, přestože už na počátku 80. let bylo zřejmé, že se v důsledku jejího zavádění dostává gymnázium do vážné krize. Rozšířením vzdělávacího obsahu o odborné předměty se totiž gymnázium přiblížilo odborné škole a tím ztratilo do značné míry své specifikum. Zájem o studium na gymnáziu začal klesat, zejména u chlapců.

Literatura

[B] Bertrand Y.: *Soudobé teorie vzdělávání.* Praha, Portál 1998.

ANTINOMIE VZDĚLÁVÁNÍ

Vladimír Roskovec

(Příspěvek na semináři u příležitosti 80. narozenin M. Černohorského, v Brně 1. 10. 2003.[1])

Každý, kdo měl někdy co dělat se vzděláváním, se neubrání dojmu, že je to proces vyznačující se velmi malou účinností (cca 10%, jako parní stroj na počátku svého vývoje). To není obtížné doložit: „*Vše, co jsem v životě potřeboval, jsem se naučil v mateřské škole*“ zněl název jedné populární knížky. V jiném bestseleru „Nevyšlapanou cestou“ píše M. S. Peck: „*Množství času, které naše děti ve škole tráví učením jednotlivých předmětů, je nepřímo úměrné tomu, jak často je budou potřebovat, až vyrostou.*“ A mohli bychom dlouho pokračovat. Přitom do vzdělávání, podobně jako do zdravotnictví se (celosvětově a také u nás) vkládá čím dál tím více veřejných (i soukromých) prostředků. Zvyšující se náklady na lékařskou péči mají nepopíratelný výsledek: lidský věk se prodlužuje (neříkám, že jsme zdravější). Jaký efekt mají rostoucí náklady na vzdělání? Jeden je opět nepopíratelný: prodlužuje se doba školní docházky, a to dokonce rychleji než lidský věk, takže okamžik opouštění školy je posunován stále blíže ke smrti (Z. Pinc). Mezi další efekty musíme zařadit narůstající deviantní chování mládeže, klesající jazykovou kulturu, nízkou tzv. funkční gramotnost aj. Ivan Illich, americký sociolog a pedagog chorvatského původu, vydal v roce 1972 provokativní knihu, která vyšla v roce 2001 i u nás s názvem „*Odškolnění společnosti*“. V ní – na základě americké a zejména jihoamerické zkušenosti – ostře a nevybíravě kritizuje současnou školu a požaduje dokonce její likvidaci. Vychází mj. ze známého faktu, že drtivou většinu skutečně důležitých věcí se učíme beztak všude jinde, jen ne ve škole.

O tom, že se vzděláváním není všechno v pořádku, svědčí i jistá posedlost po jeho reformování. „*Naše školství (pokud se pamatuji) vždy prodělávalo nějakou tu reformu, pokud se ovšem právě metareformním způsobem nevzpamatovávalo z reforem předchozích*“ píše na jednom místě Z. Pinc. Zásadní reforma se očekává od každého nového minis-

[1] Otištěno se souhlasem autora.

tra školství. Všechny ty reformní snahy jsou nadmíru ušlechtilé, toho dobra, co by měly přinést našim dětem, nám všem. Proč tedy to vzdělávání stále nějak nefunguje? Že by zase hloupí a líní, tj. nevzdělaní nebo málo vzdělaní lidé kazili krásné a skvělé projekty? Takže nezbývá než přidat učitelům nějaký ten rok vzdělávání a určitě to půjde. To poněkud připomíná stavitele perpetua mobile I. druhu, který si říká: ještě tady snížit tření, tady to odlehčit, ten setrvačník udělat ještě přesněji kulatý, aby ani trochu neházel, a určitě to bude fungovat.

Pozn.: Tato situace ovšem není výsadou druhé poloviny 20. st. Vzpomeňme reformního úsilí levicového učitelstva za 1. republiky (tzv. jednotná škola, kterou pamatujeme, to nebyl nápad senilního Zdeňka Nejedlého, to jen tyto prvorepublikové snahy konečně dosáhly svého!) A rovněž to není nic specifického pro české (československé) školství. O katastrofálních důsledcích různých reforem např. ve Velké Británii se raději moc nemluví.

Co za tím vším vězí? Dlouho jsem hlavní příčinu spatřoval v nízké úrovni našeho pedagogického výzkumu. Ale vzhledem k tomu, že i naši pedagogičtí výzkumníci opisují od zahraničních kolegů, není to asi ten pravý důvod.

Nevězí tedy příčina hlouběji, v samé povaze věci? Neuplatňuje se i ve vzdělávání něco na způsob Bohrova principu komplementarity, který ve vulgární formulaci "když někde něco získám, jinde něco ztrácím" funguje v tolika jiných záležitostech (když se naučím dobře na fagot, nemohu hrát dobře na klarinet, protože je tam jiný nátisk)? To mi připadalo případnější. Nápadný byl i fakt, že žádný z reformátorů školství nikdy neuvedl nepříznivé důsledky svého návrhu. Místo Bohrova principu se zde spíše aplikoval v Česku tolik oblíbený princip chytré horákyně. Navíc, když se o něčem nemluví, je to určitě důležité!

Pak mi přišly mi do ruky 3 knížky o tzv. filosofii výchovy (Kratochvíl, Michálek, Pinc – viz literatura) a ve všech se na začátku uvádělo několik antinomií výchovy/vzdělávání - vždy s odkazem na spis Eugena Finka „*Natur, Freiheit, Welt*“. (Podařilo se mi sehnat xerokopii, v knihovnách se u nás nevyskytuje.) Kniha vydaná v roce 1992 obsahuje text přednášky o filosofii výchovy, kterou E. Fink (1905–1975), Husserlův žák a přítel Jana Patočky, konal v zimním semestru 1951/52 na univerzitě ve Freiburgu. E. Fink vydal za svého života několik spisů o filosofii výchovy (viz literatura), ale ani ty se v našich knihovnách prakticky nevyskytují. Přitom tento filosof není u nás neznám, česky vyšly jeho *Oáza štěstí* (1992), *Hra jako symbol světa* (1993) a *Bytí, pravda, svět* (1996).

* * *

Antinomie je původně totéž co paradox. E. Fink v úvodní kapitole zmíněné knihy píše, že výchova není ani v nejvšednější praxi neproblematická, není tedy třeba ji nejprve zproblematizovat, abychom ji mohli filosoficky zkoumat. „*Již to nejnereflektovanější pedagogické vědomí je zneklidňováno neřešitelnými antinomiemi*“. E. Fink jich uvádí šest:

1) „*Každý vychovatel se jednou zeptá, zda má vůbec právo vnucovat jiným své pojetí života. Jistě, má na své straně dobré svědomí: formuje svěřence nikoli podle soukromého názoru, nýbrž podle všeobecně uznaných měřítek, podle toho, co je obecně pokládáno za „dobré“, „pravdivé“, „spravedlivé“. Smí ale vychovatel, který je přece poplatný své době, předjímat budoucnost dětí? Kdo mu zaručí, že vychovávaného nepřipoutává k systému, který mu je nepřiměřený, že neničí jeho budoucnost tím více, čím pevněji věří, že mu poskytuje oporu?*“ Z toho vyplývá, že by si vychovatel měl nejprve důkladně odůvodnit svůj výchovný ideál, k němuž chce své svěřence vést. „*Ale přikročil by pak vůbec někdy k výchově? Musí vychovatel převzít filosofickou odpovědnost za pravdivost svého výchovného ideálu? . . . Neznamená požadavek, který přikazuje vychovateli absolutní odůvodnění výchovného cíle, eo ipso konec veškeré výchovy? Nebyl by takovýto rigorosní přístup nakonec zpochybněním životní pomoci, kterou přece každá výchova je a na kterou má mladý člověk nárok? Otec, který by své děti nevychovával, dokud by si ideál existence, který jej vede, neodůvodnil, by si počínal nelidsky. Faktické vzdělávání má tedy předběžnou, dvouznačnou, antinomickou strukturu.*“

2) „*Jiný antinomický moment se prozrazuje tím, že na jedné straně jsou "životní zkušenosti" nepřenositelné - co lidstvo existuje, staří potřásají hlavami nad mladými a jsou otřeseni bezmocí svých domluv - na druhé straně se plánovitá, člověka formující výchova může stát hroznou mocí, démonickým sváděním duší. Moc a bezmoc výchovy jsou zřídkakdy od sebe odděleny.*“

3) „*Antinomická je konečně vůbec sama postava vychovatele. Nejen vychovatel z povolání, ale každý, kdo jiným káže, je rytířem smutné postavy, který nabízí groteskní pohled na rozdíl mezi skutečností a ideálem . . . Vychovatel musí vychovávat dříve, než je sám vychován. Nejenže*

asi nikoho nemůžeme, dokud neumře, označit za šťastného, nýbrž také nikoho nemůžeme označit za „vychovaného“. Mládež má kritické oko a ostrý, nemilosrdný pohled na tragikomické postavy vychovatelů. Ale dříve než si svou škodolibost vychutná, stojí sama před výchovným úkolem a pocítí možná brzy něco z oné vyrovnávající spravedlnosti života, která nás hořkými zkušenostmi může konečně dovést k mírnému veselí stáří.“

4) „*Další antinomie spočívá v napětí mezi obecným, pro všechny závazným nárokem kultury, k níž a v níž se má vychovávat, a jedinečnou individualitou vychovávaného.*“ Tato antinomie, podle mne, vyjadřuje jinými slovy protiklad mezi dvěma (někdy) deklarovanými posláními výchovy/vzdělávání, tj. socializací a individuací (viz Z. Pinc).

5) Ještě ostřejší antinomii spatřuje Fink mezi výchovou k povolání (kvalifikací) a výchovou k lidství. V klasickém Řecku se kvalifikace týkala otroků, kteří pracovali, zatímco vzdělávání (ve vlastním slova smyslu) určené pro působení ve veřejné sféře (*polis*) se dostávalo svobodným budoucím otcům rodin. (Vzdělávat takto otroky nebo ženy byl čirý nesmysl.) V dnešní době máme k práci jiný vztah - určité povolání, které představuje nějakou funkci v sociální struktuře, je místem, kde můžeme uskutečňovat své lidství. „*To není pouze důležitá změna v duchovních dějinách, to má hlubší základ ve změně západní metafyziky; práce je způsob, jakým vnucujeme jsoucnům svůj otisk, …jak dosahujeme našeho panství nad věcmi. Je to možná zvláštní, každopádně však ještě nerozhodnutá otázka, zda naše „panství“, založené na všeobecné práci, se nutně neobrátí v poddanství, zda když všichni pracujeme, jsme všichni svobodní nebo všichni otroci.*“ Je zřejmé, že tato antinomie souvisí úzce s problémem tzv. odborného a všeobecného vzdělávání.

6) „*Praktický vychovatel naráží na neuchopitelný protiklad mezi tím, co se dá v člověku formovat, co je oblastí svobody, a tím, co nezměnitelně a neovlivnitelně patří k lidské přirozenosti: pudy, síly krve, pohlaví; při vší dějinné podmíněnosti dnešního Evropana, který stojí ve vypotřebované a zanesené tradici antiky a křesťanství, je v něm ještě mnoho z doby kamenné. Pohled na tuto podivuhodnou dvojakost člověka může vést k otázce, zda, viděno optikou života, jsou dějiny západní výchovy osudnými dějinami domestikace člověka nebo cestou rostoucího zušlechťování. Podle jakých měřítek máme takovouto otázku zodpovědět? Je veškerá výchova proti přírodě – nebo je hlubokou nut-*

ností lidskosti? Může člověk tuto otázku vůbec rozhodnout? To závisí na tom, jaký má výchova původ. Je to svobodné sebeformování člověka, kterým se vrací do své podstaty, sám se skrze sebe zdokonaluje - nebo je to příkaz bohů daný člověku? Tvoří člověk z vlastní svobody projektivní ideál, na který se váže? Je výchova vposledu lidským sebeurčením a sebezákonodárstvím? Nebo se skrývá v pověsti, že bohové naučili lidi vytvořit pluh, tkalcovský stav, loď, ale také právo, manželství, mravnost a zákon obce, hluboká pravda? V jakém vztahu jsou lidský a božský řád - nezůstává zde nezničitelné napětí? Mohou lidé žít podle božského měřítka? Nejsou pak neustále zoufale přetěžováni?"

* * *

Zde Finkův výčet končí. Patrně bychom po jistém přemýšlení mohli tento seznam doplnit, či některé antinomie převést na obecnějšího společného jmenovatele. Důležitější však je, jak se k nim postavit. Fink sám jako nejčastější postoj uvádí „dogmatické" řešení: jednoduše se rozhodneme pro jednu stranu (jeden pól) alternativy. Moje zkušenost je horší: o této antinomické, paradoxní povaze vzdělávání jsem u nás nikde neslyšel. Nahlédl jsem do „Moderní pedagogiky" prof. Průchy nebo do spisu Y. Bertranda „Soudobé teorie vzdělávání" (Portál 1997, 1998) - o Finkovi nebo autorech podobného zaměření (Th. Ballauff, O. F. Bollnow, W. Braun) nikde ani zmínka. Zato téměř bez výjimky se usiluje o obě alternativy současně – princip chytré horákyně. Výsledek se zpravidla brzy dostaví: nepodaří se získat ani jednu.

Fink se ovšem ve svých spisech věnuje možným řešením uvedených antinomií, v duchu Husserlovsko-Heideggerovské tradice zkoumá podrobně řecké kořeny problému, srovnává např. obšírně přístup Platónův a Aristotelův apod. Nebudu předstírat, že jsem tyto spisy prostudoval, myslím však, že tam praktické recepty, jak napsat rámcový vzdělávací program, asi nenajdeme.

Nicméně jako fyzikům je nám snad zřejmé, že ve vzdělávání půjde vždy o hledání kompromisu mezi dvěma, většinou se vylučujícími alternativami, přičemž příklon na tu či onu stranu bude záviset na mnoha historických, sociálních, kulturních či politických okolnostech. Vzhledem k tomu, že výchova/vzdělávání probíhá v čase (nejen historickém, ale především individuálním čase vychovávaného i vychovatele), je pro ni mj. typické, že se postupně může/má přesouvat od jedné strany alternativy k druhé.

Stručně to lze ukázat na antinomii č. 4. Obecný nárok kultury by měl převažovat na základní škole v její socializační roli. (Podle lapidárního vyjádření prof. Matějčka se zde děti mají naučit ovládat se a pomáhat druhým.) Vysoká škola by pak měla klást důraz na individuální rozvoj studenta, vytvářet dispozice pro jeho svobodné individuální jednání. „*Je-li tomu naopak, jsme na nejlepší cestě vychovávat infantilního spratka, jehož úspěšná socializace zůstane hluboko do jeho důchodového věku obtížným problémem*", píše Z. Pinc.

V antinomii č. 1 byl zmíněn vzdělávací/výchovný ideál. Zde vidím velké úskalí, protože formulace takovéhoto ideálu předpokládá určité pojetí člověka, řekněme určitý antropologický model či koncept. Co vím, v teorii i praxi se vychází z jakýchsi implicitních, intuitivních a spíše mlhavých představ. Každý pokus o otevřenou reflexi by musel vyvolat prudký svár. Zde mají nezanedbatelnou výhodu církevní školy, které mohou tento ideál odvodit z příslušné náboženské tradice.

* * *

Cílem mého vystoupení bylo pouze stručně upozornit na postřehy E. Finka ohledně vzdělávání. Až zde budeme slavit další kulaté či polokulaté narozeniny pana profesora Černohorského, třeba si o tom povíme více, např. zda se nám podařilo některé podněty zužitkovat.

Děkuji vám za pozornost.

Literatura

[1] Fink, Eugen: *Natur, Freiheit, Welt. Philosophie der Erziehung.* Würzburg 1992

[2] Fink, Eugen: *Erziehungswissenschaft und Lebenslehre.* Frieburg i. B. 1970

[3] Fink, Eugen: *Metaphysik der Erziehung.* Nijhoff 1974

[4] Fink, Eugen: *Grundfragen der systematischen Pädagogik.* Freiburg i. B. 1978

[5] Kratochvíl, Zdeněk: *Výchova, zřejmost, vědomí.* Praha 1995

[6] Michálek, Jiří: *Topologie výchovy.* Praha, Oikúmené 1996

[7] Pinc, Zdeněk: *Fragmenty k filosofii výchovy.* Praha, Oikúmené 1999

SYMPATICKÉ UČEBNICE FYZIKY

Aleš Trojánek

I. Úvod

V příspěvku jsou stručně uvedeny autorovy názory na učebnice fyziky, které vycházejí z více jak dvacetiletých zkušeností s výukou fyziky na gymnáziu. Budeme tedy mít na mysli především učebnice fyziky pro gymnázia (či středoškolské učebnice), i když mnohá tvrzení mají obecnější platnost a týkají se fyzikálních učebnic obecně.

Význam dobrých učebnic pro výchovně vzdělávací proces je zřejmý. Podívejme se v této souvislosti např. na názor obecného pedagoga prof. Kopeckého [K]:

„*Sledujeme-li vývoj snah o nápravu školství, v nichž významné místo představuje J. A. Komenský, nemůžeme nevidět, že východiskem školských „labyrintů“ byl vždy nějaký opěrný bod. Tím opěrným bodem byla téměř vždy učebnice. Klasickým dokladem je Komenského Brána jazyků ...*

Učebnice jistě není pro zkvalitnění školního vzdělávání všelékem, ale mezi opory školního vzdělávání určitě patří. Zmínili jsme se o třech faktorech školního vzdělání, o učiteli, učivu a žáku. V učebnici jsou všechny tyto faktory pohromadě. Učebnice je totiž syntézou věcných (obsahových), psychologických a metodických složek vzdělání, což z učebnice vytváří pevný, spolehlivý bod, účinnou oporu školního vzdělání. Představuje syntézu vyučování vedeného učitelem a žákovy aktivity.“

J. Kopecký

II. Protichůdné (rozporuplné) požadavky na sympatické učebnice fyziky

I když se dá těžko říci, jaké učebnice jsou např. pro gymnaziální žáky nejlepší, pokusím se formulovat (velmi stručně a určitě ne jednoznačně) požadavky na učebnice, po kterých by žáci snad rádi sáhli a které by fyzikové (a učitelé fyziky) také rádi uvítali. Učebnice by měly být:

1. stručné, ale ne příliš zjednodušené či zavádějící a neměly by chybět „základní“ poznatky
2. jasné a fyzikálně (pokud možno) přesné, ale ne příliš složité a obtížné
3. přístupné (s množstvím pěkných úloh a příkladů) a čtivé, ale ne podbízivé
4. zajímavé a aktuální, ale ne za každou cenu
5. atraktivní a graficky pěkně provedené, ale ne příliš drahé

Nyní se pokusím o stručný komentář k jednotlivým bodům. Některá obecná tvrzení budou ilustrována na konkrétních fyzikálních ukázkách a příkladech.

1. Stručnost

Je zřejmé, že splnění jen tohoto prvního bodu je velmi těžkým úkolem, na jehož řešení existuje řada odlišných názorů. Ve fyzice, ale i v ostatních předmětech, musí vyučující i autoři učebnic stále řešit problém narůstajícího množství nových poznatků. Připomeňme jen nové poznatky moderní fyziky a jejích aplikací. Řešením této situace je a) vykládat jen fyzikální princip bez technických podrobností a b) „něco“ z tradičních témat vyřadit či výrazně zjednodušit. [1]

Např. v učivu elektromagnetizmu na gymnáziu považuji za vhodné provést alespoň následující úpravy: Kirchhoffovy zákony vyložit formou příkladů a příliš se jim nevěnovat, v tématu elektrický proud v plynech a ve vakuu vyložit základní mechanismus dějů a vynechat popis rozboru dějů ve výbojových trubicích (katodové světlo, anodový

[1] Předpokládám, že i v době zavádění poměrně liberálního Rámcového vzdělávacího programu (RVP) pro gymnázia [Vu] se na většině gymnázií dostane všem žákům "slušného" fyzikálního vzdělání s příslušnou hodinovou dotací. Názor, že všeobecně vzdělávací škola, jakou gymnázium je a snad i bude, by měla všem žákům, tedy i budoucím politikům, umělcům, novinářům apod. poskytnout dobré přírodovědné vzdělání a přehled, by chtělo podrobněji rozvést. Zaměření tohoto článku je však trochu jiné.

sloupec,...), vyložit jen fyzikální princip diody a tranzistoru bez elektrotechnických podrobností, podstatně zredukovat kapitolu o elektromagnetickém kmitání a vlnění.

2. Jasnost a přesnost

Jasnost a fyzikální korektnost jsou obecně nutné podmínky, aby učební text mohl být kvalitní a sympatický. Konkrétní míra naplňování těchto podmínek však bude u různých autorů jistě odlišná.

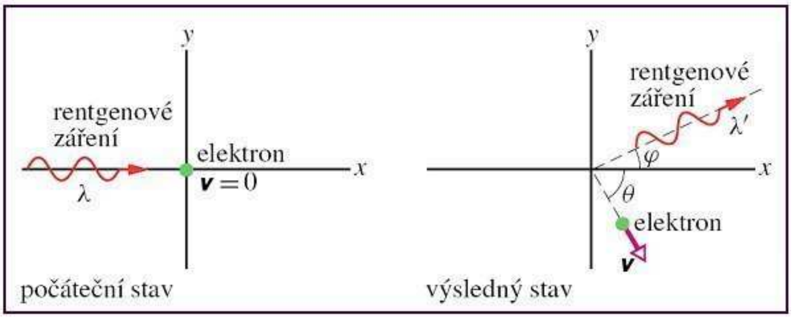
Např. v mechanice považuji za nezbytné precizně vyložit pojmy jako rychlost, zrychlení, síla, Newtonovy zákony, práce, kinetická energie, konzervativní silové pole, potenciální energie soustavy a její různé druhy, vztahy mezi prací daných sil a změnou příslušné energie apod. Viz např. [ŠT, Š].

Uveďme dále příklad běžně používaného výkladu z úvodních kurzů fyziky mikrosvěta, který v sobě skrývá jistou nejasnost:

Příklad: Comptonův jev se uvádí jako přesvědčivý důkaz Einsteinovy hypotézy o existenci fotonů. Jedná se o rozptyl rentgenového záření o dané vlnové délce λ na elektronech v uhlíkovém terčíku. V rozptýleném záření našel Compton záření nejen s původní vlnovou délkou λ, ale i s vlnovou délkou $\lambda' > \lambda$. Při vysvětlení tohoto jevu je třeba popisovat interakci rentgenového záření s elektrony jako interakci jednotlivých fotonů s jednotlivými elektrony materiálu. (V některých učebnicích se správně vysvětluje, že energie fotonu rentgenového záření je velká ve srovnání s vazební energií elektronu v atomu uhlíku, takže srážku můžeme popsat jako srážku fotonu s volným elektronem.) Pomocí fotonové hypotézy a užitím zákona zachování energie lze kvalitativně vysvětlit změnu vlnové délky rentgenového záření.

Otázka (položil mi ji kolega R. Smutný): Jak je možné, že po srážce s elektronem ztratí foton jen část své energie, když přece dochází při interakci světla a látky jen k přenosu energie po částech – kvantech? (Rozptýlený foton má menší energii než dopadající foton.) Nevede rozbor Comptonova jevu ke zmatku v hlavě hloubavého žáka i učitele?

Stručná odpověď: Při interakci fotonu s elektronem dojde k pohlcení dopadajícího fotonu a potom k vyzáření jiného, s menší energií. To je naznačené následujícím obrázkem z [HRW] tím, že jsou zobrazeny odděleně počáteční a konečný stav.



Obr. 1: Comptonův jev

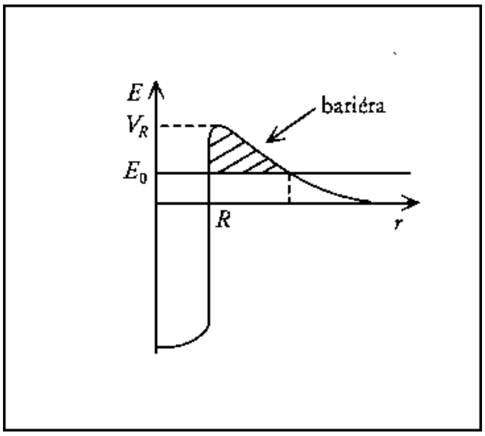
3. Přístupnost, názornost

Učebnice fyziky by se měla lišit od odborného článku (mimo jiné) stylem výkladu. Vždyť je možno (po vzoru autorů jako Feynman, ale i Pišút [PGČ, PZ] apod.) psát trochu „familiárním stylem“ a užívat obraty jako „uvažujme“, „zkusme si představit“ apod. Velký význam mají různá přirovnání a vhodné analogie.

Uveďme alespoň 2 příklady analogií.

První se týká výkladu tunelového jevu a vychází z postupů v populárních knížkách [P,Gr], kde se vysvětluje tunelový jev pomocí relací neurčitosti mezi energií a časem užitím jisté analogie. Na uvedeném příkladu je možno zároveň ilustrovat obtížnost popularizace fyzikálních témat. K níže uvedenému postupu mají totiž někteří kolegové výhrady, neboť zvolená analogie, jako každá analogie, „kulhá“. Naopak z citátu J. Polkinghorna z [P] je zřejmé, že se uvedeným postupům nebrání.

Příklad: (vysvětlení tunelového jevu): Jak je možné, že např. částice α může vyletět z jádra, i když nemá dostatek energie pro překonání potenciálové bariéry?



Obr. 2: Tunelový jev (α - rozpad)

„Populární“ vysvětlení tunelového jevu je možno podat pomocí Heisenbergových relací neurčitosti mezi energií a časem: $\Delta E\ \Delta t \geq h/2\pi$. (Tento vztah interpretujeme jako něco, co platí při předávání energie.) Představme si, že jednou dostaneme zprávu, že na druhém konci světa zemřel náš vzdálený příbuzný a odkázal nám fantastické dědictví. Jestliže je chceme získat, musíme je osobně převzít. Jediná potíž je v tom, že nemáme peníze na zakoupení letenky. Nikdo v okolí není schopen či ochoten nám půjčit, i když slíbíme, že mu vše štědře vynahradíme. Až jeden starý přítel nám poradí, že letecká společnost, u které pracuje, má takový bankovní systém, který umožňuje zaplatit letenku do 24 hodin po příletu, aniž kdo zjistí, že letenka nebyla zaplacena už před odletem. Díky tomu se nám podaří získat dědictví. Podobně α částice si může „vypůjčit“ energii a dostat se přes překážku, je-li schopna ji vrátit za dobu určenou relacemi neurčitosti.

„Pokud jste osobností s určitými intelektuálními nároky, asi vás výklad v předchozím odstavci, který byl zhruba na úrovni dětské obrázkové knížky, příliš nepřesvědčil. Rozhodně souhlasím a také bych neměl

přílišnou důvěru k takovému vysvětlení tunelového efektu, kdybych nevěděl, že přesný výpočet založený na Schrödingerově rovnici dává úplně stejný výsledek. Není však dobré s odmítáním podobných polointuitivních argumentů příliš spěchat. Díky nim jsme schopni získat do určité míry názornou představu o předmětu našeho zkoumání, což je vždycky užitečné. Práce teoretického fyzika obvykle sestává ze dvou kroků. Nejprve se snaží získat nějakou základní představu, co se děje a jak věci probíhají. Teprve potom může být úspěšný při druhém kroku, tj. převedení svého pohledu do formálního kvantitativního jazyka rovnic a výpočtů. Při druhém kroku má příležitost předvést své technické dovednosti, při prvním musí uplatnit představivost a fyzikální cit. I když výpočty jsou často složité a náročné – někdy do té míry, že nejsme schopni provést je jinak než v hrubém přiblížení – je to právě první, tvořivá část, která je tím obtížnějším z obou kroků. Jakékoli pitoreskní úvahy, které podporují intuitivní chápání problémů, je třeba všemožně rozvíjet.“

J. Polkinghorne

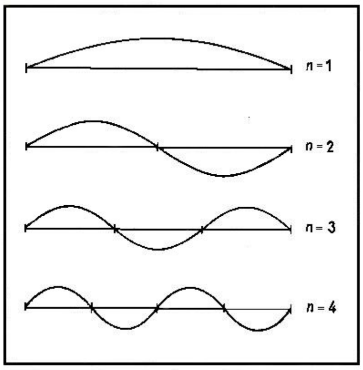
Poznámky:

1. Pomocí tunelového jevu (založeném na řešení Schrödingerovy rovnici) vyložil v roce 1928 G. Gamow α rozpad jader. G. Gamow je jedním z prvních autorů populárně vědeckých knížek [GS].[2]
2. Připomeňme velký význam tunelového jevu v různých zařízeních, jako např. u rastrovacího tunelového mikroskopu (STM).

Druhý příklad se týká v mnoha učebnicích používané a také hojně diskutované analogie: **kvantové stavy elektronů v atomu $\sim$ stojaté elektronové vlny**.

Příklad – elektron vázaný na úsečku. Uvažujme pohyb elektronu, který je omezen jen na úsečku délky L. O stavu elektronu nebudeme uvažovat jako o pohybující se částici, ale jako o jistém vlnovém ději. Kvantovým stavům elektronu na úsečce délky L přiřadíme „stojaté elektronové vlny“. Pro názornost vyjdeme ze stojatých vln na struně se stejnou délkou L. (Kmity struny lze pěkně demonstrovat.)

[2] Podrobněji o G. Gamowovi např. v [Ga].



Obr. 3: Stojaté vlny na struně délky L

Podle obr. 3 platí:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \ ,$$

kde číslo n je přiřazeno jednotlivým stacionárním stavům elektronu – jednotlivým stojatým vlnám. Nazývá se kvantové číslo.

Pro kinetickou energii volného elektronu platí:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \ .$$

Z de Broglieova vztahu $p = \frac{h}{\lambda}$ a po dosazení do předchozího vztahu a úpravách dostaneme:

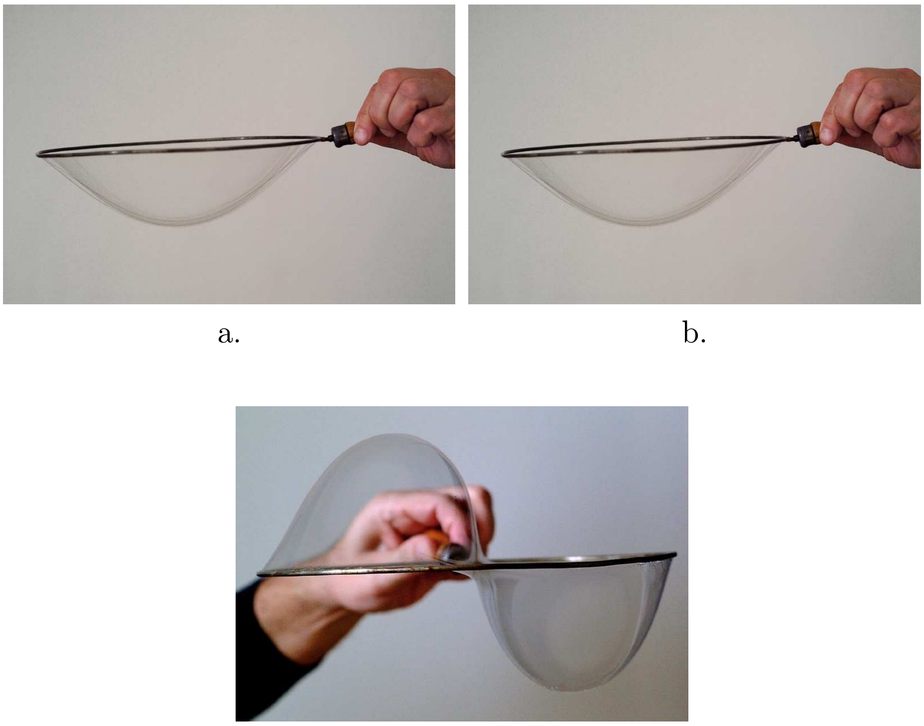
$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{1}$$

Výše uvedený vztah (1) udává energie jednotlivých kvantových stavů elektronu vázaného na úsečku délky L.

Fyzikálně pedagogické poznámky:

1. Standardní řešení problému „částice vázané na úsečku“ pomocí bezčasové Schrödingerovy rovnice vede k přesně stejnému vztahu (1) pro kvantové hladiny energie.

2. Největší námitka proti uvedenému postupu je tato: O jedné vlnové délce přiřazené elektronu můžeme mluvit jen v případě, že je volný. Elektronu vázanému na úsečku je přiřazen vlnový balík, a nejde tedy uvažovat o jedné vlnové délce a použít jednoduchý de Broglieův vztah. Podrobněji např. v [L].
3. K uvedenému příkladu pohybu elektronu v jednom rozměru určité délky je možno přirovnat situaci v dlouhých organických molekulách, např. v butadiénu $CH_2 = CH - CH = CH_2$, kde některé elektrony se mohou v podstatě pohybovat volně podél molekuly.
4. Jednotlivý elektron lze uvěznit v podobné pasti [HRW, s. 1057].
5. Velký význam mají uměle vytvořené elektronové jámy (elektronové pasti) konečné hloubky (nanokrystaly, kvantové tečky, kvantové hradby).



a. b.

c.

Obr. 4: Fotografie kmitajících mydlinových blán na drátěném rámu a) horní půlvlna, b) dolní půlvlna, c) celá vlna

6. Výše uvedený postup na „odvození“ energie vázaného elektronu na úsečku lze rozšířit na dvojrozměrnou kvantovou hradbu (viz obr. 4)[3] a pak na pravoúhlou krabici. Od umělých „atomů“ lze přejít k reálným, např. k nejjednoduššímu atomu – vodíku. Atom vodíku je podobnou elektronovou pastí – jádro váže svůj elektron na určitou oblast přitažlivou Coulombovou silou, a tedy jeho energie bude také **kvantována**.

Uveďme dále alespoň jedno pěkné přirovnání z učebnice [HRW]. (Vydání této knihy v českém jazyce považuji za výrazný počin, který může změnit celkový postoj fyzikálně pedagogického společenství k fyzikálnímu vzdělávání na různých typech a stupních škol. V článku se na tuto publikaci budeme vícekrát odvolávat.)

Přirovnání: Driftová rychlost elektronů je nepatrná ve srovnání s rychlostí chaotického pohybu: Názorný příklad dává roj rychlých komárů, zvolna unášených vánkem.

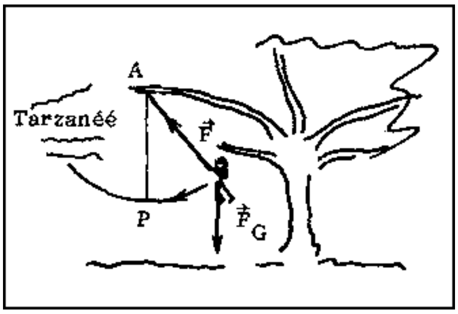
K názornosti a přístupnosti výkladu výrazně přispívají vhodně formulované a zařazované příklady a úlohy. Před uvedením alespoň tří ukázek úloh je zařazena teze prof. Šantavého z [ŠT]:

„Řešení vhodně formulovaných příkladů a úloh považujeme za součást poznávacího procesu, nikoli jen za procvičování a upevňování poznatků, s nimiž se čtenář seznámil ve výkladové části textu. V mnoha případech si totiž teprve při užití teoretických poznatků při vyšetřování konkrétních situací a dějů a při řešení konkrétních problémů uvědomujeme jejich vlastní fyzikální význam a osvojujeme si je neformálně.“

I. Šantavý

Úloha 1 [Š, str.105]: Na obr. 5 je nakreslen Tarzan (hmotnost $m = 90$ kg) spěchající za hlasem tak, že se zhoupl na liáně délky $l = 12$ m. Pro nejnižší bod P, kde měl rychlost o velikosti $\mathrm{v} = 8\ \mathrm{m.s}^{-1}$, určete: 1. zrychlení Tarzana, 2. součet sil, které na něj působily, 3. sílu, kterou na něj působila liána.

[3] Jedná se o stojaté vlnění mydlinových blán na drátěném rámu. Autorem fotografií je J. Michlíček (2004).



Obr. 5: Tarzan na liáně

Úloha 2 [ŠT, str. 170]: Malá nabitá kulička je zavěšena v laboratoři na vlákně v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$, která má vodorovný směr a velikost $E = 1,9.10^5$ V.m^{-1}. Kulička je v klidu v rovnovážné poloze, v níž je vlákno vychýleno o úhel $\alpha = 20^o$ od svislého směru. Hmotnost kuličky je $m = 4,1.10^{-5}$ kg, hmotnost vlákna je zanedbatelná. Sestrojte náčrtek a řešte úkoly: 1. Vyjmenujte všechny síly, které působí na kuličku, a určete jejich výslednici. 2. Určete směr a velikost všech sil, které působí na kuličku. 3. Určete elektrický náboj kuličky. 4. Určete směr a velikost zrychlení $\boldsymbol{a}$, se kterým by se kulička pohybovala, kdyby se vlákno přetrhlo. 5. Je náboj kuličky kladný, nebo záporný?

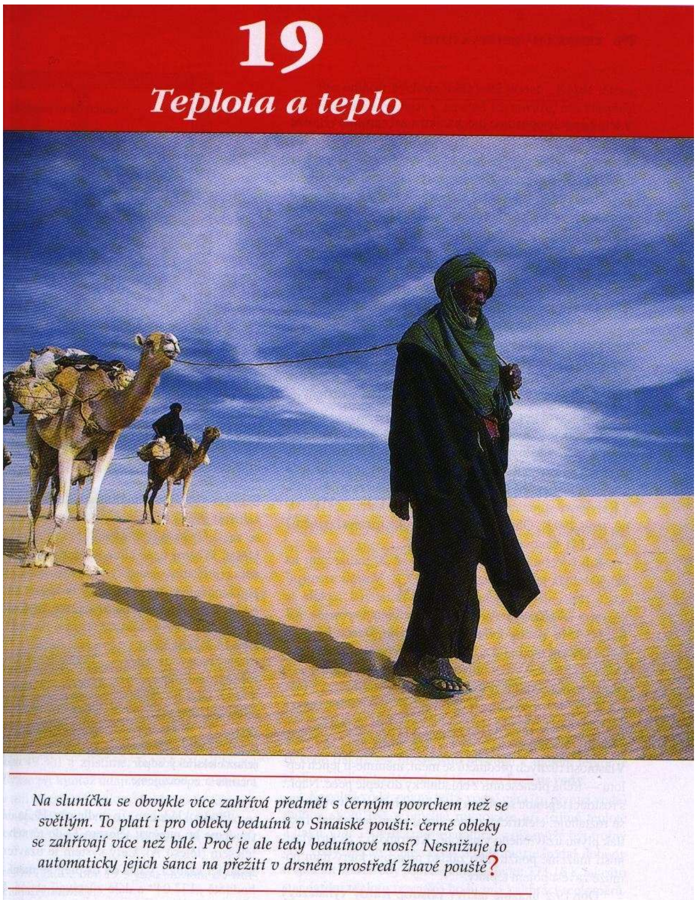
Úloha 3 [HRW, str. 712]: Housenka dlouhá 4,0 cm se plazí ve směru pohybu elektronů po neizolovaném měděném drátu o průměru 5,2 mm, kterým prochází proud 12 A. (a) Jaké je napětí mezi konci housenky? (b) Má její ocas vyšší, nebo nižší potenciál než její hlava? (c) Jak dlouho by housence trvalo, než by se odplazila o 1,0 cm, kdyby rychlost jejího plazení byla stejná jako driftová rychlost elektronů v drátu?

Poznámky k úlohám 1-3:

Úlohy 1, 3 jsou zajímavé svou formulací a ze zkušenosti vím, že zaujmou žáky mnohem více než podobné stroze formulované úlohy. V úlohách 1, 2 jsou jednotlivé otázky a úkoly zařazeny tak, že přímo navádějí na správný postup řešení.

4., 5 Zajímavost a aktuálnost, atraktivnost a pěkná grafická úprava

Jako příklad zajímavého a aktuálního zpracování je možno uvést učebnici [HRW]. Jsou v ní pěkné a motivující obrázky na začátku jednotlivých kapitol (viz obr. 6), ale také velké množství aktuální problematiky, která je stručně a názorně objasňována. Je potěšitelné, že české vydání má stejnou grafickou úroveň jako původní verze [H'R'W']. O úspěchu této doslova populární učebnice svědčí to, že na podzim roku 2003 byl vydán dotisk.



Obr. 6: „Motivační stránka“ z [HRW]

V poslední době se u nás objevuje poměrně velké množství populárně vědeckých publikací, hlavně přeložených z anglického jazyka [4]. V nich je možno nalézt mnoho zajímavých témat, informací, ale i neotřelých a zajímavých postupů výkladu apod. Jde zejména o tematiku astrofyziky, kosmologie, ale i fyziky mikrosvěta. Uveďme alespoň některá hesla z oblasti kvantové fyziky: dokonalejší verze základních experimentů kvantové fyziky (dvojštěrbinové experimenty a jejich jednofotonové verze, experimenty s opožděnou volbou), interpretace kvantové teorie (Schrödingerova kočka, ...), EPR paradox, Bellovy nerovnosti, nelokalita kvantové mechaniky, kvantová teleportace, kvantová kryptografie, kvantové počítače atd.

Inspirující obsahově, ale také kvalitou provedení a úpravou jsou mnohé učební texty a jiné pomocné materiály na domovských stránkách pracovníků jednotlivých fyzikálních pracovišť u nás i ve světě. Z velkého množství zajímavých stránek věnovaných fyzice je možno zmínit např. [Co, H, Hy].

III. Shrnutí

Na závěr se pokusím formulovat návrhy, jejichž realizace by přispěla ke zkvalitnění učebnicové fyzikální literatury a tím ke zlepšení výuky fyziky:

- Při výuce fyziky i při psaní učebních textů se inspirovat populárně vědeckou literaturou, zejména učebnicí [HRW])
- Přeložit (pro srovnání) pěkný středoškolský zahraniční kurz fyziky

Literatura

[K] Kopecký J.: *J. A. Komenský a naše školské reformy. Pocta Komenskému.* Odborná skupina Pedagogická fyzika FVS JČSMF, Brno 1991. Redakce M. Černohorský), str.58.

[Vu] `http://www.vuppraha.cz`

[4] V kapitole Doporučená literatura tohoto sborníku je uvedeno 92 titulů.

[ŠT] Šantavý I., Trojánek A.: *Fyzika. Příprava k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Prometheus, Praha 2000.

[Š] Šantavý I.: *Mechanika.* SPN, Praha 1993.

[PGČ] Pišút J., Gomolčák L., Černý V.: *Úvod do kvantovej mechaniky.* 2. vydanie.Alfa, Bratislava 1983.
Viz též: `http://www.ddp.fmph.uniba.sk/pisut/`

[PZ] Pišút J., Zajac R.: *O atómoch a kvantovaní.* 2. doplnené vydanie. Alfa, Bratislava 1988.
Viz též: `http://fyzikus.fmph.uniba.sk/Fyzikus/`

[HRW] Halliday D., Resnick J., Walker J.: *Fyzika.* VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM a nakladatelství Prometheus, Brno 2001. Dotisk 2003.

[H'R'W'] Halliday D., Resnick J., Walker J.: *Fundamentals of physics. Fifth edition.* John Wiley & Sons. Inc. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1997.

[P] Polkinghorne J.: *Kvantový svět.* Aurora, Praha 2000.

[Gr] Greene B.: *Elegantní vesmír. (Superstruny, skryté rozměry a hledání finální teorie.)* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2001.

[G] Gamow G.: *Moje světočára. Neformální autobiografie.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2000.

[GS] Gamow G., Stannard R.: *Pan Tompkins stále v říši divů.* Aurora, Praha 2001.

[L] Lacina A.: *Poznámka k analogii „stacionární kvantový stav - stojatá vlna na struně.“* PMFA, XXVIII, 1983, s. 342.

[Co] `http://www.colorado.edu/physics/2000`

[H] `http://www-hep2.fzu.cz/adventure/`

[Hy] `http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html`

MAGICKÉ ČTVERCE
aneb
Od knihy I-ťing k internetové současnosti[1]

Eduard Fuchs

Vývoj matematiky je v mnoha ohledech pozoruhodný. V různých kulturách, jejichž vývoj zcela jistě díky geografické nebo „historické“ vzdálenosti probíhal odděleně, lze nalézt překvapivě mnoho styčných bodů. Stejně tak lze ovšem vystopovat odlišnosti, které souvisejí s různým kulturním, filozofickým a obecně společenským zázemím jednotlivých národů.

Při zrodu matematických pojmů a při prvním uvědomování si zákonitostí, jež dnes řadíme do matematiky, jistě na předním místě stála **čísla**. Tento fakt je natolik přirozený a samozřejmý, že zajisté nepotřebuje podrobnější zdůvodňování. I při letmém srovnání role čísel v jednotlivých kulturách však okamžitě odhalíme překvapivé rozdíly. Demonstrujme je alespoň na letmém srovnání kultury starořecké a čínské. (Výběr těchto dvou společností je více než dostatečně zdůvodněn popisovanou tématikou: v antickém Řecku se zrodila moderní matematika, starověká Čína je zase kolébkou magických čtverců, jimiž se chceme v tomto textu zabývat).

Ke zrodu matematiky jako vědy v moderním slova smyslu došlo v antickém Řecku v 6.–4. stol. př. Kr. Rozhodující roli v tomto procesu sehrála tzv. *pýthagorejská škola*. Je všeobecně známo, jaký význam číslům (rozuměj **přirozeným** číslům) pýthagorejci přikládali. V jejich pojetí bylo možno pomocí čísel a jejich vzájemných poměrů popsat nejen celou tehdejší matematiku, ale i lidské vlastnosti a dokonce celý Vesmír. A tak se jejich obzvláštní pozornosti těšila přirozená čísla s různými speciálními vlastnostmi, jako např. *prvočísla, dokonalá čísla, spřátelená čísla* apod. (podrobněji viz např. série článků [3]–[6]). Při popisu strukturálních vlastností čísel dospěli pýthagorejci např. k pojmům čísel *trojúhelníkových, obdélníkových, pětiúhelníkových* apod. (viz např. [1]). Ačkoliv vzájemným vztahům čísel přikládali mnohdy až magické vlastnosti, nedospěli Řekové nikdy k *magickým čtvercům*, které naopak zkoumali ve starověké Číně, v níž jinak

[1] Práce vznikla za podpory MŠMT v rámci projektu LN00A041.

v rozvoji matematiky nedosáhli úrovně starověkých Řeků.

Objektivně vzato magické čtverce nepatří a nikdy nepatřily k centrálním matematickým pojmům a k rozvoji matematiky nikdy nepřispěly rozhodujícím způsobem. Přesto je však jejich historie v mnoha ohledech poučná a zajímavá. Ukazuje nejen vývoj matematických pojmů, ale dokumentuje v nejrůznějších rovinách vztahy matematiky a filozofie a vůbec nazírání lidí na roli a sílu matematických objektů.

1. Co to jsou magické čtverce

Jen málo matematických objektů se vyskytuje i mimo matematiku tak často, jako právě magické čtverce, jimiž se chceme zabývat. Píše se o nich v ryze matematických knihách i v literatuře úrovně – velmi mírně řečeno – nevalné. Vyskytují se v seriózních historických knihách i v literatuře s okultní a zcela nevědeckou a obskurní náplní. Na internetových stránkách lze pod příslušným heslem nalézt stovky odkazů, v nichž je, zvláště pro laika, orientace přinejmenším obtížná. A tak není divu, že samotný pojem „magický čtverec“ má v různých pramenech různé významy.

Obecně vzato je magickým čtvercem nazýváno jakékoliv čtvercové schéma nejrůznějších objektů, nejčastěji čísel nebo písmen, rozmístěných podle nějakých pravidel.

V literatuře (viz např. [10]) se lze dočíst o magických čtvercích sestavených z písmen a jejich roli v historii. Nejznámější z těchto čtverců je asi čtverec nazývaný *Sator* (viz obr. 1).

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Obr. 1: Čtverec *Sator*… (Oráč Arepo drží při práci pluh.)

O vzniku a tvůrci tohoto čtverce není dnes nic známo. Ve středověké literatuře se však lze dočíst, jak vyryt do amuletů chrání před démony, vytesán do trámů chrání před požárem apod.

Obvykle je však magickým čtvercem označována čtvercová síť vytvořená z navzájem různých čísel tak, že součet čísel ve všech řádcích a sloupcích (a často též v úhlopříčkách) je stejný.

Když nyní na chvíli pomineme nematematické výskyty takových čtverců, lze v literatuře nalézt popisy nejrůznějších mnohdy velmi důmyslných konstrukcí. Existují například magické čtverce utvořené pouze z prvočísel. Na obr. 2 je takový čtverec typu 4x4:

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

Obr. 2: Magický čtverec utvořený z prvočísel

V uvedeném čtverci se sice vyskytují pouze prvočísla, není tam však uvedeno 16 **po sobě jdoucích** prvočísel. Nejmenší čtverec, který tvoří po sobě jdoucí prvočísla, má 3 řádky a sloupce (viz [9]). O tom, že jeho nalezení jistě nebylo zrovna jednoduché, se snadno přesvědčíme – viz obr. 3.

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

Obr. 3: Magický čtverec utvořený z devíti po sobě jdoucích prvočísel

Je známo (viz [8]), že nejmenší čtverec obsahující prvních n prvočísel (mezi něž pro tentokrát zařadíme i číslo 1) musí mít 12 řádků a sloupců. Tento čtverec je na obr. 4.

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Obr. 4: Magický čtverec utvořený z prvních 144 prvočísel

Existuje rovněž řada konstrukcí, které umožní vytvořit magický čtverec například tak, že do jednoho řádku (nebo sloupce) zvolíme libovolná čísla (například své datum narození) a pak doplníme čtverec na magický. Tato hříčka může být jistě užitečná například při tříbení

„matematického citu“ u žáků, v dalším se však takovými čtverci zabývat nebudeme. (Na internetu lze takových programů nalézt desítky.)

Jak jsme již uvedli, má v literatuře pojem „magický čtverec“ nejrůznější významy. Přesto je však nejobvyklejší definice následující, kterou budeme v dalším textu využívat (a které nevyhovují výše uváděné příklady):

Magický čtverec řádu n je čtvercové schéma o n řádcích a n sloupcích, v němž jsou vepsána čísla 1, 2, 3, ..., n^2 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce je stejný.

Příklady magických čtverců záhy uvedeme. K definici pouze dodejme, že součet čísel v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách magického čtverce řádu n je zřejmě roven číslu

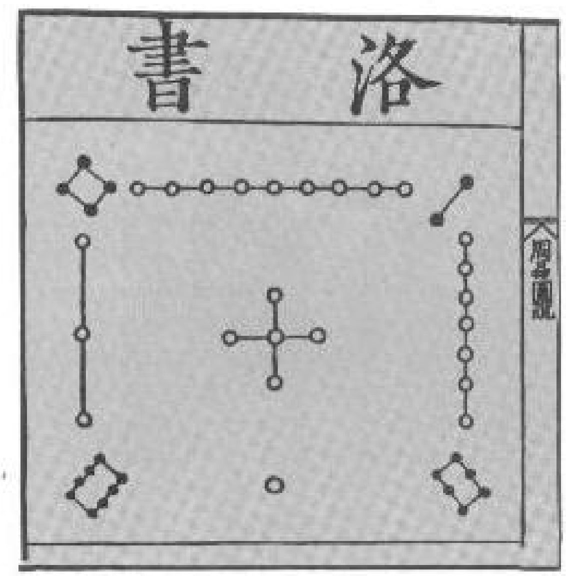
$$\frac{n \cdot (n^2+1)}{2}.$$

2. Kde se magické čtverce poprvé vyskytují

Pokud by bylo fakticky doloženo to, co se ve světové literatuře běžně píše, byly by právě magické čtverce zřejmě nejstarším písemně doloženým matematickým objektem. Za mnohé prameny, které se vyjadřují téměř totožně, ocitujme, co o nich lze nalézt v Bergeově knize [2].

Berge na str. 4 uvádí:

... Je poněkud zneklidňující, že objekty tohoto typu nacházíme ve věštecké knize I-ťing užívané v Číně taoisty; tato kniha je jedním z nejstarších (kolem r. 2 200 př. Kr.) dosud živých textů. Tato posvátná práce obsahuje dvě konfigurace: „Velký plán“ (Lo-šu) a „Říční mapu“. „Velký plán“, který byl podle legendy namalován na krunýři posvátné želvy, která se vynořila z řeky Lo, je znázorněn na následujícím obrázku; dosadíme-li za znaky čísla, obdržíme známý magický čtverec „Saturn“.



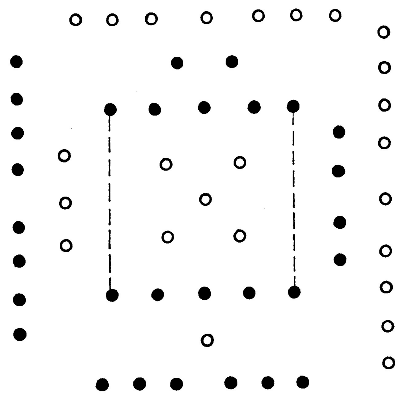
Obr. 5: *Velký plán*

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 6: Magický čtverec *Saturn*

Tato konfigurace je pozoruhodná tím, že součet prvků v každém řádku, sloupci a úhlopříčce je stále stejný, a to 15.

„Říční mapa“, kterou opět podle legendy měla na svém krunýři posvátná želva, která se opět vynořila z řeky (tentokrát z řeky Ho), je znázorněna na dalším obrázku:



Obr. 7: *Říční mapa*

7

2

10 10

8 3 5 4 9

10 10

1

6

Obr. 8: Číselný zápis *Říční mapy*

Pouhým pohledem v této mapě dobře vidíme středovou symetrii symetrií součtů protilehlých cifer. Například
$5 + 3 = 8$; $5 + 1 = 6$; $3 + 10 + 2 = 8 + 7$; $3 + 10 + 1 = 8 + 6$ atd.

Tolik tedy citace z knihy [2]. Jak již bylo řečeno, analogické informace však lze nalézt v řadě jiných pramenů, včetně tak renomovaných, jako je např. *Encyclopedia Britannica.*

Po přečtení tohoto textu se okamžitě nabízí několik otázek a problémů:

1. Pokud by tomu tak bylo, museli bychom výrazně korigovat informace, které uvádějí, že první dochované písemné matematické texty jsou egyptské papyry z 19. stol. př. Kr. Kniha *I-ťing* sice není matematickým textem, avšak uvedené konfigurace jsou velmi důmyslné matematické objekty svědčící o netriviálních počtářských schopnostech tvůrců.

2. Pokud si čtenář vezme do ruky knihu *I-ťing*, zažije analogické překvapení jako autor tohoto textu. Po prolistování celé knihy okamžitě zjistí, že ani *Velký plán* ani *Říční mapa* se v textu **vůbec nevyskytují**! (Lze zřejmě odůvodněně předpokládat, že málokterý čtenář bude číst text v čínském originálu. V posledních letech však existuje celá řada českých vydání *Knihy proměn*, jak zní český překlad původního názvu. Řada těchto vydání je velmi nekvalitních a soustřeďuje se na pouhý senzacechtivý návod „předpovídání budoucnosti“, který je sice výraznou, nikoliv však z našeho pohledu dominantní složkou knihy. Existují však naštěstí i kvalitní a fundované české překlady – viz např. [11] a částečně i [12]. Ani v těchto překladech se ovšem popisované konfigurace nevyskytují.)

3. Pozorný čtenář, který není blíže s magickými čtverci obeznámen, si jistě položil otázku, proč se uvedený magický čtverec nazývá *Saturn.*

V dalším textu uvedené otázky a problémy zodpovíme.

3. Několik pohledů do čínských dějin a na knihu I-ťing

Kolik toho víme o Číně, obrovské zemi s neuvěřitelně bohatými dějinami, s nesmírným a dodnes neprozkoumaným kulturním dědictvím? V době, kdy u nás žili lovci mamutů, v Číně existovala vyspělá civilizace s organizovanou státní správou a vyspělým hospodářstvím; u nás se po lesích procházel Havranpírko, v Číně byli státní úředníci systematicky vzděláváni v řadě oborů včetně matematiky. Čínská kultura je prakticky jediná na Zemi s nepřerušeným vývojem a tedy s nejdelší tradicí. Málo toho ostatně víme i o dnešní Číně. Strohá fakta nám sice řeknou, že tam žije více než miliarda obyvatel, že je tam více než 40 milionových velkoměst, že jsou tam velehory i rozsáhlé nížiny, na jedné straně vynikající univerzity a špičková technika, na druhé straně zaostalý venkov, kde se mnohdy zastavil čas. Co nám však tyto údaje řeknou o čínské kultuře, vzdělanosti, o čínské filozofii a o myšlení jejich velikánů?

Kamkoliv přitom pohlédneme, jen těžko se oprošťujeme od evropského stylu nazírání. Jsme v zajetí často nevědomých předsudků, myšlenkových schémat, máme jiný žebříček hodnot a jen těžko pronikáme do stylu myšlení civilizace, která je nám tak vzdálená.

Je nad možnosti tohoto článku se podrobněji zabývat čínskými dějinami. Autor tohoto textu si ostatně ani vzdáleně na takový úkol netroufá. Na četné potíže navíc narážíme i při pouhém popisu událostí čínské historie. I v těch nejnovějších pramenech se datace čínských dějin odlišují mnohdy o celá staletí a přepis čínských jmen do češtiny není vůbec standardizován, takže orientace v pramenech je velmi obtížná. Buďme si těchto skutečností vědomi a s pokorou a respektem přistupme k jednomu z nejstarších dochovaných textů čínské civilizace, ke knize *I-ťing*.

Zpravidla, a do značné míry právem, se uvádí, že *I-ťing* je kniha věštecká. Při prvním a zběžném pohledu do této knihy spatříme 64 obrazců, tzv. *hexagramů*, složených z plných a přerušovaných čar, jimž jsou připsány různé významy. Z vylosovaných hexagramů se pak zájemce dozví věštbu svého osudu. Toto je však jen velmi zvulgarizovaný a povrchní výklad knihy a sám o sobě by zajisté nevysvětloval význam, který tato kniha v čínských dějinách sehrávala (a dodnes sehrává).

Kromě uvedeného smyslu byla *I-ťing* po dlouhá staletí chápána jako „kniha moudrosti“. Její výklady a nejrůznější interpretace zaplnily nesrovnatelně více svazků než kniha samotná. Prakticky všechny v Číně vzniklé filozofické systémy se snažily svá východiska i závěry uvést do souladu s *I-ťingem*. Právě tím je tato kniha mimořádně významná.

Kdy tedy kniha vznikla a kdo je jejím autorem? Čtenáře jistě nepřekvapí, že na žádnou z těchto otázek není snadná odpověď. Popravdě řečeno, uvedené otázky samotné jsou poplatné naší „evropské deformaci“, která mnohdy nadřazuje faktografii ideám; intenzivně začaly být zkoumány až někdy v 19. století, kdy se Číně a jejím dějinám začala věnovat západoevropská věda.

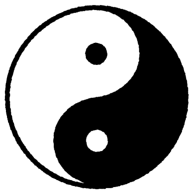
Jak jsme uvedli, obsahuje *I-ťing* 64 hexagramů, které jsou tvořeny dvojicemi tzv. *trigramů*, tvořenými trojicemi plných a přerušovaných čar, takže těchto trigramů je osm. (Podrobnější popis uvedeme později.)

Objev těchto trigramů je připisován legendárnímu císaři *Fu Šimu* (2 953–2 838 př. Kr.), obdařenému spíše božskými než lidskými vlastnostmi. Nejstarší části samotné *Knihy proměn* jsou však dnes datovány do 12.–11. stol. př. Kr., což je tedy o více než 1 000 let později, než uvádí Berge a další autoři. Jak mohlo k takovému omylu dojít? Bergeova informace se zřejmě odvíjí od další legendy o trojici velkých císařů. První z nich, *Jao*, byl autorem prvního astronomického kalendáře. Po něm nastoupil *Šun* a konečně *Jü* zvaný *Veliký*. Ten údajně vládl v letech 2 205 až 2 176 př. Kr. a proslul jako stavitel hrází a vodních kanálů. A právě *Jü* měl obdržet „Říční mapu“ a „Lo-šu“ jako božské dary. (Ponechme teď stranou takové drobnosti, jako že první z diagramů nebyl namalován na krunýři želvy, jak uvádí Berge, leč zeleně nakreslený ho císaři přinesl dračí kůň, který se vynořil ze Žluté řeky.) Pocházejí-li tedy nejstarší části knihy *I-ťing* až z 12.–11. stol. př. Kr., je její datace do období kolem r. 2 200 př. Kr. v každém případě nesprávná a není tedy nutno korigovat naše poznatky o prvních matematických textech.

Stále však zůstává otevřená druhá z výše uvedených otázek. Jak *Říční mapa* a *Lo-šu* souvisejí s knihou *I-ťing*, když se tam vlastně nevyskytují?

Jak jsme již uvedli, byla kniha *I-ťing* v průběhu staletí doprovázena spoustou komentářů a doplňujících textů, jejichž rozsah by vydal na samostatnou knihovnu. I když se dochovala z těchto komentářů jen část, poskytují nám dostatek informací o tom, jak se interpretace a filozofické „zázemí“ původně věštecké knihy vyvíjelo. A právě v tomto zázemí, které není automatickou součástí *Knihy proměn* (spíše bylo před širší veřejností utajováno), přesto však k ní nedílně patří, lze vystopovat objekt našeho zájmu – magické čtverce.

Dnešní podoba *Knihy proměn* se odvíjí od odkazu dvou velikánů čínské filozofie, *Konfucia* a *Lao-c'*. Konfucius (552–asi 479 př. Kr.), čínsky Kung-fu-c', zakladatel konfucianismu i Lao-c' (asi 570–490 př. Kr.), zakladatel taoismu, údajně studovali *Knihu proměn* a její poznatky zahrnuli do svého učení. Zejména pak taoismus se svým krédem, že vše je v pohybu, relativní a pomíjivé, vše je podmíněno neustálým působením vzájemně protichůdných složek *jin* a *jang*, musel v *Knize proměn* nalézt mnohou inspiraci.



Obr. 9: Jin a jang

Podstatná část komentářů se však objevila v době kolem 2. stol. př. Kr., kdy čínskou filosofií prošla vlna kosmologických spekulací, pro než byla *Kniha proměn* jako stvořena. V té době do ní byla zřejmě dodatečně dodána řada interpretací, které v ní původně obsaženy nebyly. To však nic nemění na faktu, že právě v těchto souvislostech se poprvé magické čtverce objevují.

4. I-ťing a magické čtverce

Jak jsme již uvedli, svět je podle taoismu v neustálých proměnách, jejichž příčinou je neustálé střetávání protichůdných principů *jin* a *jang*. Věčné a neměnné je pouze *tao*. Jedním z nejběžnějších symbolů těchto protichůdných principů se stala plná čára JANG a přerušená (v čínské terminologii spíš zlomená) čára JIN. Tyto čáry symbolizují jednotu dvou polarit.

Jinové čáry symbolizují vše zemské, pasivní, záporné, ženské, temné, vlhké, měsíční, **jangové čáry** vše nebeské, aktivní, kladné, mužské, světlé, tvrdé, sluneční. V této souvislosti však musíme zdůraznit jednu zásadní věc: naše standardní vnímání hodnot nám našeptává, že jangové čáry jsou „lepší" než jinové, že jangové vlastnosti jsou „dobré" a jinové „špatné" apod. Toto hodnocení však v **žádném**

případě neodpovídá hodnocení čínskému, kterému je takové rozlišování naprosto cizí. Žádná z uvedených vlastností není lepší než druhá, teprve jejich složením vzniká úplnost. Žádná složka nemůže existovat bez druhé: *v každém jin je kousek jang a v každém jang je kousek jin.* Grafickým znázorněním tohoto vzájemného vztahu je dobře známý obrázek, který nelze žádným způsobem rozdělit na dvě stejně velké části tak, aby jedna část byla černá a druhá bílá (viz obr. 9).

Dvojice čar pak vytvoří *digramy* a trojice *trigramy*. Podívejme se, jak o tom hovoří tzv. *Veliký komentář* (čínsky *Si ch'*):

Veliký pól neboli Tchaj Ťi je nejzazší prvopočáteční jednota, kde není ještě rozlišeno Jin a Jang. Je to prvopočáteční veliký Chaos, prázdno, jež nazvat počátkem bylo by chybou. Leda tak, že je to ten počátek před počátkem. Odtud se pak rozdělily jin a jang, země a nebe dostaly tvar. Z nich se zrodily čtyři symboly, řečené Siang. Vysvětlení jsou různá, možná jsou všechna:

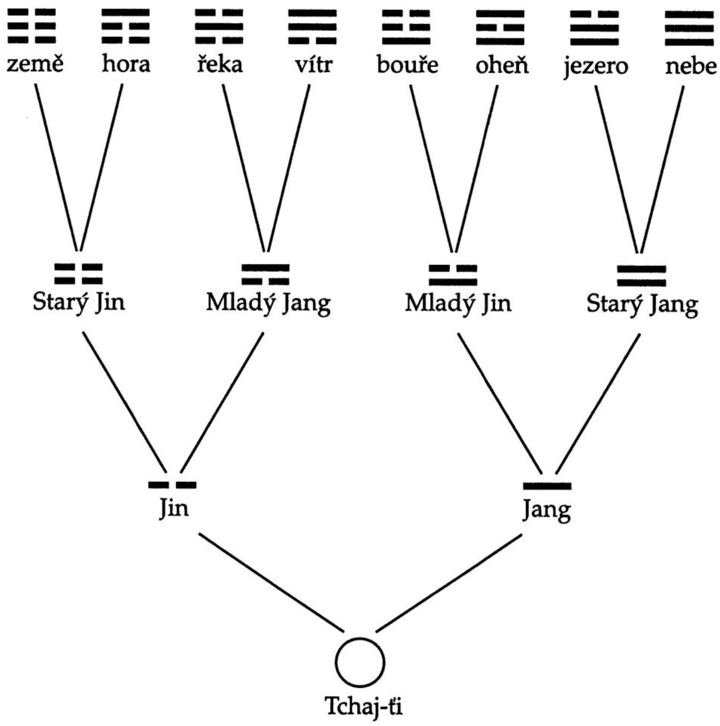
- *čtyři roční doby*
- *čtyři elementy: kov, dřevo, voda, oheň*
- *čtyři grafické kombinace - digramy*

Odtud byl jen krok k **Osmi Trigramům**, *řečeným* **Pa Kua**, *které se staly základem celého systému.*

Osm trigramů stanovila šťastná a nešťastná znamení a ta zrodila veliké dílo. Proto není větší uplatnění symbolů než je nebe a země. Není větší změny v souvislosti nežli jsou čtyři roční doby. Není větších symbolů nežli jsou slunce a měsíc, jež zavěšeny na obloze dávají světlo ....

Proto nebe vytvořilo tyto duchovní věci, světci je vzali za vzor. Nebe a země se měnily a vyvíjely, světci je napodobili. Na nebi visely symboly, z nichž byla patrná znamení šťastná a nešťastná, světci je znázornili. Ze Žluté řeky se vynořil obraz, z řeky Lo se vynořily znaky, světci si je vzali za vzor.

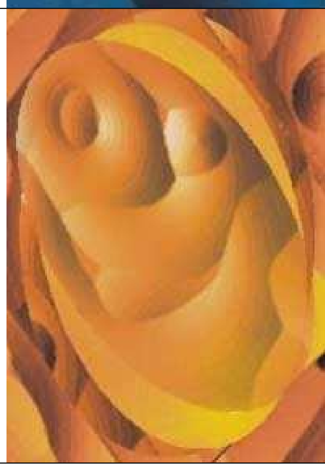
Proměny mají čtyři symboly, jimiž ukazují. A jsou k nim připojeny výroky, jimiž sdělují. A jsou tu vytčena šťastná a nešťastná znamení, jimiž rozhodují.



Obr. 10: Vznik trigramů

V další tabulce uvádíme přehled všech osmi trigramů, jejich čínské názvy a některé z mnoha možných interpretací. Zvýrazněny jsou přitom ty významy, které hrají podstatnou roli v dalším výkladu. Jako doklad toho, že tematika trigramů je dodnes živá i v moderním čínském umění, uvádíme v posledním sloupci některé ze současných maleb, které jsou trigramy inspirovány. Přestože černobílá reprodukce výrazně snižuje jejich působivost, jsou zajímavým dokladem současného vhledu čínských umělců na tuto tematiku.

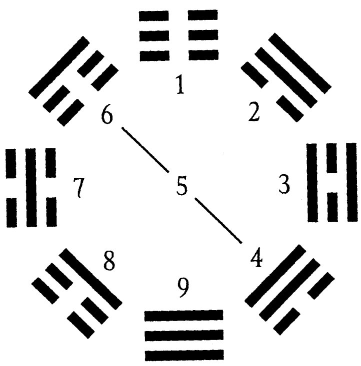
☰	**ČCHIEN**	nebe, síla, **OTEC**, kůň, hlava, severozápad, mezi podzimem a zimou	
☷	**KCHUN**	země, poddajnost, **MATKA**, kráva, břicho, jihozápad, mezi létem a podzimem	

☳	**ČEN**	hrom, pohyb, **PRVOROZENÝ SYN**, drak, noha, východ, jaro	
☵	**KCHAN**	řeka a déšť, nebezpečí, **DRUHOROZENÝ SYN**, vepř, ucho, sever, zima	
☶	**KEN**	hora, zastavení, **NEJMLADŠÍ SYN**, pes, ruka, severovýchod, mezi zimou a jarem	

☴	**SUN**	vítr, pronikavost, **PRVOROZENÁ DCERA**, kohout, stehno, jihovýchod, mezi jarem a létem	
☲	**LI**	oheň a slunce, přitažlivost, **DRUHOROZENÁ DCERA**, slepice, oči, jih, léto	
☱	**TUEJ**	jezero, radost, **NEJMLADŠÍ DCERA**, ovce, ústa, západ, podzim	

Jednotlivým trigramům byly posléze přiřazeny číselné hodnoty. Otci, představovanému třemi jangovými čarami, bylo přiřazeno číslo 9, matce, symbolizované třemi jinovými čarami, číslo 1. Třem synům byla přiřazena čísla 6, 7 a 8, třem dcerám čísla 2, 3 a 4. Neobsazeno zůstává číslo 5. Jeho výsadní postavení popíšeme za chvíli.

Symbolem nebes a jejich dokonalosti byl v Číně odedávna kruh. Co dokonalejšího tedy bylo možno z osmi trigramů utvořit, než kruh, **kruh nebes**! Tento kruh (viz obr. 11) kromě uvedené symboliky plnil zřejmě analogickou roli jako kompasová růžice. Na rozdíl od našich zvyklostí však sever byl dole a jih nahoře. Tím nejvýznamnějším rozdílem oproti nám však byla skutečnost, že Číňané měli směrů pět: sever, jih, východ, západ a **střed**. (Ze školy si jistě pamatujeme, že se Číně říkalo *Říše středu*.) Na čestné místo doprostřed Kruhu nebes byla proto umístěna pětka jako prostřední z čísel 1 až 9.



Obr. 11: *Kruh nebes*

Kruh nebes byl dokonalý: pětka stála uprostřed a součet protilehlých čísel byl vždy deset. Principy jin a jang ve vzájemné polaritě tvořily a představovaly kosmos.

Jakou roli však přisoudit Zemi? Jejím symbolem byl odedávna čtverec, Země byla jakousi reflexí Nebes. Jak tuto skutečnost vyjádřit? Je přece zcela přirozené čísla z *Kruhu nebes* uspořádat do řádků. Obdržíme tak *čtverec Země*, který odráží nebeské vlastnosti.

6	1	2
7	5	3
8	9	4

Obr. 12: *Čtverec Země*

Jak si čtenář jistě okamžitě uvědomil, tento čtverec však není magický. K magickému čtverci však zbývaly již jen poslední dva krůčky. Nejprve si někdo uvědomil, že novou a nečekanou kvalitu získáme, když Čtverec Země otočíme o 180 stupňů. Dostaneme tak čtverec, který dává s původním čtvercem novou kvalitu: nebesa se spojila se Zemí, neboť položíme-li poslední dva čtverce na sebe, tj. čtverec sestavený z čísel *Kruhu nebes* a pootočený *Čtverec Země*, dává součet čísle na každém místě deset. Symbolický obraz Vesmíru se uzavřel.

4	9	8
3	5	7
2	1	6

Obr. 13: Pootočený *Čtverec Země*

Někdy mezi lety 480–221 před Kr. pak byl učiněn poslední krok. V posledním čtverci se prohodila čísla 2 a 8. Tím se sice narušilo původní postavení dětí, vznikla však hodnota mnohem vyššího řádu: MAGICKÝ ČTVEREC. Takto se zrodil čtverec *Lo-šu*, nazývaný v Evropě *Saturn*.

5. Další vývoj magických čtverců v Číně

Ukázali jsme tedy, jak se magické čtverce v souvislosti s *Knihou proměn* objevily. Je však nutno opětovně zdůraznit, že poznatky popisované v minulém odstavci nepatřily mezi veřejně sdělované poznatky.

Byly známy jen úzkému kruhu zasvěcenců a patřily po dlouhá staletí mezi utajované součásti čínské filozofické tradice.

Občas se sice objevily zmínky o tajemných schématech, avšak jejich znázornění nebylo zásadně uváděno. První písemná zmínka o čtverci *Lo-šu* (název *Saturn* Číňané samozřejmě nikdy neužívali) včetně správného rozestavení čísel je až ve spisu *Ta Taj Li-či* v prvním století našeho letopočtu. I tato zmínka byla však výjimečná. Na veřejnost se *Říční mapa* i *Lo-šu* dostaly až někdy v 10. století našeho letopočtu. V té době však již byly zapomenuty podrobnosti jejich vývoje i jejich původní smysl a zůstaly jen legendy o dračím koni a posvátné želvě. Ani v matematických textech z prvního tisíciletí není o magických čtvercích žádná zmínka.

O tom, co vlastně bylo v Číně v tomto období o magických čtvercích známo, víme jen ze spisu *Sü-ku Čaj-ťi suan-fa*, který v r. 1275 uveřejnil čínský historik Jang Hui (asi 1238– asi 1298). (V širší známost tento spis vešel až ve 30. letech 20. století, kdy vyšel jeho anglický překlad.) Jang-Hui sice neměl prakticky žádné matematické znalosti, ve zmíněném spisu však popsal řadu magických čtverců 3.–10. řádu. Jakými konstrukcemi byly tyto čtverce vytvořeny, ovšem nepopsal a rovněž se nevydával za jejich tvůrce.

Některé z jeho čtverců byly ovšem velmi důmyslné. Jako příklad uveďme alespoň čtverec 9. řádu, tzv. *Veliký Lo-šu*, který je, jak název napovídá, odvozen ze čtverce Lo-šu. Jak však již bylo řečeno, uvedenou konstrukci Jang-Hui nepopisuje, je pouze zpětně zrekonstruována.

	0	1	2
0	4	9	2
1	3	5	7
2	8	1	6

Očíslujeme-li řádky i sloupce čtverce Lo-šu čísly 0, 1 a 2 a označíme-li L(i,j) číslo v i-tém řádku a j-tém sloupci, takže například L(1,2) = 7, jsou při analogickém očíslování následujícího Velkého Lo-šu prvky G(i,j) vytvořeny podle pravidla:

G(3a + b, 3c + d) = L(a,c) + 9.[L(b,d) - 1],
kde a,b,c,d = 0, 1, 2 .

Dostaneme tak čtverec

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	31	76	13	36	81	18	29	74	11
1	22	40	58	27	45	63	20	38	56
2	67	4	49	72	9	54	65	2	47
3	30	75	12	32	77	14	34	79	16
4	21	39	57	23	41	59	25	43	61
5	66	3	48	68	5	50	70	7	52
6	35	80	17	28	73	10	33	78	15
7	26	44	62	19	37	55	24	42	60
8	71	8	53	64	1	46	69	6	51

Obr. 14: *Velký Lo-šu*

Např.

G(7,2) = L(2,0) + 9[L(1,2) - 1] = 8 + 9.(7 - 1) = 62

6. Proč se Lo-šu nazývá Saturn

Jak jsme již uvedli, název *Saturn* Číňané nikdy neužívali. V úvodní citaci z [2] je však tento název uváděn jako v podstatě samozřejmý. Je tedy na čase, abychom toto pojmenování vysvětlili. Musíme se však přesunout z Číny do jiné kolébky lidské civilizace, do Mezopotámie.

Toto území mezi Eufratem a Tigridem patří k místům, kde se začaly psát dějiny lidstva. V průběhu tisíciletí tam žily civilizace, o nichž dnes víme řadu věcí a pravděpodobně ještě více toho nevíme: Sumerové, Chetité, Akadové, Asyřané a další. Národy, vlády a říše se střídaly, až v r. 538 př. Kr. se Mezopotámie stala součástí Persie a posléze v r. 331 př. Kr. součástí říše Alexandra Velikého.

Jedním z velkých center na mezopotamském území bylo město Harrán. To přežívalo národy a říše, rozkvěty i zániky jednotlivých kultur a svůj význam si zachovávalo až do 10. století našeho letopočtu. A právě v Harránu se začíná historie pojmenování, jehož kořenů se chceme dopátrat.

Než však popíšeme zrod pojmenování, musíme se ještě zmínit o *Chaldejcích*. Původně to byli semitští kočovníci, kteří se v polovině 9. stol. př. Kr. začali usazovat v jižní Mezopotámii. Posléze v letech 625–539 př. Kr. vytvořili vládnoucí dynastii v novobabylonské říši. Po ovládnutí Mezopotámie Peršany se však původní význam slova Chaldejci začal vytrácet a v průběhu staletí, jak se lze dočíst např. i v bibli, se začali tímto pojmenováním označovat astronomové, astrologové, mágové a alchymisté. Tento význam mělo toto pojmenování i v Harránu.

Chaldejci samozřejmě znali všechny pouhým okem viditelné planety, tj. Merkur, Venuši, Mars, Jupiter a Saturn, a dobře se vyznali v jejich pohybu na obloze. V Harránu byly tyto planety včetně Slunce a Měsíce považovány za božstva a na jejich počest byly vystaveny chrámy. Každý ze sedmi chrámů byl zasvěcen jednomu božstvu a v každém chrámu byl trůn, k němuž vedl jistý počet stupňů. Každému božstvu přitom byl přiřazen jeden kov (je vcelku samozřejmé, že Slunci bylo přiřazeno zlato a Měsíci stříbro) a z tohoto kovu byla zhotovena socha daného boha. Výsledný stav je uveden v následující tabulce:

Planeta, které je zasvěcen chrám	Kov, z něhož je podoba božstva	Počet stupňů k trůnu
Saturn	olovo	9
Jupiter	cín	8
Mars	železo	7
Slunce	zlato	6
Venuše	měď	5
Merkur	rtuť	4
Měsíc	stříbro	3

Tak se tedy poprvé v historii stalo, že planetám byla přiřazena čísla a kovy. Toto přiřazení se vžilo, i když se vytratilo původní zbožštění jednotlivých planet (a Slunce a Měsíce). Příslušným číslům a kovům začaly být přisuzovány různé mystické vlastnosti, jak se o tom ještě později zmíníme. V průběhu staletí však došlo k jedné změně: v uvedené tabulce, která je dnes označována jako systém I, bylo přesně opačně uvedeno pořadí čísel, takže Saturnu bylo přiřazeno číslo 3, Jupiteru 4 atd. Takto vznikl systém II, který byl již ve středověku standardně užíván.

Vzhledem k tomu, že magické čtverce patřily ve středověku a na počátku novověku k velmi častým objektům využívaným a – z dnešního pohledu zneužívaným – v léčebných, magických, astrologických a jiných souvislostech, je vcelku samozřejmé, že počet řádků, resp. sloupců magických čtverců se přímo nabízel jako hodnota příslušející odpovídající planetě a kovu. Čínský čtverec *Lo-šu* tak naprosto zákonitě v evropské tradici získal název *Saturn* (a další čtverce byly samozřejmě pojmenovány analogicky).

7. Magické čtverce v Evropě

Prozatím jsme se zabývali vznikem magických čtverců v Číně a zcela jsme ponechali stranou otázku, kdy a jakým způsobem se vyskytly v jiných částech světa.

Především je nutno zdůraznit, že fakticky není znám jediný pramen, který by dosvědčoval, že Čína v tomto směru překročila svůj vlastní rámec a že by ovlivnila poznatky o magických čtvercích mimo své hranice. Není to známo (i když to není vyloučeno) ani u Indie, tím méně tedy v arabském světě nebo dokonce v Evropě.

Již v úvodu jsme uvedli, že k magickým čtvercům nikdy nedospěla matematika řecká (nebo její předchůdci v Egyptě nebo v Mezopotámii). V neseriózní literatuře lze sice občas nalézt zmínky o magických čtvercích, které znali např. Pýthagorás nebo Archimedes, tyto informace jsou však naprosto nepodložené a – diplomatickým jazykem řečeno – o jejich pravdivosti lze s úspěchem pochybovat.

Prokazatelně dříve než v Evropě byly magické čtverce studovány v arabské literatuře a v Indii. Ani v jednom z těchto případů však nebylo dosaženo mimořádných výsledků, které by bylo nutné nějak podrobněji komentovat. Zmiňme se pouze o tom, že v arabských textech se magické čtverce vyskytují poprvé v tzv. *Traktátech Bratří Čistoty*, které vznikly pravděpodobně ve druhé polovině 10. století.

To, že magické čtverce nesehrály žádnou mimořádnou úlohu ani v Indii, je zajímavé především z toho důvodu, že Indové byli ve všech dobách mimořádnými počtáři. Aritmetika tam vždy převyšovala geometrii. Magické čtverce se přesto v indické matematice objevovaly jen zřídka a nesehrávaly nějakou zvláště významnou roli. Patrně nejstarším indickým magickým čtvercem je čtverec 4. řádu vyřezaný do rámu dveří svatyně *Chotá Surang* pravděpodobně v 1. polovině 11. století.

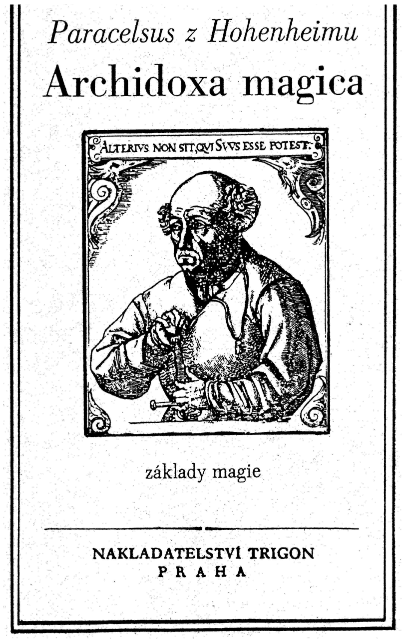
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Tato datace je však krajně nespolehlivá. V Indii rovněž vznikla metoda, která se většinou připisuje jistému de Louberovi, o níž se zmíníme později.

Obraťme tedy pozornost k Evropě. Jak jsme již uvedli, sehrály magické čtverce roli nejen v matematice jako takové, ale z mnoha důvodů především mimo matematiku. Metody, které u nás dnes mohou budit snad jen úsměv, patřily ve středověku a v období renesance k výbavě i těch nejrenomovanějších vědců. Připomeňme za mnohé, že například Kepler (1571–1630) se zcela vážně zabýval sestavováním horoskopů a Newton (1643–1727), o čemž se dnes moc nemluví, byl vášnivým alchymistou.

Za mnohé případy, kdy magické čtverce sehrávaly tuto „nematematickou“ roli, uveďme alespoň jeden.

Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493–1541) patří k významným osobnostem 15. století. Pokud jste o něm nikdy neslyšeli, tak pravděpodobně proto, že je znám především pod jménem PARACELSUS. Tento německý lékař, filozof, přírodovědec, alchymista, astrolog atd. patří k průkopníkům „léčení“ pomocí hornin a minerálů. Nás však zajímá jeho dílo *Archidoxa magica*, které je dokonalou ukázkou „léčebného“ užití magických čtverců.



Paracelsus z Hohenheimu

Archidoxa magica

ALTERIVS NON SIT, QVI SVVS ESSE POTEST.

základy magie

NAKLADATELSTVÍ TRIGON

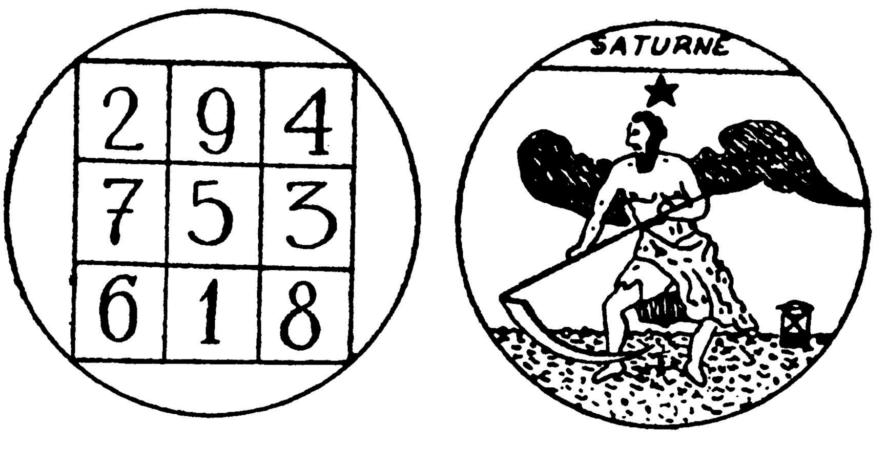
PRAHA

Obr. 15: Titulní strana českého překladu díla *Archidoxa magica*

V této práci jsou, kromě jiného, uvedeny návody na zhotovení léčebných pečetí, jejichž nedílnou a podstatnou součástí jsou právě magické čtverce. Na ukázku na obrázcích 16 a 17 uvádíme dvě z těchto pečetí.

Pečeť Saturnova.

Pečeť tato musí býti zhotovena z čistého a jemného olova z Villachu, a to tak, aby na jedné straně pečeti vryt byl do jejího obvodu čtverec. Čtverec rozdělí se dvěma svislými a dvěma vodorovnými čarami na devět stejných čtverečků, z nichž do každého vepíše se číslo tak, aby čísla po sečtení všemi směry dávala součet 15. Na druhou stranu pečeti vryje se obraz planety, totiž starého muže s kosou v postoji, jakoby sekal trávu na zemi. Nad jeho hlavou hvězda a nahoře jméno — Saturnus.

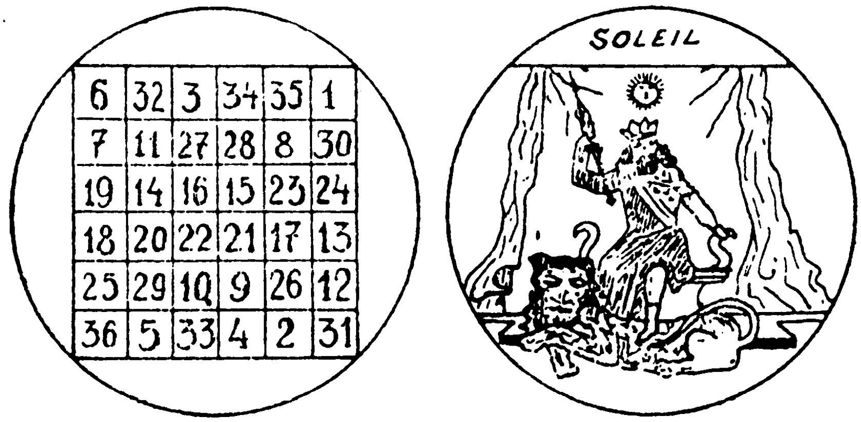


Obr. 16: *Pečeť Saturnova*

arunu.

Pečeť Slunce.

Hotoví se z nejlepšího a nejhledanějšího zlata arabského nebo maďarského. Na jedné straně opět čtverec, tentokráte 5 podélními i příčinými čarami na 36 čverečků rozdělený. Součet čísel v nich vepsaných činí 111. Věztež, že čísla, skrytá ve všech pečetěch, jsou čísly ostatních hvězd, oné planetě poddaných a od Boha přidělených, jak je vykládáme ve své knížce »O h v ě z d á c h«. Planeta nazvývá se předchůdce, neboli hvězda první. Proto se hodí, aby měla podřízené hvězdy, které by řídila.



Obr. 17: *Pečeť Slunce*

Vraťme se však nyní k evropské matematice.

Jak známo, po zániku antiky nastalo v Evropě dlouhé období útlumu. Středověká Evropa kulturou a vzdělaností, alespoň v prvním období, neoplývala. Poměry se začaly pomalu měnit zhruba od 11.–12. století. Za to, že vědecký odkaz antiky, včetně matematiky, nebyl zcela zapomenut, vděčíme arabské kultuře a vědě. Arabové, kromě vlastních vědeckých poznatků, pořídili množství překladů řecké vědecké literatury a řada spisů, včetně např. Eukleidových *Základů*, se nám dochovala jen díky těmto překladům.

Rozvíjející se evropská věda těchto arabských poznatků výrazně využívala a čerpala z nich. Zdá se tedy více než pravděpodobné, že i znalost magických čtverců v Evropě pochází z arabských pramenů.

Různé drobné zmínky o magických čtvercích lze sice nalézt i dříve; první evropským matematikem, který se jim však věnoval systematičtěji, byl Luca Pacioli (asi 1445–1514). Ten někdy kolem roku 1500 uveřejnil práci, v níž se hovořilo o magických čtvercích třetího až devátého řádu jako o objektech „rekreační" matematiky. Čtverce samotné však v práci nebyly uvedeny.

Z významnějších evropských matematiků se jimi zabývali především Adam Ries (1492–1559) a Michael Stifel (asi 1487–1567). Oba popsali některé originální konstrukce magických čtverců. Překvapivé však je, že magickými čtverci se zabýval i nejvýznamnější matematik 18. století a podle mínění mnoha (včetně autora tohoto textu) nejgeniálnější matematik všech dob, Leonhard Euler (1707–1783).

Euler objevil překvapivou souvislost *magických* a *latinských* čtverců. (Latinské čtverce jsou čtvercové matice, která v každém řádku a sloupci obsahují permutaci dané konečné množiny.) Odvodil, že když se sestrojí magický čtverec lichého řádu „vhodným způsobem", lze z něj odvodit dvojici tzv. *ortogonálních* latinských čtverců (podrobněji o této problematice viz v [7]).

Zmíněný „vhodný způsob" je následující: vepíšeme číslo 1 doprostřed prvního řádku. Máme-li již vepsáno číslo n, napíšeme číslo $n+1$ o jeden řádek výše a jeden sloupec doprava, přičemž „nad" prvním řádkem je poslední řádek a „vpravo" od posledního sloupce je první sloupec. Pokud je přitom místo, na něž máme vepsat $n+1$ již obsazeno, napíšeme $n+1$ pod číslo n.

Když takto například zkonstruujeme čtverec 5. řádu, obdržíme čtverec na obr. 18.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. 18: *Magický čtverec 5. řádu*

Euler bývá často označován za objevitele popsané konstrukce magických čtverců, což se však nezakládá na pravdě. Tuto metodu popsal již francouzský diplomat SIMON DE LA LOUBERE, který působil jako velvyslanec v Siamu. Ani ten však není jejím objevitelem, neboť ji poznal, jak jsme se již zmínili, při svých cestách po Indii. Je tedy vcelku pikantní, že v literatuře se tato metoda nazývá *Eulerova*, resp. *Louberova* nebo nejčastěji *siamská*.

Jako jistou kuriozitu uveďme, že Euler, který se zřejmě často zabýval i úlohami rekreační matematiky, nalezl důmyslné řešení problému, *zda může šachový kůň postupně projít všechna pole na šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou.* Zapíšeme-li Eulerovo řešení tak, že kůň skáče z pole označeného n na pole $n+1$, obdržíme čtverec

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Obr. 19: *Cesta šachového koně*

Eulerovo řešení je mimořádně důmyslné. Nejen že popisuje cestu šachového koně, ale uvedený čtverec je *polomagický* (součet řádků i sloupců je 260, neplatí to však pro součet úhlopříček). V mimořádném světle se nám však tento Eulerův výsledek zjeví, když si uvědomíme, že ho odvodil zpaměti, v době, kdy již byl dávno slepý.

Poznamenejme, že k dokonalosti dovedl Eulerův výsledek v r. 1862 šachista Jaenisch. Ten nalezl řešení uvedené na obr. 20.

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Obr. 20: *Jaenischovo řešení úlohy o šachovém koni*

Toto řešení, kromě toho, že rovněž tvoří polomagický čtverec, má další vlastnost: kůň může z pole 64 skočit znovu na pole 1, tj. po ukončení cesty se vrátit na pole výchozí. V terminologii teorie grafů to značí, že graf, jehož uzly jsou pole šachovnice a dvě pole jsou spojena hranou právě tehdy, když z jednoho na druhé může skočit kůň, je *hamiltonovský*. Jaenischovo řešení pak popisuje *hamiltonovskou kružnici* v uvedeném grafu.

V průběhu let se objevovaly v literatuře magické čtverce nejrůznějších vlastností. Jako jeden z takových zajímavých výsledků uveďme magický čtverec 8. řádu, který sestrojil známý americký vědec a politik Benjamin Franklin (1706–1790) – viz obr. 21. Tento čtverec je tzv. *supermagický*: když ho rozdělíme na 4 bloky o 4 řádcích a 4 sloupcích, je každý z těchto bloků *pseudomagický*, tj. součet každého řádku a každého sloupce v těchto blocích je 130, avšak jednotlivé bloky nejsou složeny z čísel 1, 2, ..., 16.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	6	4	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Obr. 21: *Franklinův supermagický čtverec*

8. Magické čtverce v umění

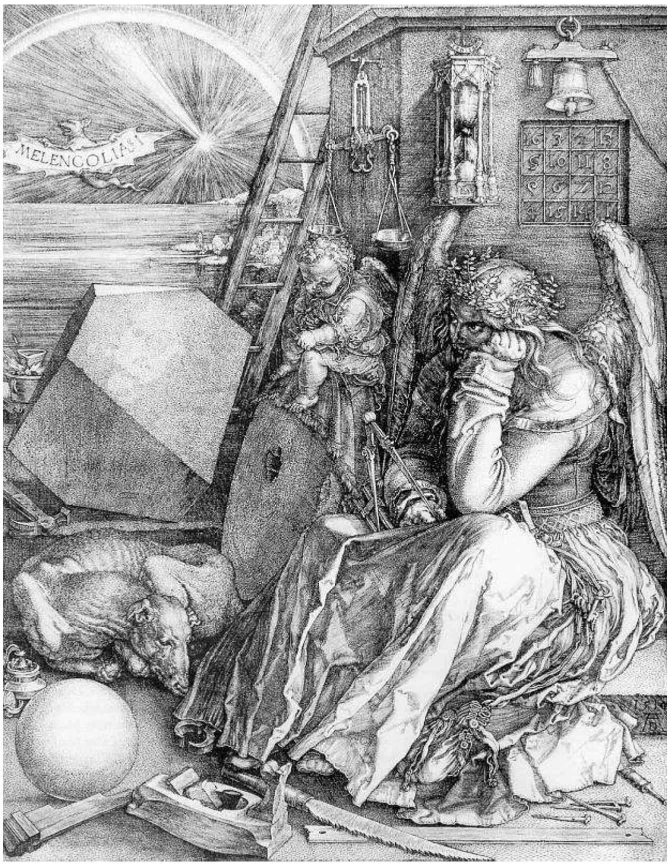
Je nepochybné, že magické čtverce v sobě ukrývají i nezanedbatelnou estetickou hodnotu. Není proto překvapivé, že je lze vystopovat i v umění, zejména pak výtvarném.

Prakticky žádná práce na toto téma neopomíjí jedno z nejznámějších děl čelného německého malíře Albrechta Dürera (1471–1528), rytinu *Melencolia I* (viz obr. 22).

Název neznamená melancholii, ale spíše *zamyšlení*. Na obrázku je řada matematických objektů či symbolů, o jejichž smyslu toho bylo mnoho napsáno. Nás však zajímá magický čtverec umístěný vpravo nahoře.

Jak se Dürer k magickým čtvercům dostal a ke čtverci na obraze zejména? I o tom existuje řada teorií, mnohdy velmi podivných a fantaskních. Skutečné vysvětlení je však pravděpodobně velmi prosté.

Dürer hodně cestoval a dlouhou dobu strávil v Itálii. Je dobře známo, že se o matematiku, zejména o geometrii, intenzívně zajímal, především v souvislosti se studiem perspektivy. Je více než pravděpodobné, že se v Itálii seznámil s Pacioliho prací, o níž jsme se již



Obr. 22: Albrecht Dürer: *Melencolia I*

zmiňovali. Čtverec z obrazu je totiž v Pacioliho práci uveden. Že magické čtverce Dürera zaujaly, není překvapivé; že ho nutně zaujal, resp., že právě uvedený čtverec později použil, je přitom téměř samozřejmé. Když si čtverec prohlédneme pozorněji (viz obr. 23), zaujmou nás čísla ve spodním řádku uprostřed.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

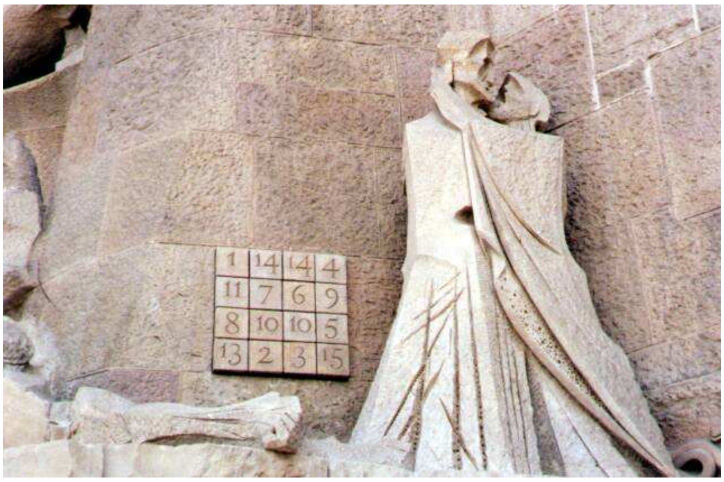
Obr. 23: *Dürerův magický čtverec*

V r. 1514 totiž zemřela Dürerova matka a pravděpodobně v témže roce rytina i vznikla. Symbolika tohoto magického čtverce se tedy přímo nabízela.

Uveďme na závěr ještě alespoň jeden ze soudobých příkladů.

Je pravděpodobné, že některý z čtenářů stál před objektem, jehož část je na obr. 24.

Na obrázku je výjev ze stěny proslulé Gaudího barcelonské katedrály. A na stěně vidíme mírně pozměněný magický čtverec čtvrtého řádu, odvozený z Dürerova čtverce. Proč je tato změna provedena? To je přece zřejmé: aby součty dávaly tzv. Kristova léta, tj. 33.



Obr. 24: *Gaudího katedrála v Barceloně.*

* * *

Uzavřeli jsme putování historií magických čtverců. Do jaké míry odpovídá skutečnosti? Možná má pravdu *Lao-c'*, když říká: *Kdo ví, nemluví; kdo mluví, neví.* V komentářích k I-ťing však lze nalézt i optimističtější slova: *Jednou jin a jednou jang, tomu se říká Cesta. V pokračování je dokonalost, v naplnění je přirozenost. Lidský člověk je vidí a nazve lidskostí, vědoucí člověk vidí a nazve je moudrostí.*

Literatura

[1] J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky,* in: J. Bečvář – E. Fuchs (eds.): Historie matematiky I, Brno 1994, str. 21-101.

[2] C. Berge: *Principles of Combinatorics,* Academic Press, New York – San Francisco – London, 1971.

[3] E. Fuchs: *Co ještě nevíme o přirozených číslech: Některé vlastnosti prvočísel,* Učitel matematiky 7 (1998), 1-8.

[4] E. Fuchs: *O hledání velkých prvočísel,* Učitel matematiky 7 (1999), 129-136.

[5] E. Fuchs: *Od dokonalých čísel k Fermatovým prvočíslům,* Učitel matematiky 7 (1999), 193-200.

[6] E. Fuchs: *Některé slavné hypotézy,* Učitel matematiky 7 (1998), 193-200.

[7] E. Fuchs: *Diskrétní matematika pro učitele,* Brno 2001.

[8] M. Gardner: *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American,* Chicago, University of Chicago Press, 1984.

[9] R. K. Guy: *Unsolved Problems in Number Theory,* 2nd ed., New York, Springer-Verlag, 1994.

[10] V. Karpenko: *Tajemství magických čtverců,* Půdorys Praha, 1997.

[11] O. Král: *I-ťing - Kniha proměn,* Maxima Praha, 1995.

[12] R. Wilhelm: *I-ťing. Kniha proměn - text a rozšiřující materiály,* Portál Praha, 2003.

DŮKAZY BEZE SLOV[1]

Jaromír Šimša

Mnohé důležité výsledky z různých oblastí elementární i vyšší matematiky (aritmetika, algebra, geometrie, infinitezimální počet) lze odůvodnit nápaditými vyobrazeními, které prakticky nepotřebují žádný doplňující výklad nebo vysvětlení. Pro takový druh argumentace pomocí geometrických obrázků, schémat nebo diagramů se v amerických časopisech pro popularizaci matematiky vžilo označení *důkaz beze slov*, kterým rovněž uvádíme náš příspěvek. Pod stejným názvem vyšly nedávno zajímavé knižní publikace [3] a [4], v nichž autor *Roger B. Nelsen* shromáždil a tématicky uspořádal kolekci těch nejzajímavějších ukázek, které se za poslední tři desetiletí ve zmíněných časopisech objevily.

Z široké škály námětů z Nelsenových knížek jsme pro tento příspěvek vybrali a podrobněji posoudili dvě témata, která jsou tradiční a neodmyslitelnou součástí osnov středoškolských kursů matematiky. Věříme, že neobvyklé obrázky a přístupy pomohou učitelům zpestřit osvědčené postupy při výuce obou témat a oživit všeobecný zájem studentů o matematické učivo. Nezastíráme, že se touto cestou vracíme k tomu cennému z historie vyučování matematiky, co bylo pod vlivem modernizačních reforem a požadavku časové efektivnosti výuky odsunuto do zapomnění.

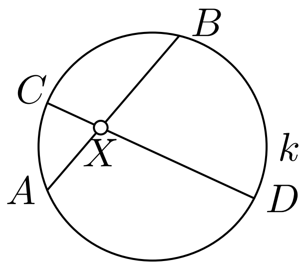
Obě části příspěvku vyšly ve školním roce 2002/2003 jako samostatné články v časopise *Učitel matematiky* a jsou zde (se souhlasem redakce) přetištěny v prakticky nezměněném znění.

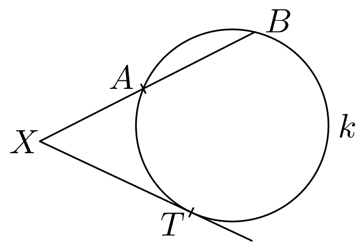
Důkazy kvadratických vět o trojúhelníku pomocí mocností bodů ke kružnicím

V této části příspěvku ukážeme, že Pythagorova věta a Euklidovy věty o výšce a o odvěsně pravoúhlého trojúhelníku jsou, stejně jako kosinová věta pro obecný trojúhelník, bezprostředními důsledky *věty o mocnosti bodu ke kružnici*, která patří k běžnému planimetrickému

[1] Redakční poznámka: Název přednášky navozoval některým účastníkům (včetně autora přednášky a editora A.T.) text písně M. Hlavsy …básníci beze slov ….

učivu čtyřletých gymnázií (viz [5], str. 81–84). Tuto větu „o mocnosti" nejdříve připomene dvěma obrázky. Na levém z nich je bod X průsečík libovolných dvou tětiv AB a CD kružnice k, zatímco na pravém obrázku je bod X průsečík prodloužené tětivy AB kružnice k a její tečny s bodem dotyku T.





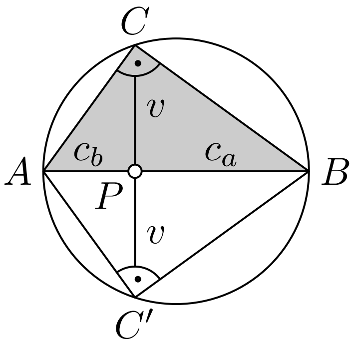
$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD|$ $\qquad$ $|XT|^2 = |XA| \cdot |XB|$

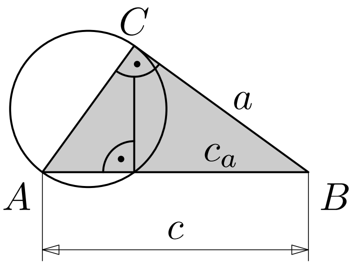
Připomeňme, že zdůvodnění uvedených rovností není složité a nevyužívá žádných pouček, které budeme naopak dále pomocí věty o mocnosti dokazovat (v opačném případě by se jednalo o nechvalně proslulé *dokazování v kruhu.*) Obě rovnosti můžeme totiž přepsat do tvarů úměr

$$|XA| : |XD| = |XC| : |XB| \quad \text{a} \quad |XT| : |XA| = |XB| : |XT|,$$

které plynou z dvojic podobných trojúhelníků XAC, XDB respektive XAT a XTB, přitom jejich podobnost plyne z vlastností obvodových a úsekových úhlů v kružnici (nezávislých na větách o velikostech stran trojúhelníků).

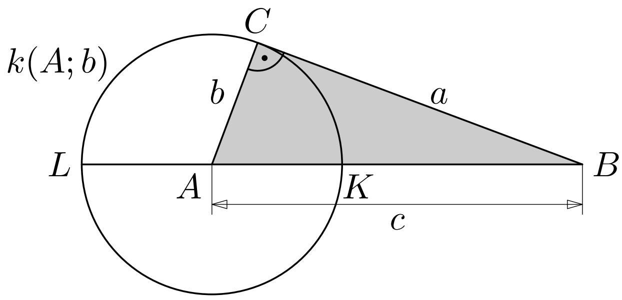
Na dalším obrázku vlevo vidíte důkaz Euklidovy věty o výšce pravoúhlého trojúhelníku (pomocí mocnosti její paty k Thaletově kružnici nad přeponou). Obrázek vpravo dokazuje Euklidovu větu o odvěsně (pomocí Thaletovy kružnice nad druhou odvěsnou trojúhelníku). Oba obrázky také najdete ve cvičeních z učebnice [5].





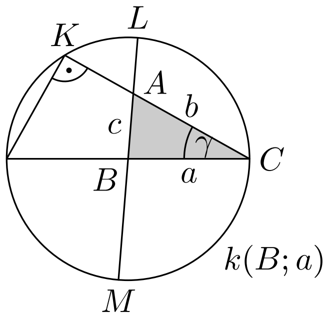
$$\begin{aligned} |PC|\cdot|PC'| &= |PB|\cdot|PA| \\ v^2 &= c_a\cdot c_b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |BC|^2 &= |BP|\cdot|BA| \\ a^2 &= c_a\cdot c \end{aligned}$$

K důkazu Pythagorovy věty využijeme podle následujícího obrázku kružnici, která má střed v jednom z krajních bodů přepony zkoumaného pravoúhlého trojúhelníku a dotýká se jeho protilehlé odvěsny.



$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |BK|\cdot|BL| \\ a^2 &= (c-b)(c+b) \\ c^2 &= a^2+b^2 \end{aligned}$$

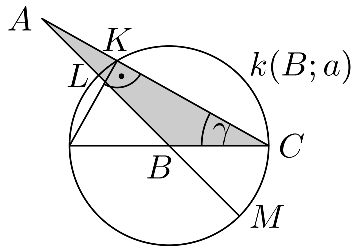
Přejdeme nyní k důkazu kosinové věty, při kterém využijeme obvyklé označení stran a úhlů obecného trojúhelníku. Rovnost $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ dokážeme nejprve obrázkem v situaci, kdy je splněna podmínka $2a\cos\gamma > b$:



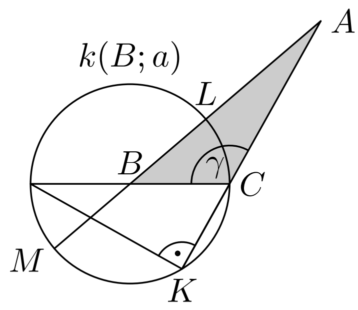
$$\begin{aligned} |CK| &= 2a\cos\gamma \\ |AL|\cdot|AM| &= |AC|\cdot|AK| \\ (a-c)(a+c) &= b(2a\cos\gamma - b) \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Také v ostatních dvou případech, které vidíte na následující dvojici obrázků, můžeme vztah $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ odvodit z rovnosti součinů $|AL|\cdot|AM|$ a $|AC|\cdot|AK|$; přesvědčete se o tom sami.

Případ $b \geq 2a\cos\gamma \geq 0$:



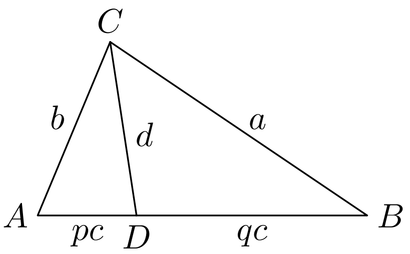
Případ $\cos\gamma < 0$:

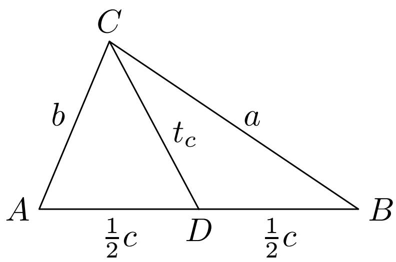


Méně známou pončkou, ve které vystupují „kvadráty“ vzdáleností bodů obecného trojúhelníku, je tzv. *Stewartův vzorec*:

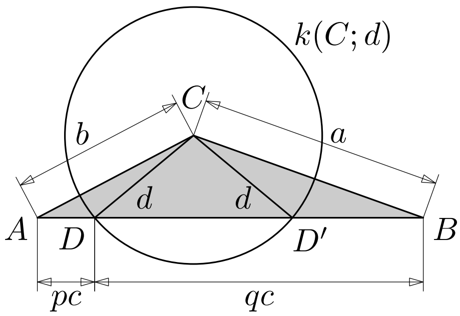
$$d^2 = pa^2 + qb^2 - pqc^2 \tag{S}$$

pro délku CD příčky CD trojúhelníku ABC, kde D je libovolný bod strany AB. Písmena a, b, c ve vzorci (S) značí jako obvykle délky stran trojúhelníku a koeficienty p, q ($p, q \geq 0$, $p + q = 1$) jsou čísla určená rovnostmi $|AD| = pc$ a $|BD| = qc$. (Pro $p = q = 1/2$ plyne z (S) vzorec $t_c^2 = (a^2 + b^2)/2 - c^2/4$.)





Stewartův vzorec (S) odvodíme z mocností vrcholů A, B ke kružnici k, která má střed ve vrcholu C a poloměr $d = |CD|$. Označme D' druhý průsečík kružnice k s přímkou AB (jde-li o tečnu, položíme $D' = D$) a proveďme důkaz pro případ, kdy bod D' leží mezi body A a B (sami promyslete, co se v následujícím důkazu změní, padne-li bod D' vně úsečky AB).

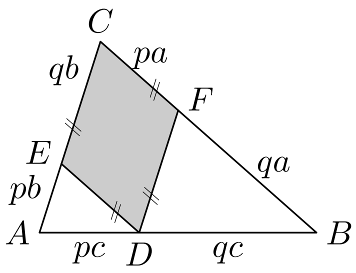


$$
\begin{aligned}
b^2 - d^2 &= |AD| \cdot |AD'| = pc \cdot |AD'| \\
a^2 - d^2 &= |BD| \cdot |BD'| = qc \cdot |BD'|
\end{aligned}
$$

Sečteme-li q-násobek první rovnice s p-násobkem rovnice druhé, dostaneme:

$$\begin{aligned} q(b^2-d^2)+p(a^2-d^2) &= pqc\left(|AD'|+|BD'|\right), \\ pa^2+qb^2-(p+q)d^2 &= pqc^2, \\ d^2 &= pa^2+qb^2-pqc^2. \end{aligned}$$

K dokázanému vzorci (S) dodejme ještě jednu zajímavost. Zvolíme-li podle daného bodu $D \in AB$ body $E \in AC$ a $F \in BC$ tak, aby čtyřúhelník $CEDF$ byl rovnoběžník, budou trojúhelníky ABC, ADE, DBF podobné a úsečky na hranici trojúhelníku ABC budou mít délky uvedené na následujícím obrázku.



Pomocí délek z posledního obrázku můžeme Stewartův vzorec zapsat ve tvaru

$$|CD|^2 = |CF|\cdot|CB| + |CE|\cdot|CA| - |DA|\cdot|DB|.$$

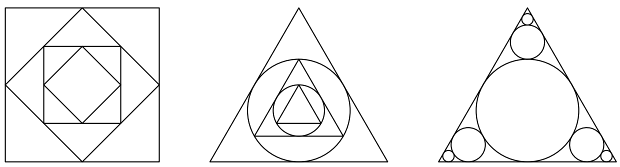
Všechny tři součiny napravo můžeme interpretovat jako mocnosti a Stewartův vzorec vyjádřit rovností

$$|CD|^2 = \mathcal{M}(C;k_{DBF}) + \mathcal{M}(C;k_{ADE}) + \mathcal{M}(D;k_{ABC}), \qquad \text{(S')}$$

kde $\mathcal{M}(X;k_{PQR})$ značí mocnost bodu X ke kružnici opsané trojúhelníku PQR.

Geometrie geometrických posloupností

Změříme-li v několika stejných časových odstupech hodnoty některé veličiny, jež pravidelně roste či ubývá, vytvoří naměřená čísla v nejjednodušších případech *aritmetickou* nebo *geometrickou* posloupnost. Proto jsou oba zmíněné druhy posloupností tradičním tématem středoškolské matematiky. Při jeho výuce se zaměřujeme na to, aby žáci bezpečně ovládli „kalkulus" těchto posloupností (založený na různých vzorcích pro jejich členy či jejich součty) a aby se naučili tyto vztahy užívat v praktických situacích; v případě geometrických posloupností jde především o náměty z finanční matematiky (viz [2]). Pouze okrajově předkládáme žákům úlohy o posloupnostech geometrických útvarů, které jsou navzájem podobné a svým umístěním vytvářejí „ornamenty", jaké kupříkladu vidíte na následujícím obrázku.



V této části příspěvku ukážeme, že obvyklý (ryze algebraický) výklad základních vlastností geometrických posloupností lze obohatit o geometrické interpretace, které mohou přispět k větší názornosti a přitažlivosti výuky. Věříme, že netradiční obrázky zaujmou nejen učitele, kteří po řadu let uvykli vyučovat dané téma ustáleným (učebnicovým) postupem, ale i jejich zvídavé žáky.

Jak víme, číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, jestliže existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené n platí rovnost $a_{n+1} = a_n \cdot q$; číslu q pak říkáme *kvocient* dané posloupnosti. Taková posloupnost je určena prvním členem a_1 a kvocientem q; její obecný člen a_n má vyjádření $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Z dalších úvah vyloučíme nezajímavou situaci, kdy $a_1 = 0$ nebo $q = 0$. Pokud platí $a_2 \neq 0$ (tedy $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$), není žádný člen a_n dané geometrické posloupnosti roven nule; přitom posloupnost nenulových čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, právě když pro každé přirozené n platí úměra

$$a_{n+2} : a_{n+1} = a_{n+1} : a_n. \tag{1}$$

Změníme-li znaménko prvního členu geometrické posloupnosti, změní se znaménka všech jejích dalších členů; s ohledem na zamýšlené konstrukce budeme proto předpokládat, že první člen a_1 je *kladné číslo* (které pro jednoduchost označíme a). Nebudeme se však vyhýbat geometrickým posloupnostem se *záporným kvocientem*, který (namísto obvyklého q) označíme $-q$. Libovolná posloupnost s kladným kvocientem tedy bude mít členy

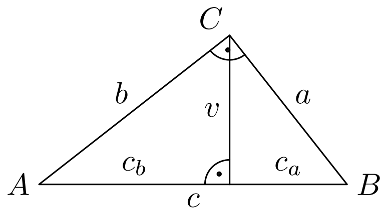
$$a_1 = a,\ a_2 = aq,\ a_3 = aq^2,\ a_4 = aq^3,\ a_5 = aq^4, \ldots, \tag{2}$$

zatímco členy posloupnosti se záporným kvocientem budou čísla

$$a_1 = a,\ a_2 = -aq,\ a_3 = aq^2,\ a_4 = -aq^3,\ a_5 = aq^4, \ldots; \tag{3}$$

písmena a, q v obou případech označují kladná čísla.

Jaký je původ názvu „geometrická posloupnost"? Pro odpověď se musíme přenést do antického Řecka, jehož matematikové vyjadřovali veškerá kladná (racionální i iracionální) čísla délkami úseček a jejich poměry (o příslušné *Eudoxově teorii proporcí* viz např. [1] nebo [6]). Uveďme jeden příklad.

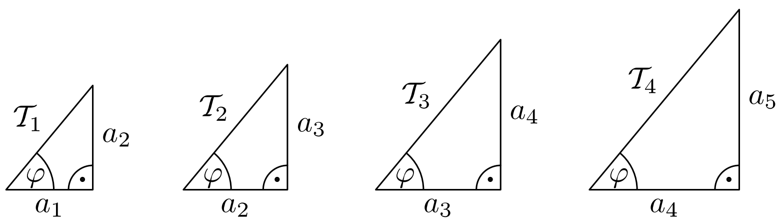


$$\begin{aligned} v^2 &= c_a \cdot c_b & \qquad a^2 &= c_a \cdot c \\ c_a : v &= v : c_b & \qquad c_a : a &= a : c \end{aligned}$$

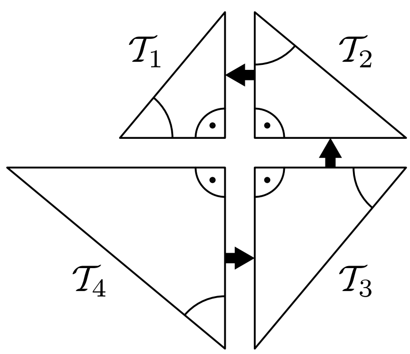
Známé Eukleidovy věty o výšce a odvěsně pravoúhlého trojúhelníku jsme pod obrázkem zapsali nejen obvyklými „kvadratickými" rovnostmi, ale též úměrami, jež v jazyce Eukleidových *Základů* znamenají, že každá z trojic (c_a, v, c_b) a (c_a, a, c) tvoří *geometrickou úměru o třech členech*. V dnešní terminologii bychom podle pravidla (1) spíše řekli, že jde o *trojčlenné geometrické posloupnosti*. I když se starořečtí matematikové často zabývali pouze geometrickými úměrami o třech nebo čtyřech členech, položili tím pevné základy budoucí teorie geometrických posloupností o libovolném (dokonce nekonečném) počtu členů.

Inspirováni Eukleidovými větami o pravoúhlém trojúhelníku se nyní podíváme, do jaké rovinné „konfigurace“ lze výhodně uspořádat posloupnost úseček, jejichž délky tvoří předem danou geometrickou posloupnost (2). Z rovností $a_{n+1} : a_n = q$, $n = 1, 2, \ldots$, plyne, že pravoúhlé trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ s dvojicemi odvěsen (a_n, a_{n+1}) jsou všechny navzájem podobné. Tyto trojúhelníky nás budou v dalším textu neustále provázet; označíme symbolem φ ten jejich ostrý vnitřní úhel, který je určen rovností

$$\varphi = \arctan q = \arctan \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

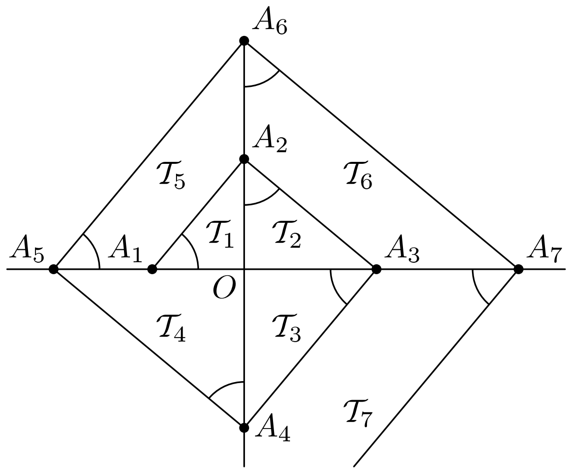


Při první konstrukci trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ postupně „slepíme“ podél shodných odvěsen způsobem patrným z dalšího obrázku (pro přehlednost jsou na něm nakresleny pouze první čtyři trojúhelníky):



Protože jsme zvolili případ $q > 1$, tak po slepení trojúhelník $\mathcal{T}_5$ překryje trojúhelník $\mathcal{T}_1$, trojúhelník $\mathcal{T}_6$ překryje trojúhelník $\mathcal{T}_2$ atd.

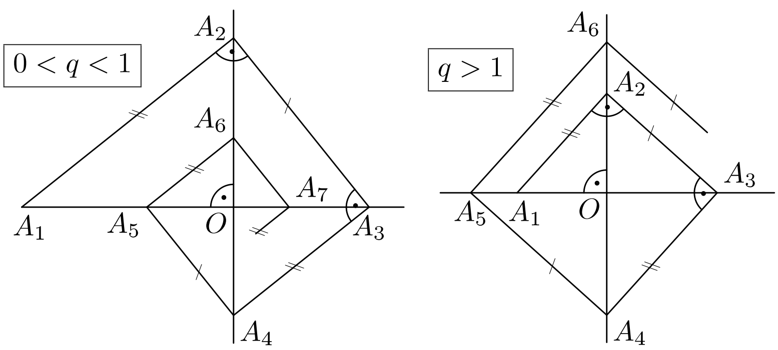
Všechny slepené trojúhelníky mají společný vrchol označený písmenem O, jejich přepony vytvářejí „pravoúhle lomenou“ čáru



$A_1A_2A_3\ldots$, která se „navíjí“ na dvě navzájem kolmé přímky. Zdůrazněme, že zmíněnou lomenou čáru $A_1A_2A_3\ldots$ snadno sestrojíme (postupnou konstrukcí „následných“ kolmic), stačí jen znát její první dva vrcholy A_1, A_2 určené podmínkami

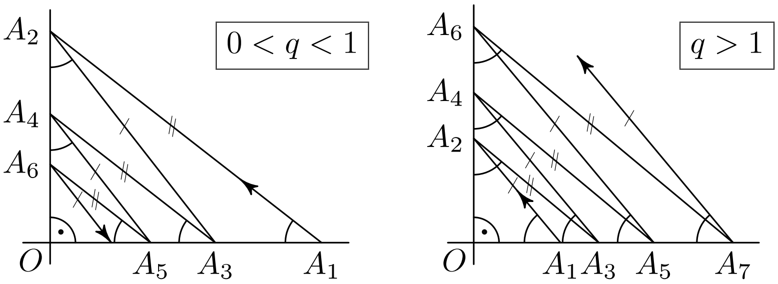
$$|OA_1| = a_1 = a \quad \text{a} \quad |OA_2| = a_2 = aq.$$

Prohlédněte si na dalším obrázku, jak se lomená čára $A_1A_2A_3\ldots$ „svinuje“, respektive „rozvíjí“ podle toho, zda $0 < q < 1$ či $q > 1$.



$$|OA_n| = aq^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Lomenou čáru $A_1A_2A_3\ldots$ jiného druhu dostaneme, když trojúhelníky $\mathcal{T}_n$ slepíme podél společných odvěsen nikoliv „vedle sebe“, ale „přes sebe“:



(Obloučky jako dříve vyznačují shodné úhly velikosti $\varphi = \arctan q$.)
Přejdeme nyní ke geometrickému posouzení otázky, která je v celém tématu geometrických posloupností snad nejdůležitější. Jedná se o výpočet součtu

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

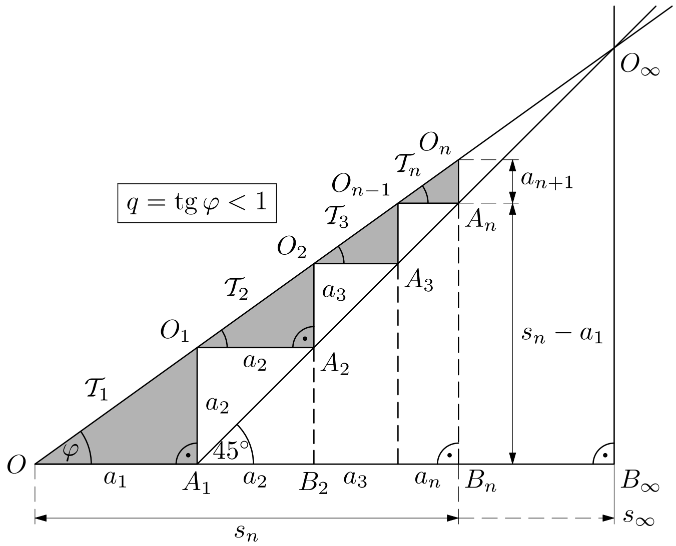
prvních n členů dané posloupnosti; za předpokladu $q \neq 1$ odvodíme vzorec

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \tag{4}$$

Podotkněme nejdříve, že dosud sestavené lomené čáry $A_1A_2A_3\ldots$ nejsou ke sčítání délek $aq^{n-1} = |OA_n|$ příliš uzpůsobené, neboť úsečky OA_1, OA_3, OA_5,… a úsečky OA_2, OA_4, OA_6,… leží ve dvou různých (kolmých) směrech. Objevíte vhodnější umístění základních trojúhelníků $\mathcal{T}_n$, kdy příslušné odvěsny OA_n mají týž směr a jejich projekce na přímku tohoto směru na sebe „navazují“?

Podle takového obrázku je možné odvodit součtový vzorec (4) názorně a snadno. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku $A_1B_nA_n$ mají shodné délky $|B_nA_n| = |B_nA_1| = a_2 + a_3 + \ldots + a_n = s_n - a_1$, takže $|B_nO_n| = |B_nA_n| + |A_nO_n| = (s_n - a_1) + a_{n+1}$, zároveň však z trojúhelníku OB_nO_n vidíme, že $|B_nO_n| = |OB_n| \cdot \tan\varphi = s_n \cdot q$; porovnáním vychází rovnost $(s_n - a_1) + a_{n+1} = s_n \cdot q$, neboli $s_n(q-1) = a_{n+1} - a_1 = a(q^n - 1)$, odkud již plyne (4).

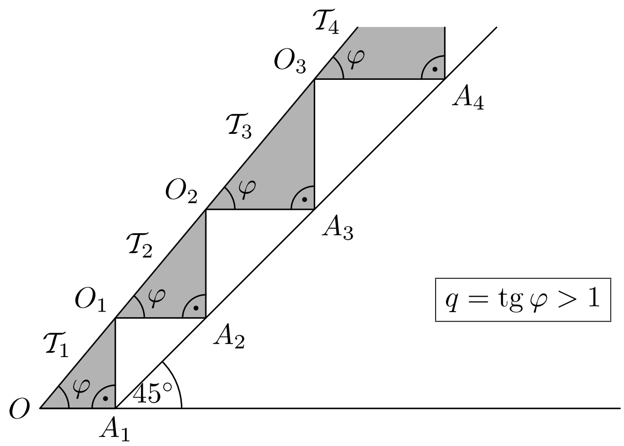
Vzorec (4) jsme odvodili geometrickou cestou v situaci, kdy (kladný) kvocient q dané posloupnosti splňuje podmínku $q < 1$; z našeho obrázku je rovněž dobře vidět, že posloupnost hodnot s_n má v tomto (konečnou) limitu $s_\infty = |OB_\infty|$. Podobně jako dříve získáme rovnici $s_\infty - a_1 = s_\infty \cdot q$, ze které okamžitě plyne vzorec pro *součet*



geometrické řady

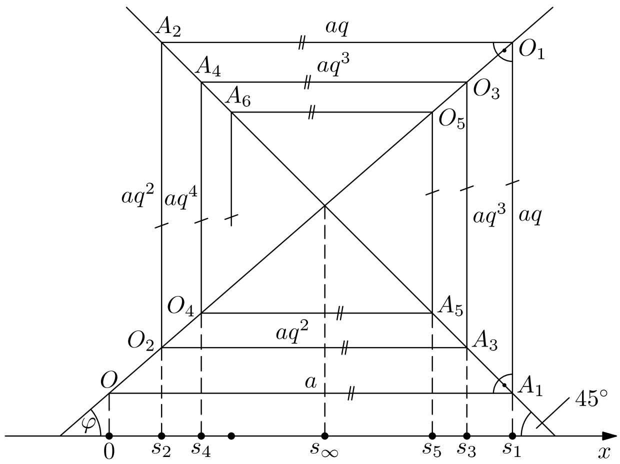
$$s_\infty = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \frac{a}{1-q}. \tag{5}$$

Uvědomte si, že naše odvození vzorce (4) je možno beze změny přenést i na případ $q > 1$, kdy se však polopřímky OO_1 a A_1A_2 „rozbíhají“, takže posloupnost hodnot s_n diverguje.



Ukázali jsme, že ke sčítání členů a_n geometrické posloupnosti s *kladným* kvocientem lze využít „pravoúhle lomenou“ čáru $OA_1O_1A_2O_2\ldots$, jejíž jednotlivé úseky mají délky a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, $\ldots$ a směřují střídavě „doprava“ a „nahoru“.

Členy a_n geometrické posloupnosti se *záporným* kvocientem mění pravidelně znaménka tak, jak je uvedeno v zápise (3). Můžeme je geometricky sečíst na *číselné ose*, sestrojíme-li vhodně obměněnou lomenou čáru $OA_1O_1A_2O_2\ldots$, jejíž úseky budou mít stejné délky jako dříve, budou však směřovat střídavě „doprava“, „nahoru“, „doleva“ a „dolů“. Prohlédněte si nejprve obrázek pro posloupnost (3) se záporným kvocientem $-q$ v situaci, kdy $q < 1$. Uvidíte v něm opět „slepenec“ trojúhelníků $\mathcal{T}_n$, které jsme tentokrát nevyznačili?



Body O, O_1, O_2,... a body A_1, A_2, A_3, $\ldots$ tvoří (stejně jako dříve) dvě skupiny kolineárních bodů a přímky jimi určené svírají s osou x úhly $\varphi = \arctan q$, respektive $45°$. Na ose x jsme vyznačili několik prvních součtů s_n, které jsou nyní tvaru

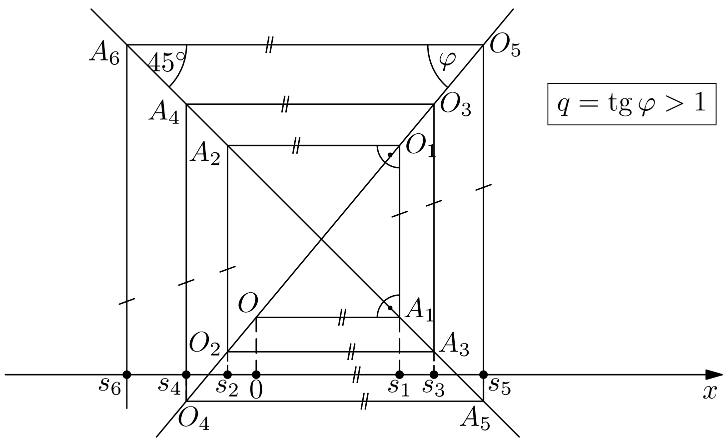
$$s_n = a - aq + a^2 - aq^3 + \ldots + (-1)^{n-1}aq^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Obdobně jako dříve zdůvodníme, proč pro každé n platí rovnost $(a - s_n) - (-1)^n aq^n = s_n \cdot q$, z níž plyne vzorec

$$s_n = \frac{a(1 - (-q)^n)}{1 + q}, \tag{6}$$

který je shodný se vzorcem (4), když zaměníme q za $-q$. Dále je dobře patrné, že posloupnost hodnot s_n konverguje ke konečné hodnotě s_∞, která dle obrázku vyhovuje rovnici $s_\infty \cdot q = a - s_\infty$, takže součet s_∞ je opět dán vzorcem (5) po záměně q za $-q$.

Zbývá ještě uvést obrázek s lomenou čáru $OA_1O_1A_2O_2\dots$ pro posloupnost se záporným kvocientem $-q$ v případě, kdy $q > 1$.



Na odvození vzorce (6) pro součty s_n se nic oproti předchozímu nemění; posloupnost součtů s_n má však nyní dva hromadné body, neboť pro $k \to \infty$ platí $s_{2k-1} \to \infty$ a $s_{2k} \to -\infty$.

Na závěr děkuji dvěma přátelům: Karlu Horákovi za nakreslení obrázků a Jindřichu Bečvářovi za připomínky k původnímu textu příspěvku.

Literatura

[1] Bečvář, J.: *Hrdinský věk řecké matematiky II* (Historie matematiky II, Dějiny matematiky sv. 7, str. 7–28), Prometheus, Praha 1997

[2] Odvárko, O.: *Posloupnosti a řady* (Matematika pro gymnázia), Prometheus, Praha 1995

[3] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of Amerika, Washington, DC 1993

[4] Nelsen, Roger B.: *Proofs Without Words. More Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of Amerika, Washington, DC 2000

[5] Pomykalová, E.: *Planimetrie* (Matematika pro gymnázia), Prometheus, Praha 1993

[6] Šimša, J.: *Vývoj představ o reálných číslech* (Matematika v 16. a 17. století, Dějiny matematiky sv. 12, str. 259–282), Prometheus, Praha 1999

H. POINCARÉ A J. HADAMARD – DVĚ INSPIRACE

František Kuřina

Jak Fakír
Lehám si na
Své Myšlenky a
Usínám
(Vladimír Šrámek)

I am very happy because my proof is correct
and your objection proves that my proof is NEW.
(Professor S. T.)

1. Setkání

Přestože nejsem matematik, přestože nejsem historik a přestože neumím francouzsky, dovoluji si psát tyto poznámky inspirované dvěma geniálními představiteli francouzské matematiky 19. a 20. století.

Jako student matematiky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze jsem se setkal s ruským překladem knihy Jaquese Hadamarda *Geometrie elementaire I* ([1]), která mne okouzlila. Jasný výklad geometrických souvislostí a množství zajímavých úloh asi ovlivnily moji orientaci k elementární matematice a didaktice matematiky na celý život. Podruhé jsem „potkal“ J. Hadamarda v Helsinkách v roce 1997, kdy jsem v knihkupectví objevil jeho knihu *The Psychology of Invention in Mathematical Field* ([2]), *„small masterpiece“* podle vyjádření P. N. Johnsona-Larda, knihu, kterou jsem „znal“ z mnoha citací, publikaci, kterou by podle mého názoru měl číst každý učitel matematiky a poučení by v ní patrně našli i profesionální matematici.

Tato kniha navazuje na přednášky Henriho Poincarého, dalšího francouzského matematika, s jehož modely neeuklidovské geometrie jsem se rovněž seznámil již na počátku svých kontaktů s matematikou. Poincarého myšlenky o matematické tvořivosti, publikované např. v knihách [3], [4] a [5], byly pro moji učitelskou praxi často inspirativní.

V tomto příspěvku vyznávám svůj obdiv k Hadamardovi a Poincarému, a to přesto, že jejich matematické dílo neznám. Oslovily mě jejich myšlenky, které se týkají psychologie matematické tvorby. Jsou to názory dodnes živé a poučné pro studium problematiky matematického vzdělávání.

2. Podněty

V této části příspěvku uvedu několik názorů J. Hadamarda, H. Poincarého a dalších autorů, které pro mne byly inspirací k zamyšlení nad některými didaktickými otázkami.

V práci *Věda a metoda* ([3]) Poincaré píše:

Dva týdny jsem se snažil dokázat, že neexistuje funkce jisté vlastnosti. Každý den jsem zasedal k pracovnímu stolu, strávil zde hodinu, dvě, probíral velké množství kombinací a nenacházel žádný výsledek. Jednou večer jsem proti svému zvyku vypil hrnek černé kávy; nemohl jsem usnout, měl jsem množství nápadů. Zdálo se mi, že se setkávají, až se nakonec dva spojily, aniž by úzce souvisely. Ráno jsem konstatoval existenci jisté třídy Fuchsových funkcí. ... Zbývalo formulovat výsledky, což mi zabralo jen několik hodin.

Obr. 1: HENRI POINCARÉ (1854 – 1912)

O řešení dalších problémů uvádí:

Zúčastnil jsem se jakési geologické exkurze, při níž jsem pozapomněl na své matematické problémy a nepřemýšlel o nich. Při nastupování do omnibusu, v okamžiku, kdy jsem dal nohu na stupátko, jsem dostal nápad o souvislosti Fuchsových funkcí s neeuklidovskou geometrií ... Po návratu z exkurze jsem myšlenku prověřil. Byla správná.

Další problémy vyřešil Poincaré po neúspěšné intenzivní práci neočekávaně na dovolené u moře, jiné dokonce na vojenské službě.

Bertrand Russell ve své autobiografii píše:

Léto roku 1903 a 1904 jsme trávili na venkově. Každou noc od jedenácti do jedné jsem se procházel venku, a tak jsem se naučil rozeznávat tři různé hlasy lelka. (Většina lidí zná jen jeden.) Usilovně jsem se snažil vyřešit rozpor plynoucí z paradoxu holiče. Každé ráno jsem si sedl před prázdný list papíru a celý den jen s krátkou přestávkou na oběd jsem na něj zíral. Když přišel večer, papír byl často ještě prázdný. ... Zdálo se mi ... docela pravděpodobné, že celý zbytek života strávím nad prázdným listem papíru. Ještě nepříjemnější bylo, že šlo o triviální rozpory a že jsem trávil čas úvahami o věcech, které se nezdají být hodné systematické pozornosti ... Léta 1903 a 1904 zůstávají v mé paměti jako období naprostého intelektuálního zmaru. (Citováno podle [6], str. 113.)

Porovnejme tento citát s pedagogickou zásadou č. 968 Emila Caldy:

Zíráme-li na obrázek představující rozbor konstrukční úlohy dostatečně dlouho a stále nic nevidíme, spojíme dva namátkou vybrané body a koukáme, jestli něco vidíme. V případě, že ani teď nic nevidíme, opakujeme tento postup tak dlouho, dokud něco neuvidíme nebo dokud nevznikne taková změť čar, že už vůbec nic vidět nemůžeme. V tomto případě nakreslíme původní obrázek znovu, spojíme jiné dva body a celý postup opakujeme. (Citováno podle [7], str. 93.)

Zdá se, že tato parodie vystihuje dosti přiléhavě realitu poznávacího procesu. Hledáme-li něco opravdu nového, neexistuje spolehlivá metoda. To konečně popisuje i významný současný matematik Gustave Choquet:

Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách, připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se *stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata. (Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností,* [8], str. 90.)

CHRISTOPH J. SCRIBA a PETER SCHREIBER jakoby ilustrovali citovanou Choquetovu myšlenku na jednom objevu Poincarého v knize *5000 Jahre Geometrie* ([9], str. 403):

Roku 1881 objevil H. Poincaré v souvislosti s vyšetřováním aplikací konformního zobrazení Gaussovy roviny k řešení určitých diferenciálních rovnic nový model neeuklidovské geometrie, aniž si byl tohoto geometrického významu nejdříve vědom. Ten si uvědomil teprve při výměně dopisů o této problematice s FELIXEM KLEINEM a výsledek publikoval v letech 1887 a 1902.

Souvisejí připomenuté otázky, které se týkají objevování nového ve vědě, s problémy vzdělávání? Domnívám se, že ano.

U JANA ÁMOSE KOMENSKÉHO můžeme nalézt v různých dobách vývoje didaktických názorů řadu pozoruhodných myšlenek. Tak např. ve stati *Nawržení krátké o obnovení škol w králowství českém* píše ([10], str. 194):

Wyšetříny již jsou k tomu cesty, aby jak snadno slunce celé zemi swětla a tepla, a snět celému stromu mízy a síly dodáwati stačuje, tak snadně učitel, by na sta bylo w klassí žáků wšechněm slaužiti mohl, nýbrž aby mu to nic tíže nepřicházelo se dwěma neb třmi sty pracovati, nežli jako se dwěma neb třmi pacholaty. … Aby w jednu a tauž hodinu wždycky wšickni w škole jedno a též dělali, a žádnému jinému jiného nic ani psáti ani čísti ani měti se nedopauštělo. … Aby s žádným samým učitel nikdy nepracowal w ničemž …, ale wšecko se wšechněmi, aby co se koli předkládá, na obec bylo, a wšechněm se hodilo.

Tato Komenského slova jsou předobrazem současné hromadné a frontální výuky. Ideál třem stům stejně snadno jako třem se realizuje dnes běžně pomocí techniky především na vysokých školách, kde se mi to jeví, vzhledem k současným možnostem přenosu informací, poněkud anachronické.

Komenský ovšem, např. v *Didaktice analytické* ([11], str. 104), uvádí i jiný přístup ke vzdělání:

Vše vlastní a ustavičnou praxí žáků.

Vše vlastními smysly, vždy a rozmanitě.

Vše vnitřně, odhalenými příčinami.

Tyto zásady mají daleko blíže k práci vědce. Objevování považuje za základní způsob vyučování VÍT HEJNÝ. Je to pilíř chápání didaktiky matematiky MILANA HEJNÉHO ([12], str. 36):

Základem vyučování matematiky jsou objevy žáků.

Souvislost předávání výsledků „hotové vědy“ a poznávání cesty k ní zdůrazňuje G. Choquet ve *Vlastní charakteristice* ([8], str. 27):

Myslím, že přehnaně vytříbené a učeně pojaté vyučování by se vyučováním, a to na jakékoli úrovni, ani nazývat nemělo. Jenže nyní naše vyučování na všech stupních klade příliš velký důraz na důležitost rigoróznosti a průzračnosti učitelského výkladu. Za nesrovnatelně důležitější však osobně považuji, aby s konkrétní vykládanou látkou žák experimentoval sám.

Po celou dobu počátečních ročníků se matematika na gymnáziu musí držet role služebnice empirických věd a geometrie musí být chápána jako postupná matematizace reálného světa, což samozřejmě nevylučuje její algebraizaci, ovšem také postupnou.

Ve *Vzpomínkách a názorech* Choquet píše ([8], str. 57):

... každý vyučující musí bez přestání bojovat se stále se vracejícím pokušením spokojit se s průzračnou a vybroušenou přednáškou, aniž by bral v úvahu znalosti žáků, jejich reakce či neporozumění.

V šedesátých létech při dramatickém nástupu moderní matematiky doprovázeném DIEUDONNÉHO výkřikem *„Pryč s Eukleidem“* vycházela ústřední myšlenka reformy z představy, že *základy matematiky jsou nepostradatelné pro jakoukoli logickou konstrukci, a tak se zdůrazňovala potřeba začít právě jimi. Šlo o logiku, množiny, algebru a lineární algebru. Výsledek nemohl dopadnout jinak než katastrofálně, protože se odsunuly na vedlejší kolek veškeré pedagogické aspekty: motivace a předchozí znalosti žáků, výchova učitelů, tvorba rozumných učebnic, nemluvě o jistém souladu s fyziky a techniky ...*

Vyučování se nesmí vzdalovat od toho, čím nás oslovují naše smysly: dítě už umí pozorovat, zkoumat hmatem, přemísťovat četné „předmatematické“ objekty: přímky, trojúhelníky, krychle, koule. Toho se musí využít, v tom se lze poučit od MARIE MONTESSORI. *Už mezi osmým a čtrnáctým rokem věku je žák schopen rozvíjet a užívat svou intuici řešením nejrůznějších úloh a za pomoci trocha počítání. ... Zároveň umí své matematické znalosti využívat v experimentálních vědách. ... Člověk se nenaučí dělat matematiku posloucháním vybroušených výkladů při vyučovacích hodinách, nýbrž samostatnou prací s matematickými pojmy.*

Jean Hadamard shrnuje v práci [2] výsledky úvah německého fyzika HERMANNA HELMHOLTZE, britského psychologa GRAHAMA WALLASE a Henri Poincarého o metodách řešení problémů. Podle těchto autorů probíhá řešení problémů ve čtyřech fázích:

1. *Příprava řešení problému* (Preparation).
2. *Zrání problému* (Incubation).
3. *Zrození nápadu* (Illumination).
4. *Řešení problému a ověření jeho správnosti* (Verification).

Idea prvních tří z těchto čtyř etap myšlenkového procesu pochází od Helmholtze, který ji formuloval při příležitosti svých 70. narozenin v roce 1891. Helmholtz zdůrazňuje, že po předchozím všestranném prozkoumání problému přichází neočekávaně, bez úsilí, jako inspirace šťastný nápad. Ten není ovšem produktem unavené mysli nebo vysedávání u pracovního stolu, přichází např. v době odpočinku. O tom jsme se již zmínili na začátku této kapitoly. Ve fázi inkubace nejde o vědomé promýšlení problému, ale o jeho volné zrání v uvolněné mysli. Jsem přesvědčen, že analogie popsaných fází řešení problémů probíhají i při řešení nerutinních úloh školské matematiky. Jejich podstatným rysem je hledání souvislostí, neboli umění vidět. Podrobnější ilustraci této problematiky na zcela elementárních úlohách jsem popsal v článcích [13] a [14]. Wallasův přístup k této problematice lze najít v pozoruhodné knize s příznačným názvem *Umění myslet* ([15]).

Obr. 2: JACQUES HADAMARD (1865 – 1963)

3. Poučení

Jaká poučení pro mne vzešla ze studia citovaných děl J. Hadamarda a H. Poincarého? Jakou inspiraci mi tito autoři přinesli?

Uvědomil jsem si, snad výrazněji než dříve, že *vzdělávací proces* můžeme nahlížet ze čtyř pozic:

1. Proces reprodukční.
2. Proces osvojovací.
3. Proces poznávací.
4. Proces pracovní.

První pozice je bohužel převažující pro práci mnoha našich škol. Učitel vykládá, žáci si dělají poznámky, pak se učivo učí, aby si je mohli zapamatovat a reprodukovat aspoň zčásti u zkoušky. Tento postup žáky neúměrně zatěžuje, vede k více méně formálním znalostem bez hlubšího porozumění a bez rozvíjení dovednosti poznatky aplikovat. Nejhorším rysem tohoto přístupu ke vzdělávání je, že vzniká u žáků, jejich rodičů i celé veřejnosti přesvědčení, mnohdy oprávněné, že škola nemá smysl.

Realita společenské praxe, známky a přijímací zkoušky tlačí učitele k tomu, aby donutili žáky k „trvalému osvojení učiva“. Škola se stává „nalejvárnou“, systém prověrek a zkoušení vede k pamětnému učení a k drilu. Osvojení učiva je opět často povrchní a formální.

Klíčem k překonávání výše zmíněných neduhů škol je klást ve vyučování důraz na poznávací proces. Žák by měl být aspoň zčásti objevitelem nových poznatků, měl by poznávat souvislosti mezi studovanými jevy a smysl toho, co se učí. To je ovšem náročné na čas a na motivaci, tento přístup nelze realizovat v přeplněných třídách a s přeplněnými osnovami. O takovouto reformu vyučování usiluje patrně naše humanisticky orientovaná pedagogika v dokumentech *Bílá kniha* [16] a *Rámcové osnovy* [17]. Podle mého názoru zde vyvstává důležitá otázka v možnostech realizace pozoruhodných myšlenek v praxi.

Závažným nedostatkem naší školy je skutečnost, že nevede žáky dostatečnou měrou k práci. Naše škola není školou pracovní. Připomeňme v této souvislosti slova Václava Jamka:

Škola není místo, kde by dítě mělo získat co nejvíce vědomostí a přitom se vůbec nenamáhat. Koncept „školy hrou“ spíše žádá, aby škola využívala spontánní objevování schopnosti dítěte a tak je k námaze motivovala, ne však, aby je námahy ušetřila. Škola bez *námahy a píle není žádoucí; především ve škole si dítě může vštípit základní kulturu úsilí, která je v naší civilizaci potřebná. Požadovat výkon – a to výkon smysluplný – je jednou ze základních funkcí školy* ([18], str. 184).

Podíváme-li se na vyučování, tak jak je známe z praxe našich škol, skládá se z výkladu nového učiva a z jeho procvičování. Výklad by měl být jasný, jednoduchý, srozumitelný, utříděný, zajímavý, ...

Pojmy se obvykle zavádějí definicemi, věty, vzorce a případně důkazy se uvádějí transmisivním způsobem, příklady se řeší na základě instrukcí.

Procvičování učiva se realizuje prostřednictvím otázek a úloh. Úlohy můžeme rozlišit pro potřebu našeho výkladu na úlohy

1. řemeslné,
2. komplexní,
3. tvořivé.

Tento výčet nelze pokládat za klasifikaci, neboť kategorie se překrývají a zařazení úlohy závisí na mnoha okolnostech. U řemeslných úloh jde především o nácvik příslušných dovedností. Zdá se mi, že naše škola tuto stránku vzdělání dosti zanedbává, přičemž nezastírám, že je tato otázka, např. v souvislosti s využíváním výpočetní techniky, dosti složitá. V komplexních úlohách jde o porozumění souvislostem. I takové úlohy bychom měli učit řešit všechny žáky. Tvořivé úlohy by měly vést aspoň u nadaných žáků k řešení problémů na úrovni „malé vědy“, řekněme na úrovni olympiád.

Podíváme-li se na řešení problémů ve škole a ve vědě (podle čtyř Hadamardových fází – *preparace, inkubace, iluminace* a *verfikace*), docházíme k těmto závěrům: Celá školní matematika je vlastně přípravou. Bohužel, na rozdíl od vědy, přípravou nespecifickou, nesoustředěnou a tedy velmi často i neúčinnou. Na zrání problému v myslích žáků obvykle nemáme čas. Dobří řešitelé soutěží si ovšem čas najít umí a jsou právě proto úspěšní. Strategickou motivaci ve vyučování matematice, která s naší problematikou souvisí, rozvíjí didaktická škola M. Hejného ([19], str. 307). Šťastný nápad při řešení úlohy prožívá průměrný žák ve škole zřídkakdy; obvykle je učitel rád, když mu s řešením „pomůže“ některý z nejlepších žáků třídy. Etapa ověření řešení problému mívá opět nejčastěji charakter výkladu učitele. Naše současná škola není tedy řešení problémů příliš příznivě naladěna. Měli bychom však aspoň s nadanými žáky v tomto smyslu pracovat.

Problematika vzdělávání je ovšem, jak je dobře známo, spjata se společenskou realitou školy a s úrovní učitelů. Těmito otázkami se zde ovšem zabývat nemůžeme.

Shrňme na závěr této části příspěvku inspirace vyvolané studiem citovaných děl H. Poincarého a J. Hadamarda.

1. Úspěšné vyučování vyžaduje, aby učitel znal skutečnou podstatu matematických pojmů. Znamená to znát i to, jak se v matematice tyto pojmy vyvíjely.

2. Geometrii nelze redukovat na formální vědu. Historický vývoj disciplíny a vývoj představ o ní nelze přehlížet.

3. Matematika je uměním dávat různým věcem týž název (za všechny příklady uveďme aspoň pojem *grupa*).

4. Velkou předností geometrie je, že na pomoc úsudku může přijít cit, intuice.

5. Nezastupitelnou roli v matematické tvořivosti hraje podvědomí.

6. Estetická hlediska jsou v matematice podmíněna harmonií. To umožňuje vidět v celku i detailní souvislosti.

7. Definice v matematice jsou dobré, jsou-li aplikovatelné na všechny případy. Ve vyučování je dobrá ta definice, která je srozumitelná žákovi.

4. Poznámky

Jean Hadamard a Henri Poincaré byli bezesporu vynikající matematici žijící na přelomu 19. a 20. století, v epoše rámované např. Tomášem Alvou Edisonem a Albertem Einsteinem. Stručné životopisy Hadamarda a Poincarého můžeme nalézt např. ve slovníku [20]. Podrobnou studii o Poincarém napsali M. I. Panov, A. A. Tjapkin a A. S. Šibaněv (je otištěn ve sborníku citovaném v položce [3] seznamu literatury); další informace lze najít v knize [21].

O chronologii života našich autorů si můžeme učinit přehled z tabulky. Na okraj připomeňme několik jejich „současníků“, kteří se do tabulky nevešli: F. L. Rieger (1818), K. Světlá (1830), J. Neruda (1834), J. Arbes (1840), S. Čech (1846), A. France (1844), T. G. Masaryk (1850), H. Bergson (1850), G. B. Shaw (1856), W. Churchill (1874).

Poslední poznámka se týká práce historika matematiky. Ačkoliv jsem laik, uvědomil jsem si nutnost zabývat se při takovýchto studiích prameny. Doložme to dvěma citáty. Dirk J. Struik píše v publikaci [22] (str. 190) o spolupráci Poincarého s Kleinem:

Téma automorfních funkcí zpracovával Klein *„v zajímavém a přátelském soutěžení s Poincarém.“*

F. Klein to ovšem vidí takto:

„es gelang mir wieder, Poincaré um ein kleines zuvorzukommen ... Den Preis, den ich für meine Arbeit habe bezahlen müssen, war allerdings außenordentlich hoch, es war, daß meine Gesundheit vollend zussamenbracht ... Meine eigentliche produktive Tätigkeit auf dem Gebiet der theoretischen Mathematik ist 1882 zugrunde gegangen ... So hatte Poincaré freies Feld und veröffentlichte bis 1884 fünf großen Abhandlungen über die neuen Funktionen“ (citováno podle [23], str. 474).

Literatura

[1] Hadamard, J.:. *Geometrie elementaire. Ruský překlad Elementarnaja geometrija.* GUPI, Moskva 1948.

[2] Hadamard, J.:. *The Mathematical Mind. The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton University Press, Princeton 1996.

[3] Poincaré, H.:. *Science et méthode, Paris 1908, ruský překlad In: O nauke.* Nauka, Moskva 1983.

[4] Poincaré, H.:. *La valeur de la science, Paris 1905, ruský překla In: O nauke.* Nauka, Moskva 1983.

[5] Poincaré, H.:. *Science et hypothése, Paris 1902, ruský překlad In: O nauke.* Nauka, Moskva 1983.

[6] Barrow, J., D.:. *Pí na nebesích.* Mladá fronta, Praha 2000.

[7] Calda, E.:. *Stručný přehled nejdůležitějších pedagogických zásad.* Sborník 4. setkání matematiků, Žinkovy 1992.

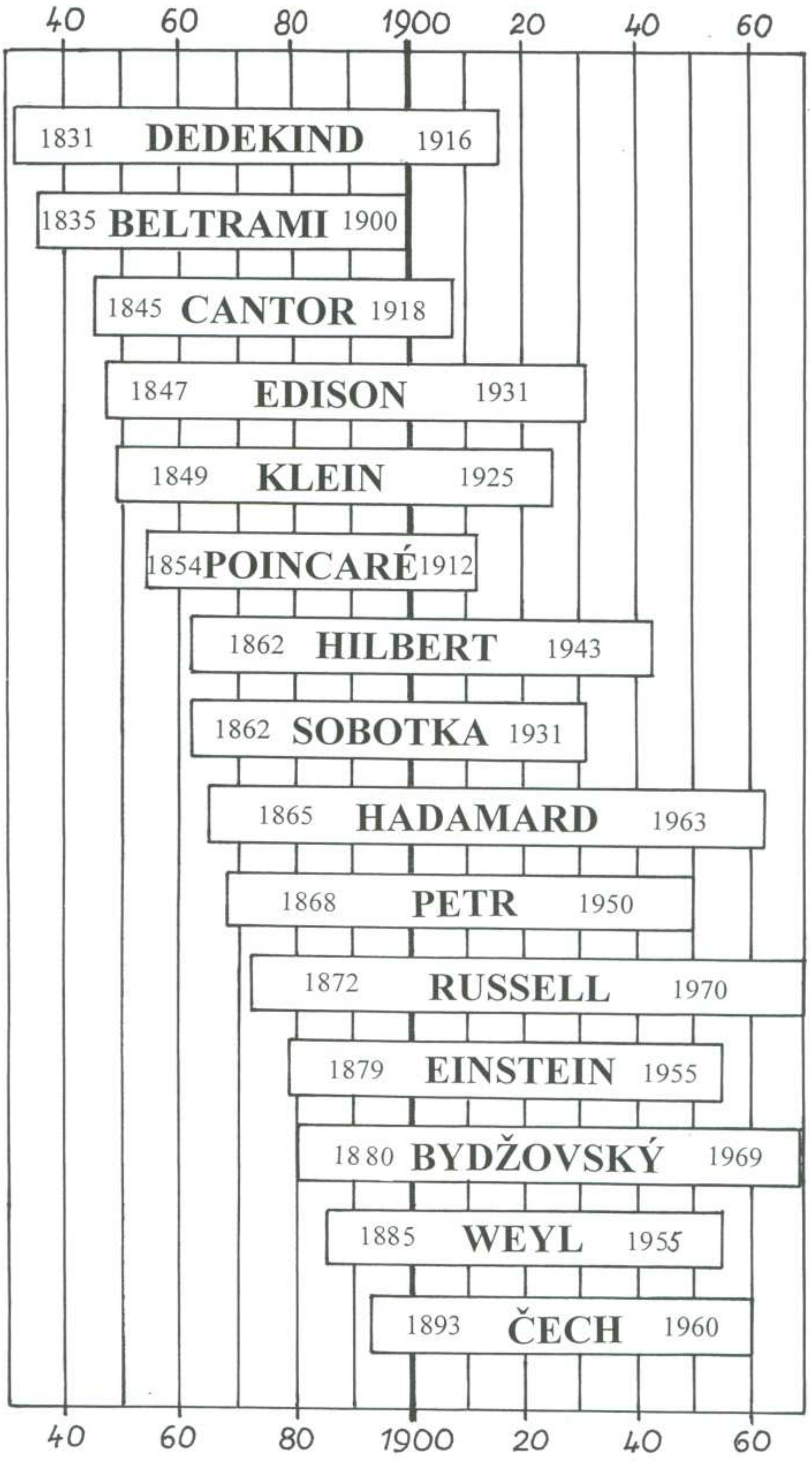
[8] Lukeš, J., Netuka, I., Veselý, J.:. *Professor Gustave Choquet.* Matfyzpress, Praha 2002.

[9] Scriba, C., J., Schreiber, P.:. *5000 Jahre Geometrie.* Springer, Berlin 2001.

[10] Komenský, J., A.:. *Didaktika.* U Řiwnáče, Praha 1849.

[11] Komenský, J., A.:. *Didaktika analytická.* Samcovo knihkupectví, Praha 1946.

[12] Hejný, M., Michalcová, A.:. *Skúmanie matematického riešitel'ského postupu.* Metodické centrum v Bratislave, Bratislava 2001.
[13] Kuřina, F.:. *Příběh jedné úlohy o trojúhelníku.* Matematika, fyzika, informatika, č. 4, roč. 12, 2002.
[14] Kuřina, F.:. *Kultura školské matematiky.* Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník z konference JČSMF, Hradec Králové 2003.
[15] Wallas, G.:. *The Art of Thougt.* C. A. Watts, London 1945.
[16] Kotásek, J. a kol.:. *Bílá kniha: Národní program rozvoje vzdělávání v České republice.* Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha 2001.
[17] Jeřábek, J., Tupý, J.:. *Rámcový vzdělávací program.* Výzkumný ústav pedagogický, Praha 2002.
[18] Jamek, V.:. *O patřičnosti v jazyce.* Nakladatelství F. Kafky, Praha 1998.
[19] Hejný, M. a kol.:. *Teória vyučovania matematiky.* Slovenské pedagogické nakl'adatelstvo, Bratislava 1989.
[20] Borodin, A., I., Bugaj, A., S.:. *Biografičeskij slovar dejatělej v oblasti matematiki.* Radjanska škola, Kijev 1979.
[21] Calinger, R.:. *Classics of Mathematics.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
[22] Struick, D., J.:. *Dějiny matematiky.* Orbis, Praha 1963.
[23] Wussing, H., Arnold, W.:. *Biographien bedeutender Mathematiker.* Volk und Wiessen, Berlin 1983.
[24] Bourbaki, N.:. *Eléments d' historie des mathématiques, Hermann, Paris, ruský překlad Očerki no istorii matematiki.* IIL, Moskva 1963.
[25] Folta, J., Nový, L.:. *Dějiny přírodních věd v datech.* Mladá fronta, Praha 1979.
[26] Kordos, M.:. *Wykłady z historii matematyki.* WSiP, Warszawa 1994.
[27] Alexandrova, N., B.:. *Matěmatičeskije terminy.* Vyssšejšaja škola, Moskva 1978.


40
60
80
1900
20
40
60
1831 DEDEKIND 1916
1835 BELTRAMI 1900
1845 CANTOR 1918
1847 EDISON 1931
1849 KLEIN 1925
1854 POINCARÉ 1912
1862 HILBERT 1943
1862 SOBOTKA 1931
1865 HADAMARD 1963
1868 PETR 1950
1872 RUSSELL 1970
1879 EINSTEIN 1955
1880 BYDŽOVSKÝ 1969
1885 WEYL 1955
1893 ČECH 1960

O ROVNICI $E = mc^2$, JADERNÝCH REAKCÍCH, ENERGII HVĚZD A VZNIKU PRVKŮ

Jiří Podolský

Einsteinův vztah $E = mc^2$ se stal ikonou moderní přírodovědy. Symbolizuje hned několik zásadních revolucí, které fyzika ve 20. století prodělala. Je dítětem teorie relativity. Své největší uplatnění však našla v mikrosvětě ovládaném kvantovými jevy. Sehrává klíčovou roli při interakcích elementárních částic, umožňuje dokonce jejich kreace a anihilace. Spoluurčuje také vlastnosti atomových jader a jejich vzájemné přeměny. A díky tomu zprostředkovaně ovládá i vesmír těch největších měřítek, neboť právě termonukleární reakce jsou zdrojem téměř nevyčerpatelné energie hvězd. Jsou také odpovědné za vznik celé známé plejády chemických prvků, které v přírodě nacházíme. Lze proto bez nadsázky říci, že bez blahodárného vlivu rovnice $E = mc^2$ by ve vesmíru neexistovaly žádné složitější struktury, natož pak my sami.

Rovnice má navíc velkou výhodu. Přes svůj dalekosáhlý význam, který uplatňuje jak zde na Zemi, tak i na nebi, je jednoduchá a srozumitelná. Je to prostá algebraická rovnice, ve které nejsložitější matematickou operací je násobení. Právě tato unikátní kombinace významu s jednoduchostí je příčinou, proč je $E = mc^2$ asi nejznámější fyzikální rovnicí všech dob.

Každému, kdo by se chtěl dozvědět více o jejím zrození i důsledcích, doporučujeme na tomto místě knihu [1]. David Bodanis v ní čtivě podává její životopis. Začíná historií „předků“, jednotlivých symbolů v rovnici vystupujících. Zmiňuje genezi pojmu energie E a cestu k formulaci zákona zachování energie, který je spojen se jmény Mayer, Joule, Helmholtz, Faraday či Maxwell. Na druhé straně rovnice stojí hmotnost m, materiální obsah vesmíru, pro který byl zásluhou Newtona, Lavoisiera a dalších také nalezen zákon zachování. Symbol c označuje rychlost světla (je odvozen z latinského „celeritas“ značícího „rychlost“) a i v tomto případě je historie jejího hledání roubená jmény nejslavnějšími: Galileo, Römer, Maxwell, Einstein. Svůj pozorouhodný osud má taktéž druhá mocnina rychlosti v rovnici vystupující, neboť bezprostředně souvisí se sporem dvou velikánů, Newtona a Leibnize.

Ti se přeli o to, zdali je mírou pohybu veličina mv nebo mv^2. Byly to až experimenty 'sGravesanda a důvtip madame du Châtelet, které daly do souvislosti energii a kvadrát rychlosti tělesa. A konečně i typografický symbol „=“ vyjadřující matematickou rovnost má své osobité dějiny.

Koncem 19. století tak vedle sebe existovaly dva významné fyzikální pojmy, energie a hmotnost. Přestože obě veličiny mohly v přírodě nabývat mnoha různých konkrétních podob (energie může být kinetická, potenciální, tepelná, rozprostřená v elektomagnetickém poli atd., hmota se také může přeměňovat řadou mechanických či chemických procesů do různých forem látky), vždy se zdálo jejich celkové množství zachovávat, a to separátně. Byly zformulovány dva na sobě nezávislé zákony: zachování energie a zachování hmoty.

Obr. 1: Albert Einstein v roce 1905 pracoval na patentovém úřadě v Bernu.

Ale pak v roce 1905 Albert Einstein (na Obr. 1 je jeho fotografie z té doby) učinil epochální objev, totiž že oba tyto klíčové přírodní zákony ve skutečnosti *odděleně* neplatí, neboť existuje propojení mezi „světem hmoty“ a „světem energií“. Množství hmoty, které se ztratí, je přitom vždy vyváženo množstvím energie, která se získá, a naopak. Převodní koeficient mezi m a E je ovšem nesmírně veliký, kvadrát rychlosti světla, neboli $c^2 = 9 \times 10^{16}\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$. Znamená to, že 1 gram kterékoliv látky je ekvivalentní zbruba 100 miliardám kJ energie, což pro srovnání je množství dodané do sítě průměrnou elektrárnou za několik dní a které by například stačilo k uvaření miliardy šálků čaje. Přejde-li setrvačná hmotnost po „mostovce =“ v rovnici $E = mc^2$

zprava doleva, dojde k jejímu mohutnému znásobení faktorem c^2. Ale také naopak: energie může přejít zleva doprava a přeměnit se na hmotnost. Při energiích, které kolem sebe v běžném životě pozorujeme, je ovšem odpovídající změna hmotnosti těles neměřitelně malá. Navíc, v obvyklých procesech — například chemických — kde hraje roli čistě elektromagnetická interakce, se nemění klidová hmotnost tělesa. Aby se otevřela i tato Pandořina skříňka energie dřímající v každé hmotě, je zapotřebí realizovat procesy, v nichž se uplatňují jaderné síly mezi elementárními částicemi, což je ovšem technicky obtížné. To jsou důvody, proč pozoruhodná ekvivalence E a mc^2 zůstala lidem po celá dlouhá staletí skryta.

Jak již bylo řečeno, byla to až Einsteinova genialita, která před sto lety odhalila světu toto poznání. V květnu a červnu roku 1905 Albert Einstein sepsal svůj slavný článek [2] nazvaný *O elektrodynamice pohybujících se těles* a dne 30. 6. 1905 ho zaslal k publikaci do časopisu *Annalen der Physik*, kde vyšel 26. září. Zřetelně v něm artikuloval *speciální teorii relativity*, ucelený teoreticko-fyzikální koncept, který překonal klasické newtonovské představy o povaze prostoru, času a dějů v nich probíhajících. Byly tím položeny nové a pevné základy fyzikálního bádání. Význam, obsah a důsledky tohoto revolučního kroku byly popsány v bezpočtu knih, učebnic i odborných článků (z dostupné literatury uveďme například [3]-[6]). Z hlediska tématu, jímž se zabýváme v tomto příspěvku, je ale zajímavé zdůraznit, že vztah $E = mc^2$ v práci [2] nenajdeme. Teprve během léta roku 1905 si Einstein uvědomil tento další důsledek své právě dokončené teorie. Coby dodatek své fundamentální práce [2] proto sepsal třístránkový článek [7] s názvem *Závisí setrvačnost tělesa na jeho energetickém obsahu?*. Byl odeslán 27. září rovněž do *Annalen der Physik*, kde vyšel 21. listopadu. Rozborem vztahu mezi energií hmotného objektu a vyzářené elektromagnetické vlny odvodil ekvivalenci energie se setrvačnou hmotností. Slavný vzorec v článku ovšem v dnešní podobě explicitně uveden není, nový objev je popsán víceméně slovně v závěrečných odstavcích:

> *Jestliže těleso vydá energii L ve formě záření, jeho hmotnost se zmenší o L/V^2. ... Hmotnost tělesa je mírou jeho energetického obsahu; jestliže se jeho energie změní o L, pak se hmotnost změní ve stejném smyslu o $L/9 \cdot 10^{20}$, když energii měříme v ergech a hmotnost v gramech.*

Předposlední odstavec se přitom ještě prorocky zmiňuje o radioaktivitě jako o možném poli uplatnění této ekvivalence hmoty a energie:

> *Snad bude možné ověřit tuto teorii užitím těles, jejichž energetický obsah se ve velkém rozsahu mění (kupříkladu solí radia).*

V následných článcích [8]-[10] z let 1906 až 1907 Einstein své úvahy a výpočty dále upřesnil. V přehledové práci [10] *O principu relativity a jeho důsledcích* v §11 již nacházíme kvantitativní rozbor radioaktivního rozpadu atomů

> *Jestliže M je atomová hmotnost rozpadajícího se atomu a m_1, m_2, atd. jsou atomové hmotnosti konečných produktů radioaktivního rozpadu, pak musí být*
>
> $$M - \sum m = \frac{E}{c^2}\ ,$$
>
> *kde E označuje energii produkovanou během rozpadu … V případě radia platí — pokud vezmeme za jeho poločas rozpadu 2600 let — přibližně*
>
> $$\frac{M - \sum m}{M} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2600}{250} = 0.00012\ .$$
>
> *Byl-li poločas rozpadu radia stanoven s dostatečnou přesností, mohli bychom tudíž ověřit náš vztah za předpokladu změření příslušných atomových hmotností na pět platných cifer. To je samozřejmě nemožné. Je však možné, že budou nalezeny radioaktivní procesy, při nichž bude podstatně větší procento hmotnosti původního atomu přeměněno na energii různých druhů záření, než je tomu v případě radia.*

Rovnice $E = mc^2$ tak byla zformulována ve své dnešní podobě. Einsteinovy úvahy a výpočty navíc předznamenaly cestu do nitra atomu, korunovanou objevem atomového jádra a uvolněním energie v něm vázané.

Do nitra atomu: cesta k uvolnění jaderné energie

Tak jako je tomu u mnoha jiných hlubokých myšlenek o světě, lze i atomistické představy vysledovat až k antickým kořenům (Leukippos z Milétu, Démokritos z Abdér). Ostatně, řecké slovo *atomos* znamenající „nedělitelný“ dostatečně vystihuje podstatu tohoto pojmu. Korpuskulární představy o povaze hmoty nebyly cizí významným přírodním filozofům (Galileo, Descartes, Bacon, Boyle, Newton a mnozí další). Avšak teprve systematická kvantitativní práce chemiků a fyziků 19. století (kterou vykonali zejména Dalton a Avogadro) přinesla přesvědčivé poznatky o tom, že hmotný svět je stvořen z molekul a atomů coby elementárních stavebních kamenů.

Na samém sklonku 19. století se ovšem prokázalo, že *dokonce i atomy jsou dělitelné*. Že mají svoji komplikovanou vnitřní strukturu určenou elektronovým obalem a malým, ale těžkým jádrem. Že se mohou navzájem přeměňovat jadernými procesy. A dokonce: že v nich dříme netušená, obrovská energie, která se při zmíněných transmutacích uvolňuje.

Počátkem 20. století tak lidstvo začalo postupně pronikat do nitra atomů, poznávat jejich jádra a posléze je i využívat. Historie této bezprecedentní změny v chápání podstaty světa je všeobecně známá [11]-[13]. Připomeňme si proto na tomto místě jen její základní milníky.

1896 *Henri Becquerel* objevil přirozenou radioaktivitu, dosud neznámé záření uranové soli.

1898 *Pierre Curie* a *Marie Curieová-Skłodowská* dokázali, že zdrojem záření je radium a polonium (z 1 t jáchymovského smolince získali po dlouhém úsili 0,1 g nového prvku).

1898 *Joseph Thomson* objevil v témže roce elektron.

1905 *Albert Einstein* zformuloval speciální teorii relativity a odvodil z ní, že setrvačná hmota tělesa je ekvivalentní energii, $E = mc^2$. Přišel s myšlenkou, že tato rovnice stojí za nebývalou energetickou bilancí radioaktivních prvků.

1911 *Ernest Rutherford* a jeho žáci *Hans Geiger* a *Ernest Marsden* pomocí rozptylových experimentů (ostřelováním tenké zlaté fólie α-částicemi) poprvé pronikli do hlubin atomu. Ukázali, že atom (s typickým rozměrem 10^{-10} m) je tvořen kladně nabitým malým jádrem (rozměru zhruba 10^{-15} m) obklopeným obalem elektronových slupek.

1913 *Niels Bohr* předložil model atomu odpovídající právě provedeným experimentům, který se stal mezníkem v budování kvantové teorie.

1919 *Ernest Rutherford* uskutečnil dávný sen alchymistů: provedl první transmutaci prvků. Konkrétně se jednalo o proces

$$^{14}\mathrm{N} \;+\; ^{4}\mathrm{He} \;\rightarrow\; ^{17}\mathrm{O} \;+\; ^{1}\mathrm{H}\,,$$

při kterém ostřelováním dusíkových jader α-částicemi vznikala jádra kyslíku a rychlé protony, které měřil.

1932 *John Cockcroft* a *Ernest Walton* provedli řízenou transmutaci, při které protony z urychlovače o energii 600 keV ostřelovali lithium, $^{7}\mathrm{Li} \;+\; ^{1}\mathrm{H} \rightarrow\; ^{8}\mathrm{Be} \rightarrow\; ^{4}\mathrm{He} +\; ^{4}\mathrm{He}$. Poprvé tím byla experimentálně ověřena rovnice $E = mc^2$.

1932 *James Chadwick* objevil neutron, *Carl Anderson* (v kosmickém záření) pozitron a *Harold Urey* deuterium (tzv. těžký vodík $^{2}\mathrm{H}$).

1933 *Fréderic* a *Irène Joliot-Curieovi* vyvolali umělou radioaktivitu (bombardováním hliníkového prášku rychlými α-částicemi získali radioaktivní produkt).

1934 *Enrico Fermi* ostřeloval všemožné prvky včetně uranu pomocí neutronů (podobné pokusy prováděl i Chadwick). Zjistil, že větší efekt vykazují neutrony *zpomalené* moderátorem (vodou): zásluhou relace neurčitosti mají totiž větší účinný průřez.

1938 *Lise Meitnerová, Otto Hahn* a *Fritz Strassmann* objevili *štěpení uranu.* Při pokusech v Berlíně Hahn se Strassmannem zjistili, že ostřelováním uranu neutrony nevznikl transuran, jak očekávali, ale naopak mnohem lehčí produkty, typicky baryum. Tento fakt nedokázali vysvětlit, a tak o něm informovali svoji dlouholetou spolupracovnici, v té době již uprchlici z nacistického Německa. O Vánocích 1938 Lise Meitnerová a její synovec Otto Robert

Frisch (Bohrův kodaňský student) při procházce na sněhu u vesnice Kungälv na západním pobřeží Švédska s pomocí Bohrova kapkového modelu jádra pochopili a správně interpretovali berlínské pokusy: uran se pomalým neutronem *rozštěpil na zhruba stejné půlky.* Při tomto procesu se v důsledku Einsteinova vztahu $\Delta E = \Delta m\, c^2$ uvolní obrovské množství energie (200 MeV), což je řádově 10^7 krát více než při běžné chemické reakci.

Tento epochální objev byl bohužel učiněn v nejhorší možný okamžik na nejhorším možném místě: zdroj nebývalé energie – zneužitelný k produkci jaderných bomb dosud nevídaných účinků – byl dán v předvečer války do vínku hitlerovskému Německu. Další sled událostí byl proto rychlý, hnaný vpřed neúprosnou logikou světových dějin (podrobné informace lze nalézt například v [14]-[19]).

leden 1939 Vyšly články Hahna a Strassmanna (v německém časopise Naturwissenschaften) i Meitnerové a Frische (v Nature). Bohr, podrobně informovaný Frischem, přiletěl 16. ledna do USA, kde v Princeton seznamuje Einsteina, Fermiho, Szilarda, Wignera a další emigranty o možnosti štěpení uranu.

únor 1939 *Hans von Halban, Lew Kowarski, Fréderic Joliot* (v Paříži) a nezávisle *Enrico Fermi* a *Leo Szilard* (v New Yorku) zjistili, že při štěpení uranu se uvolňují také neutrony. Jsou-li zpomaleny moderátorem, vzniká možnost *řetězové reakce*, která může být i řízená.

jaro 1939 *Niels Bohr* a jeho student *John Archibald Wheeler* objevili, že řetězovou reakci udržuje jen izotop ^{235}U (jehož je v přírodě jen 0,7% vůči ^{238}U). Jejich souhrnný článek o mechanismu jaderného štěpení byl publikován 1. září 1939, v den vypuknutí 2. světové války.

Válečné úsilí o konstrukci atomové bomby

Nacistické Německo

Je skutečností, že Německo mělo zpočátku v jaderném výzkumu značný náskok. Již 29. dubna 1939 se na Říšském ministerstvu školství konala tajná konference, která vyústila v zahájení systematického výzkumného programu. Současně byl zakázán vývoz uranu ze zabraných Československých dolů.

V čele německého jaderného výzkumu stanul *Werner Heisenberg*, takřka ideální osobnost pro takový úkol. Coby spolutvůrce kvantové mechaniky měl dostatečný intelektuální potenciál, ještě ani ne čtyřicetiletý měl nadšení i energii mládí, a ani myšlenky o výlučnosti německého národa mu nebyly úplně cizí. Již v únoru 1940 iniciativně předložil ucelenou zprávu o možné výrobě funkční jaderné bomby. Kolem Heisenberga byla soustředěna skupina předních vědců z prestižních universit: von Laue, Hahn, Strassmann, Geiger, von Weizsäcker a další. Ti mohli využít zázemí vynikajících inženýrů a techniků, k těžké a nebezpečné práci s radioaktivním materiálem pak vězňů z koncentračních táborů. Kromě těchto personálních předpokladů mělo Německo i výhodu materiální: tuny uranu ze zabraného Jáchymova i z Belgického Konga, Bohrův cyklotron převezený po obsazení Kodaně do Berlína. Disponovalo také strategickou těžkou vodou produkovanou v továrně v norském Vemorku (ta se proto z pochopitelných důvodů stala cílem několika britských sabotážních akcí: nejvýznamnější se udála v prosinci 1944, kdy byla na jezeře Tinnsjö potopena ve spolupráci s norským odbojem loď převážející do Německa významnou část produkce).

Pokusy o stavbu uranového reaktoru s deuteriovým moderátorem probíhaly souběžně v Lipsku a Berlíně. Úspěch se dostavil na jaře 1942, kdy reaktor již vyzařoval o 13% více neutronů než dodával iniciační zářič. Koncem války dosáhl faktor znásobení hodnoty zhruba 7. Pro udržení řetězové reakce by stačilo tento koeficient ještě zdvojnásobit. Naštěstí pro svět se tak ovšem nestalo. Důvodů bylo několik: rostoucí technické a finanční problémy, některá Heisenbergova chybná rozhodnutí, nedostatky ve spolupráci mezi skupinami a nejspíše také stále klesající vůle vědců program úspěšně dokončit.

Velká Británie

Na straně Spojenců hrála zprvu vůdčí roli Anglie. Na jaře 1940 vypracovali *Otto Frisch* a *Rudolf Peierls* tajné „Memorandum o vlastnostech radioaktivní superbomby". Jednalo se o první důkladnou vědeckou analýzu problému včetně teoretických výpočtů kritické hmotnosti nutné pro spuštění řetězové reakce, technického návrhu separace ^{235}U, odhadu mohutnosti exploze i popisu radioaktivních účinků bomby. Tato práce zapůsobila jako katalyzátor: v červenci 1941 byla ustavena významná britská komise MAUD, jejímž cílem bylo koordinovat konstrukci uranové a plutoniové bomby. V důsledku válečných událostí byl společný britsko-francouzský jaderný výzkum posléze přesunut do Kanady (středisko Chalk River u Ottawy), kde se stal významnou součástí americkém projektu atomové bomby.

USA: Projekt Manhattan

Již v srpnu 1939 adresoval Albert Einstein presidentu Rooseveltovi známý dopis (koncipovaný Szilardem), ve kterém upozornil americkou administrativu na nové závažné fyzikální objevy i na probíhající nacistický jaderný výzkum, jehož cílem je konstrukce bomby. Odezva na dopis byla však poměrně rozpačitá. Proto byl jaderný výzkum v USA zprvu různorodý a roztříštěný, probíhal zejména na univerzitách. Bylo však dosaženo několika významných úspěchů. V Berkeley byly syntetizovány transurany neptunium (červen 1940) a plutonium (únor 1941). Pokrok byl zaznamenán i v hledání metod separace izotopů uranu. Práce byly posléze zastřešeny vládní organizací NDRC, koncem roku 1941 pak padlo rozhodnutí o konstrukci jaderné bomby, což byla nejen zásluha aktivity britské komise MAUD, ale také japonského útoku na Pearl Harbor, po němž Amerika vstoupila do války.

Americký projekt atomové bomby pak dostal jasnou strukturu, cíl a podporu. Od června 1942 nesl krycí název „Manhattan District", U.S. Corps of Engineers, zkráceně „Projekt Manhattan". Skládal se ze tří základních složek, které se navzájem velmi dobře doplňovaly: *vědci* byli zodpovědní za výzkum (šlo o prvotřídní fyziky a chemiky, mnozí z nich byli utečenci z Evropy), *armáda* zabezpečovala organizaci, řízení, materiální zabezpečení a utajení, *průmysl* pak poskytnul praktické schopnosti a zkušenosti techniků.

V čele celého administrativně-vojenského projektu stál generál *Leslie Groves*, absolvent MIT a West Pointu, schopný organizátor. Vědeckým šéfem byl jmenován mladý brilantní teoretický fyzik *Jacob Robert Oppenheimer*, profesor univezity v Berkeley. Projekt postupně narostl do nebývalých rozměrů: za 2,2 miliard dolarů (v cenách roku 1946) bylo v 19 státech vybudováno 37 různých zařízení, v nichž pracovalo až 40 000 lidí. První významný úspěch se dostavil 2. prosince 1942: Enrico Fermi se svými spolupracovníky uskutečnili *první řízenou řetězovou reakci*. Stalo se tak pod tribunou stadiónu Chicagské unverzity ve slavném milíři-reaktoru CP-1 tvořeném přírodním uranem (6 tun), grafitový moderátorem (210 tun) a kadmiovými řídícími tyčemi.

Vlastní návrh a konstrukce bomb probíhaly (od dubna 1943) v přísně tajném výzkumném centru v Los Alamos (stát Nové Mexiko). Zde se nacházelo také teoretické oddělení, které vedl *Hans Bethe*, další prominentní uprchlík před nacisty. V jeho skupině se sešel výkvět fyziky 20. století, včetně mnoha stávajících či budoucích nositelů Nobelovy ceny (viz Obr. 2): Niels Bohr, Richard Feynman, Enrico Fermi, Victor Weisskopf, James Chadwick, Edward Teller, Robert Serber, Rudolph Peierls, Otto Frisch, John von Neuman a další.

Obr. 2: Bohr, Oppenheimer, Feynman a Fermi (zleva doprava).

V Los Alamos paralelně probíhala konstrukce dvou odlišných typů bomb, uranové a plutoniové. Každá z nich měla své specifické problémy, které bylo nutno překonat.

Uranová bomba

Hlavním problémem bylo získat dostatečné množství štěpitelného uranu, tedy separovat z uranové rudy alespoň 25 kg izotopu ^{235}U. Za tímto účelem vyrostly v Oak Ridge (stát Tennessee) bezprecedentní obří továrny, využívající tři různé metody separace:

K-25 : v této tovární budově (ve tvaru písmene „U“ dlouhé téměř 2 km, kterou obsluhovalo 9 000 operátorů od firmy Union Carbide) probíhala difúze plynného hexafluoridu uranu UF_6 přes kaskádu speciálních filtrů,

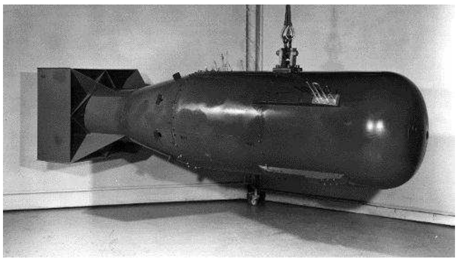
Y-12 : využívala elektromagnetická metody separace,

S-50 : byla založena na termální difúzi.

Stavbu a provoz všech tří továren provázel bezpočet technických problémů. Ukázalo se, že elektromagnetická a termální metoda separace jsou zoufale neefektivní, když pracují s přírodním uranem. Řešení se nalezlo až v červnu 1945 přechodem ke kaskádovitému procesu: K-25 spolu s S-50 nejprve obohatily přírodní uran na 7% podíl ^{235}U, který byl pak předán Y-12, kde se dosáhlo potřebného finálního obohacení. I tak byl celý proces málo účinný. Koncem války proto bylo k dispozici materiálu jen na jednu až dvě uranové bomby. Naproti tomu samotná konstrukce bomby byla v principu snadná, neboť stačilo přiblížit k sobě dvě podkritická množství uranu, aby se řetězová reakce sama spustila. Technicky měla uranová bomba podobu krátkého „děla“, jímž byla část uranu (cca 5 kg) prudce nastřelena do dutiny v druhé části uranového materiálu (cca 20 kg). Pro svůj podlouhlý doutníkový tvar nesla přezdívku „Little Boy“ (chlapeček), viz Obr. 3.

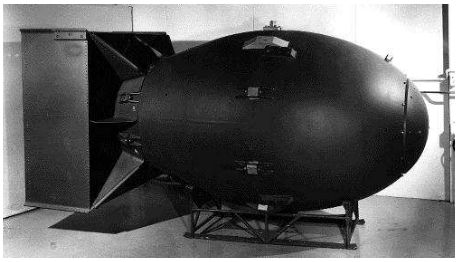
Plutoniová bomba

V tomto případě šlo o „rafinovanější“ přístup. Štěpná řetězová reakce může probíhat i v plutoniu, kovu, který lze uměle vyrobit transmutací z uranu ^{238}U záchytem neutronů. Za tímto účelem byly v Hanfordu (stát Washington) postaveny tři vodou chlazené reaktory s grafitovým moderátorem (ve spolupráci vědců z Chicagské univerzity a inženýrů od firmy Du Pont). Ozářený



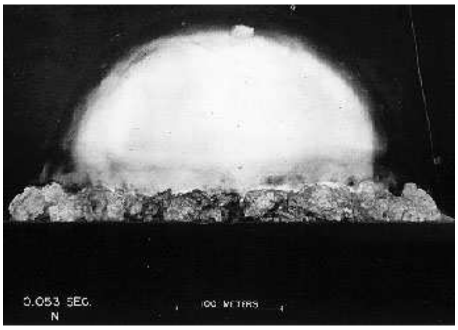
Obr. 3: Uranová bomba „Little Boy“.

uran a jeho produkty byly poté vyjmuty, rozpuštěny a plutoniová složka chemicky odseparována. Po počátečních problémech, které pomohli vyřešit Wheeler, Fermi a Compton, byla od ledna 1945 produkce plutonia snadná a hojná. Obrovské problémy naopak působila vlastní konstrukce bomby, neboť se ukázalo být obtížné udržet řetězovou reakci po dostatečně dlouhou dobu. Nakonec se bomba skládala z duté plutoniové koule, která byla donucena implodovat dokonale synchronizovaným výbuchem náloží klasické trhaviny umístěné po jejím obvodu. Díky svému kulovitému tvaru, patrném na viz Obr. 4, nesla přezdívku „Fat Man“ (tlusťoch).



Obr. 4: Plutoniová bomba „Fat Man“.

Vzhledem k nesnázím kolem konstrukce plutoniové bomby padlo rozhodnutí učinit nejprve její pokusný výbuch. Byl úspěšný: dne 16. července 1945 v 5:29 na odlehlém místě zvaném Trinity Site poblíž Alamogordo v Novém Mexiku explodovalo první lidmi vyrobené jaderného zařízení v historii (Obr. 5). Výbuch byl nesmírně mohutný, ekvivalentní explozi 18 600 tun TNT. Oslnivý záblesk, který bylo možné spatřit až v El Pasu či Santa Fe vzdálených více než 300 km, zvěstoval, že lidstvo vstoupilo do atomového věku.



Obr. 5: První nukleární exploze v historii (Trinity Site, 16. 7. 1945 v 5:29). Po 50 milisekundách měl výbuch průměr 300 m.

Následující historie je již všeobecně známá. Přes odpor řady zúčastněných vědců i některých vojáků padlo politické rozhodnutí použít obě vyvinuté jaderné bomby proti Japonsku. A tak 6. srpna 1945 bombardér B-29 *Enola Gay* startující z ostrova Tinian svrhnul uranovou bombu Little Boy na Hirošimu, o tři dny později 9. srpna explodovala plutoniová bomba Fat Man nad Nagasaki. Obě ničivé exploze přivodily rychlý konec války. Ale současně způsobily, že svět už není a nikdy nebude takový, jako byl před nimi. Doslova prorocky znějí věty, které v roce 1924 — tedy dávno před tím, než si lidé uvědomili reálnou možnost uvolnění jaderné energie — napsal Karel Čapek v *Krakatitu* (kap. XI):

> *Bude to obraz světa sklenutý z čísel a rovnic; avšak cifry astronomického řádu měří něco jiného než vznešenost oblohy: kalkulují vratkost a destrukci hmoty. Vše, co jest, je tupá a vyčkávající třaskavina; ale jakékoliv budiž číslo její netečnosti, je jenom mizivým zlomkem její brizance. Vše, co se děje, oběhy hvězd a tellurická práce, veškerá entropie, sám pilný a nenasytný život, to vše jen na povrchu, nepatrně a neměřitelně ohlodává a váže tuto výbušnou sílu, jež se jmenuje hmota. Vězte tedy, že pouto, jež ji váže, je jenom pavučina na údech spícího titána; dejte mi sílu, abych*

jej pobodl, i střese kůru země a vrhne Jupitera na Saturna. A ty, lidstvo, jsi jenom vlašťovka, která si pracně ulepila hnízdo pod krovem kosmické prachárny; cvrlikáš za slunce východu, zatímco v sudech pod tebou mlčky duní strašlivý potenciál výbuchu …

Energie hvězd, jejich evoluce a vznik prvků

Souběžně s výzkumem štěpných jaderných reakcí koncem 30. let a následným válečným i poválečným úsilím o konstrukci jaderných bomb, které jsme zde ve stručnosti popsali, probíhal ovšem ještě jiný vědecký výzkum. Z části se na něm podíleli stejní aktéři, avšak tentokráte bylo předmětem jejich zájmu cosi mnohem mírumilovnějšího a v obecném smyslu i zajímavějšího. Šlo o nalezení správných odpovědí na tak zásadní astronomické otázky jako: Proč hvězdy září? Co je zdrojem jejich energie? Jak se vyvíjejí a z čeho se skládají? Jak vůbec vznikly různé chemické prvky? A proč je jejich zastoupení ve vesmíru právě takové, jaké je?

Tyto otázky si učenci kladli v té či oné podobě odedávna, ale teprve rozmach spektroskopie koncem 19. století přinesl možnost na ně začít realisticky odpovídat z pohledu moderní fyziky. Helmholtz, Kelvin a Jeans přišli s hypotézou, že zdrojem energie hvězd je jejich gravitační kontrakce: hvězda se zmenšuje a příslušný úbytek potenciální energie se při tom vyzařuje. Ukázalo se však, že takový mechanismus by vystačil jen na pár miliónů let existence hvězdy. To ovšem bylo v naprostém rozporu se skutečností: stáří pozemských hornin a zkamenělin je neporovnatelně větší, což bylo v té době již velmi dobře známo.

Mezi roky 1916 až 1925 publikoval snad nejvýznamnější astrofyzik 20. století Sir *Arthur Stanley Eddington* více než tucet fundamentálních článků o fyzikální povaze hvězd. Ty pak shrnul v roce 1926 v dnes klasické knize „The Internal Constitution of the Stars“ (Vnitřní stavba hvězd). Předložil v ní jasné argumenty, že hvězdy jsou velké koule plynu s centrálním zdrojem energie. Ta se přenáší na povrch zářením, čímž se udržuje dokonalá rovnováha: tlak záření působí proti gravitační přitažlivosti. Již v roce 1919 Eddington navrhl, že hledaným zdrojem energie v nitru hvězd mohou být jaderné procesy, konkrétně *slučování vodíku na helium.* Z rozdílu hmotností čtyř vodíkových jader a jádra helia lze snadno s pomocí Einsteinovy rovnice $\Delta E = \Delta m\, c^2$ spočítat, že při takovém procesu se uvolní 28 MeV energie. To je zcela nebývalé množství, které několikanásobně přesahuje dokonce i energii vznikající při štěpení těžkých jader. V Eddingtonových spisech lze nalézt například větu, která je časově i tematicky paralelní k výše uvedenému Čapkovu citátu:

> *Jestliže opravdu je uvolněná subatomová energie užívána ve hvězdách k udržování jejich žhnoucích niter, pak jsme zřejmě blíže naplnění našeho snu o využití této skryté síly pro dobro lidstva — anebo pro jeho sebevraždu.*

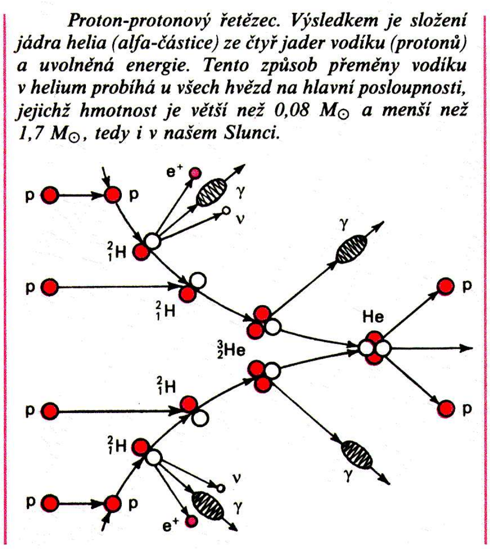
Eddington měl opravdu výtečnou intuici. Je ovšem nutno říci, že k detailnímu pochopení všech jaderných procesů, které se odehrávají uvnitř hvězd, bylo ještě zapotřebí ohromné množství práce, fyzikálních pokusů, úvah a konkrétních výpočtů. Uvědomme si, že v té době dosud nebyla dobudována kvantová mechanika a že teprve v roce 1928 provedl *George Gamow* první výpočty pravděpodobnosti průniku α-částice do jádra. Kvantová teorii pole se rodila až ve třicátých a čtyřicátých letech. Bylo také nutné provést bezpočet experimentů, především změřit účinné průřezy nukleárních reakcí. Připomeňme, že teprve v roce 1932 byl objeven neutron, pozitron, deuterium ...

Syntéza helia

Konkrétní pochopení procesů termonukleární syntézy jader helia ve hvězdách proto přinesla až 30. léta. Za toto poznání vděčíme dvěma dvojicím badatelů: první dvojici tvoří *Robert Atkinson* a *Fritz Houtermans*, druhou pak *Hans Bethe* a *Carl Friedrich von Weizsäcker*.

Atkinson s Houtermansem, v té době ještě studenti na univerzitě v Göttingen, učinili v roce 1929 první pokus o vypracování teorie uvolňování jaderné energie ve hvězdách. Aplikací Gamowovy teorie zjistili, že nejefektivnější jsou procesy s lehkými jádry, protože jejich elektrické odpuzování je menší. V roce 1931 pak Atkinson publikoval dva podrobné články „Atomic Synthesis and Stellar Energy“ (Syntéza atomů a energie hvězd), v nichž ukazoval, že jádra těžších prvků mohou vznikat z vodíku záchytem protonů.

Není bez zajímavosti připomenout, že právě v té době došlo k velké revoluci v astronomii a astrofyzice: konečně bylo prokázáno a uznáno *naprosto dominantní zastoupení vodíku* a helia ve hvězdách i celém vesmíru. Dnes nám to připadá zcela samozřejmé, ale do té doby se všeobecně — ale mylně — věřilo, že hvězdy jsou z převážné části složeny ze železa a ostatních těžkých prvků, podobně jako naše Země. Zásluhu na odstranění tohoto velkého omylu měla především *Cecilia Payneová.* V roce 1925 pečlivou reinterpretací spektrálních čar a užitím čerstvě odvozené Sahovy ionizační rovnice prokázala, že Slunce i ostatní hvězdy jsou složeny především z vodíku. Prosadit nové poznání vůči uznávaným astrofyzikálním autoritám vůbec nebylo snadné, ale postupně začal tento nový správný názor převládat díky následným pracím Albrechta Unsölda (1928) a dalších.



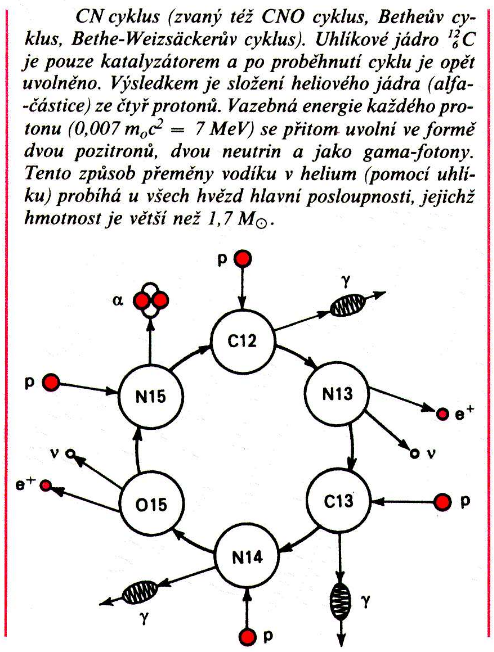
Obr. 6: Syntéza helia ve hvězdách pomocí pp-řetězce.

V roce 1936 Atkinson poznal, že základní jadernou reakcí ve hvězdách je srážka dvou protonů, proces, při němž z vodíku vzniká deuterium. Tato reakce tvoří první článek řetězu syntézy helia a dalších, těžších prvků. Tomuto procesu syntézy jednoho jádra He ze čtyř jader H se říká *proton-protonový řetězec.* Probíhá následujícím způsobem:

$$^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \;\rightarrow\; {}^2\mathrm{H} + \mathrm{e}^+ + \nu \qquad (1{,}44\ \mathrm{MeV})\ ,$$

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \quad \rightarrow \quad {}^{3}\mathrm{He} + \gamma \qquad\qquad (5{,}49\ \mathrm{MeV})\ ,$$
$$^{3}\mathrm{He} + {}^{3}\mathrm{He} \quad \rightarrow \quad {}^{4}\mathrm{He} + {}^{1}\mathrm{H} + {}^{1}\mathrm{H} \quad (12{,}85\ \mathrm{MeV})\ ,$$

což je přehledně znázorněno na Obr. 6 (převzatém spolu s následujícími obrázky z [22]). V závorce je uvedena uvolněná energie. První reakce je oproti druhé a třetí velmi pomalý proces (průměrná doba života jádra vodíku v nitru Slunce je řádově 10 miliard let, zatímco deuteria jen 3 sekundy). Působí tedy coby jakási „brzda“, díky níž mohou hvězdy zářit stabilně po miliardy let.



Obr. 7: Syntéza helia v obřích hvězdách pomocí CNO cyklu.

Velmi pozoruhodné ovšem je, že to není jediný možný proces, jímž hvězdy syntetizují helium z vodíku! V roce 1938 Hans Bethe a nezávisle Carl Friedrich von Weizsäcker učinili významný objev tzv. *CNO cyklu* (Obr. 7). Jedná se o netriviální řetězec reakcí, při kterém postupně v šesti krocích za teplot zhruba 20 mil. K probíhá syntéza helia z vodíku za přítomnosti jádra uhlíku ^{12}C coby katalyzátoru:

$$^{12}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} \quad \rightarrow \quad {}^{13}\mathrm{N} + \gamma \qquad\qquad (1{,}95\ \mathrm{MeV})\ ,$$

$$
\begin{array}{rcll}
{}^{13}\mathrm{N} & \rightarrow & {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu & (2{,}22\ \mathrm{MeV})\,, \\
{}^{13}\mathrm{C} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{14}\mathrm{N} + \gamma & (7{,}54\ \mathrm{MeV})\,, \\
{}^{14}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{15}\mathrm{O} + \gamma & (7{,}35\ \mathrm{MeV})\,, \\
{}^{15}\mathrm{O} & \rightarrow & {}^{15}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu & (2{,}71\ \mathrm{MeV})\,, \\
{}^{15}\mathrm{N} + {}^{1}\mathrm{H} & \rightarrow & {}^{12}\mathrm{C} + {}^{4}\mathrm{He} & (4{,}96\ \mathrm{MeV})\,.
\end{array}
$$

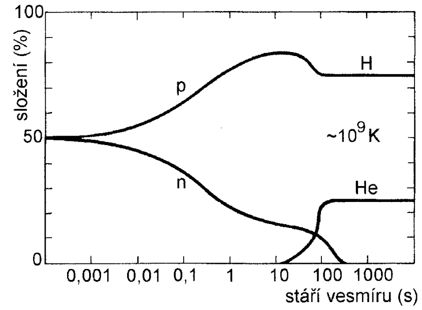
Později pak Epstein (1950) a Salpeter (1952) ujasnili, že CNO cyklus je hlavním jaderným procesem ve všech hvězdách na hlavní posloupnosti hmotnějších než 1,7 Slunce, zatímco pp-řetězec naopak probíhá ve hvězdách, které jsou naopak lehčí.

Syntéza těžších prvků

Přes tyto významné objevy zůstávala ve 40. letech i nadále otevřená zásadní otázka: kde a jak ve vesmíru vznikají prvky těžší než helium? Mezi nimi uhlík, kyslík, křemík a všechny ostatní prvky, na nichž závisí život na Zemi.

Byl to *George Gamow*, který propagoval ideu, podle níž prvky vznikly termonukleárními reakcemi hned **na počátku vesmíru**. V článcích z r. 1935 a 1946 rozpracoval tuto myšlenku kosmologické nukleosyntézy, jež postupně probíhala v prvních třech minutách po velkém třesku. Gamow předpokládal, že za příslušných vysokých hustot a tlaků vznikly záchytem neutronů všechny prvky. Tato teorie byla shrnuta v díle „The Origin of Chemical Elements“ z roku 1948 od *Ralpha Alphera*, *Hanse Betheho* a *George Gamowa*. Dva roky nato ale *Fermi* s *Turkevichem* ukázali, že po velkém třesku ve skutečnosti vznikl jen vodík (cca 75 %) a helium (cca 25 %, viz Obr. 8), trocha deuteria, lithia a jen zcela nepatrně ostatních prvků. Důvod spočívá v tom, že s velmi rychlým rozpínáním vesmíru původně vysoké hustoty a tlaky prudce poklesly a následné jaderné reakce proto ustaly.

Těžké prvky nestačily na počátku vesmíru vzniknout. Musely se tudíž syntetizovat až následně, a to jadernými reakcemi **ve hvězdách** v jistých fázích jejich vývoje. Klíčovou roli při tom hrají *červení obři*, staré a velké hvězdy, ve kterých již byly v zásadě vyčerpány centrální zásoby vodíku vhodného k syntéze helia. Na svém povrchu mají červení obři teplotu nižší, než má Slunce, avšak v jejich jádře jsou teploty vyšší než 100 miliónů K. Panují tam proto podmínky, v nichž může docházet k syntéze těžších jader. Helium, které bylo „popelem“ předchozí reakce slučování vodíku, se nyní může stát novým palivem!



Kosmologické helium **vzniklo** ***fúzí*** **protonů a neutronů v prvých minutách vesmíru, než došlo k úplnému** ***rozpadu neutronů.***

Obr. 8: Syntéza helia na počátku vesmíru.

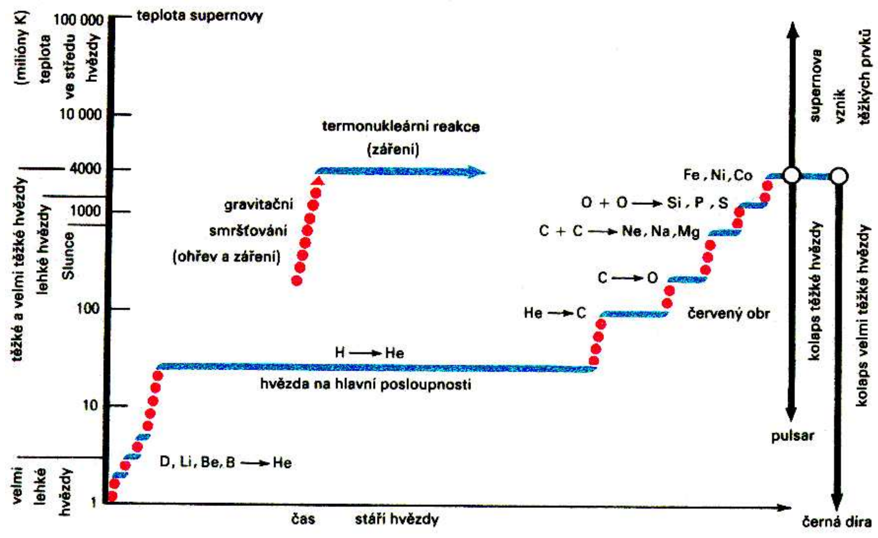
Problém ovšem představuje skutečnost, že neexistuje stabilní prvek s atomovou hmotností 5, takže těží prvky nemohou vzniknou prostým záchytem protonu na heliu. Rešení našli až v 50. letech *Ernst Opik* (1951) a *Edwin Salpeter* (1952): jádro uhlíku může být syntetizováno ze *tří* jader helia prostřednictvím nestabilního berylia, a to procesem

$$\begin{aligned} {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^8\mathrm{Be}\,, \\ {}^8\mathrm{Be} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma \qquad (7{,}4\ \mathrm{MeV})\,. \end{aligned}$$

Berylium se ovšem velmi rychle rozpadá zpět na dvě helia, a proto musí existovat velký účinný průřez (rezonance) pro záchyt třetího jádra He. Tento specifický excitovaný stav uhlíkového jádra teoreticky předpověděl *Fred Hoyle* v roce 1954 — čistě na základě „antropického“ argumentu, totiž, že uhlík ve vesmíru i v našich tělech existuje a „jinak vzniknout nemohl“ — a skutečně byl o tři roky později Fowlerem a spolupracovníky experimentálně prokázán.

Opik se Salpterem rovněž kvalitativně popsali vznik ještě těžších prvků dalšími záchyty heliového jádra, a to při stále vyšších teplotách v nitru červeného obra,

$$\begin{aligned} {}^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^{16}\mathrm{O} + \gamma \qquad (7{,}1\ \mathrm{MeV})\,, \\ {}^{16}\mathrm{O} + {}^4\mathrm{He} &\rightarrow {}^{20}\mathrm{Ne} + \gamma \qquad (4{,}7\ \mathrm{MeV})\,, \end{aligned}$$



Obr. 9: Syntéza těžších prvků v nitru červených obrů za stále vyšších teplot. Příslušné procesy probíhají čím dál kratší dobu a končí u železa. Poté následuje exploze supernovy: zatímco nitro kolabuje, vnější vrstvy jsou prudce odmrštěny a dochází k syntéze těch nejtěžších prvků.

a podobně ^{24}Mg, ^{28}Si, ^{32}S atd. Navíc při teplotách 800 miliónů K začne probíhat slučování $\mathrm{C} + \mathrm{C} \to \mathrm{Ne}$ nebo Na nebo Mg, při 2 miliardách K pak $\mathrm{O} + \mathrm{O} \to \mathrm{Si}$ nebo P nebo S, a podobně. Uvolňovaná energie je však stále menší a příslušné procesy probíhají stále kratší dobu (Obr. 9). Syntéza končí při centrálních teplotách 3,5 miliardy K u železa. To má největší vazbovou energii ze všech jader, další syntéza už proto *bez dodávání* energie není možná.

Celá síť jaderných reakcí probíhajících během stále se zrychlujícího vývoje rudého obra je dosti složitá, řada procesů se navíc odehrává paralelně v různých vrstvách obrovské hvězdy, v nichž panují odlišné teploty. Řetězec reakcí byl popsán a shrnut v rozsáhlé a dnes klasické práci „Synthesis of the Elements in Stars“, kterou v roce 1957 publikovali *Margaret* a *Geffrey Burbidgeovi, William Fowler* a *Fred Hoyle*. S ohledem na příjmení autorů bývá označována zkratkou B^2FH.

Nezávisle na nich popsal stelární nukleosyntézu v tomtéž roce také

Alastair Cameron. Ten navíc doplnil poslední chybějící kamínek do mozaiky: ukázal, že prvky *těžší než železo* vznikají na samotném konci života hvězd. V rázových vlnách při *explozi supernov* je dosaženo teplot až 200 miliard K, během nichž se *záchytem neutronů* syntetizují jádra i těch nejtěžší prvků.

I když některé konkrétní detaily vzniku těžkých prvků řeší jaderní fyzikové a astrofyzikové dodnes, celkový obraz nukleosyntézy prvků ve vesmíru byl tak koncem 50. let v zásadních rysech dokončen (více podrobností může čtenář nalézt například v [20]-[27]).

Literatura

[1] D. Bodanis: *$E = mc^2$: Životopis nejslavnější rovnice na světě*, Dokořán, Praha, 2002.

[2] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, **17** (1905) 891-921.

[3] A. Fölsing: *Albert Einstein*, Volvox Globator, Praha, 2001.

[4] A. Einstein, L. Infeld: *Fyzika jako dobrodružství poznání*, Aurora, Praha, 2000.

[5] L. Dvořák: *Obecná teorie relativity a moderní fyzikální obraz vesmíru*, skripta SPN, Praha, 1984.

[6] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler: *Gravitation*, Freeman, New York, 1973.

[7] A. Einstein: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, *Annalen der Physik*, **18** (1905) 639-641.

[8] A. Einstein: Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie, *Annalen der Physik*, **20** (1906) 627-633.

[9] A. Einstein: Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie, *Annalen der Physik*, **23** (1907) 371-384.

[10] A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, in *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, **4** (1907) 411-462.

[11] R. Mackintosh, J. Al-Khalili, B. Jonson, T. Peña: *Jádro: Cesta do srdce hmoty*, Academia, Praha, 2003.

[12] V. Malíšek: *Co víte o dějinách fyziky?*, Horizont, Praha, 1986.

[13] T. Bührke: *Převratné objevy fyziky: Od Galileiho k Lise Meitnerové*, Academia, Praha, 1999.

[14] H. DeWolf Smyth: *Atomic Energy for Military Purposes: The Official Report on the Development of the Atomic Bomb under the Auspices of the United States Government, 1940-1945*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[15] R. Jungk: *Jasnější než tisíc sluncí*, Máj, Praha, 1965.

[16] S. Groueff: *Manhattan Project: The Untold Story of the Making of the Atomic Bomb*, Collins, London, 1967.

[17] M. Gowing, L. Arnold: *The Atomic Bomb*, Butterworths, London, 1979.

[18] R. Serber: *The Los Alamos Primer: The Firts lectures on How To Build An Atomic Bomb*, University of California Press, Bereley, 1992.

[19] L. Hoddeson, P. Henriksen, R. Meade, C. Westfall: *Critical Assembly: A Technical History of Los Alamos during the Oppenheimer Years, 1943-1945*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[20] *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900-1975*, edited by K. R. Lang and O. Gingerich, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1979.

[21] J. Kleczek: *Nitro hvězd*, Nakladatelství čs. akademie věd, Praha, 1957.

[22] J. Kleczek: *Vesmír kolem nás*, Albatros, Praha, 1986.

[23] J. Kleczek: *Velká encyklopedie vesmíru*, Academia, Praha, 2002.

[24] S. Weinberg: *První tři minuty*, Mladá fronta, Praha, 1982.

[25] P. Peebles: *Principles of physical cosmology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[26] N.N. Greenwood, A. Earnshaw: *Chemie prvků*, Informatorium, Praha, 1993.

[27] M. Chown: *The Magic Furnace: The Search for the Origins of Atoms*, Oxford University Press, Oxford, 2001.

PARADOXY RELATIVITY A PROSTOROČASU

Jan Novotný

Pravidelní účastníci našich seminářů si možná pamatují na diskusi s profesorem Jiřím Krupičkou [Kru1], [Nov1], která mi poskytla výchozí bod pro přednášku *Čas v teorii relativity* v Jevíčku 1996. Ani profesor Krupička nenechal mé vystoupení bez odezvy [Kru2] a vrátil se k němu na závěr své filosofické tetralogie *Renesance rozumu – Flagelantská civilizace – Zkouška dospělosti – Rozmanitost života* (pro rozsáhlost poslední části z ní byla vyčleněna ještě Stará pevnost, obsahující vzpomínky na pobyt v komunistickém vězení). Troufám si říci, že závěr Krupičkova díla je také jeho vyvrcholením – výseky z dějin 20. století, nazírané očima pozorného a aktivního svědka, jsou prokládány pronikavými úvahami o současném stavu a vyhlídkách lidské civilizace i české společnosti. Zde mne však bude zajímat jen závěrečná kapitola *Kosmický údiv*, ukazující, že autorovi stále nedají spát záhady spojené se slovem **prostoročas**, k nimž dovedla lidské myšlení teorie relativity. Pro Krupičku trvá a znova se klade stejná otázka jako v první knize tetralogie: nezašla věda, která je povolána být oporou střízlivého, kritického rozumu, za jeho hranice? Otázka si jistě zaslouží odpověď už pro vážnost, s níž je kladena – kromě toho doufám, že tato odpověď nebude čtenáře nudit a přiměje ho k vlastnímu zamyšlení nad problémy relativistické fyziky a kosmologie.

Prostoročas a vesmír

Čistá, ryze teoretická matematika si vytváří své problémy sama na svém, hrubým světem neposkvrněném hřišti, a jejich složitosti se meze nekladou. Megakosmos a mikrokosmos vyzývají však matematickou tvořivost k utkání se **skutečným světem věcí**, *ne ke konfrontaci symbolů se symboly.* [Kru2, 367]

Prostoročas (vesmír) se rozpíná a **unáší s sebou** *věci – galaxie a veškerý svůj fyzikální obsah včetně záření a kvantových polí. Prostá otázka:* **co je prostoročas (vesmír) bez nich***? Jak existuje, v jakém fyzikálním vtělení je prostoročas* **sám o sobě**, *jaká je jeho forma existence?* [Kru2, 371]

Avšak prostoročas oživl vlastním životem. Tak naprosto zásadním v celém vesmírném dění, že z jeho životních projevů – rozpínání, prohýbání, vlnění, bublání, z jeho fluktuací – se vesmír sám zrodil. Hezkých pár let předtím, než spatřil světlo světa Herman Minkowski.

Jeho žák, otec relativity, sám vložil do prostoročasu základy jeho zhmotnění, a proces reifikace pokračoval a bohatě se rozrůstal v dalším rozvoji kosmologie. V pracích většiny kosmologů se prostoročas a vesmír staly synonymy. [Kru2, 373]

Citáty z Krupičkovy knihy nám snad přiblížily jeho ústřední otázku: Co je prostoročas? Otázka má dávnou minulost a zprvu se kladla zvlášť o prostoru a zvlášť o čase. Co se týče prostoru, shrnuje tuto minulost mimořádně jasně a stručně Jan Patočka ve svých přednáškách o Aristotelovi:

Sumárně lze říci o Aristotelově filosofii místa, že jedna z jejích hlavních myšlenek, neizolovat totiž problém prostoru od fyzických realit, dochází právě v moderní fyzice rehabilitace, třeba po jiných stránkách ovšem rozdíly jsou největší. Z myslitelů, kteří zahájili novodobé fyzikální myšlení, drželi se této myšlenky Descartes a Leibniz; proti ní se postavili Galilei, obnovitelé atomistiky, Newton a své vyvrcholení nachází tato opačná tendence, aby prostor byl od fyzikálních realit oddělen naprosto, ve filosofii Kantově. U moderních myslitelů souvisí tato snaha s úsilím o to, aby problémy pohybu, schopné řešení ryze matematického, nebyly zatěžovány ontologickými otázkami. U Aristotela se uplatňuje, jak jsme viděli, dvojí protikladná tendence: na jedné straně pohyb je bytostné určení, tvořící jednotu s bytostí samou, na druhé straně je definován vztahem k místu jako čemusi absolutnímu a nehybnému. Myslitelé druhu Galileiho a Newtona opouštějí první, myslitelé jako Leibniz druhou z tendencí Aristotelových. Obojí směřuje pak k jasnějšímu pochopení relační povahy pohybu: tendence newtonská je izolovat pohyb od vnitřní povahy věci a vyložit jej vztahem k tomu, co Aristoteles vyhlásil za fantóm, totiž k absolutnímu prostoru; zde se pohyb tedy izoluje od realit vůbec. Naproti tomu Leibnizova tendence směřuje k tomu, aby relační síť spojující bytost s jinými bytostmi byla úplně integrována do jejího vnitřního sestrojení, a s touto aristotelskou tendencí spojuje tvrzení, že pak není třeba žádného privilegovaného systému. [Pat, 101-102]

Ve shodě s filosofy budeme nazývat tendenci spojovanou zde s Newtonem **substančním** pojetím prostoru, zatímco tendenci připsanou Leibnizovi pojetím **relačním**. Patočka končí svůj přehled Kantem – jak se problém vyvíjel dál, co k němu řekla teorie relativity?

S vědomím, jak obtížně se tyto věci rozebírají a vyslovují, pokusím se vyslovit svůj názor. Speciální teorie relativity (1905) sblížila čas a prostor, když pominula specifické vlastnosti času (směr, plynutí, způsob prožívání) a přizpůsobila jej prostoru. Podle speciální teorie relativity není žádné absolutní místo ani absolutní současnost, k nimž bychom mohli vztahovat dění. Absolutnost, kterou měly prostor a čas v newtonovské fyzice, po nich přebírá soubor událostí – prostoročas. Jak vyjádřil svým známým výrokem Minkowski (1908), *od nynějška prostor sám o sobě a čas sám o sobě jsou nuceny změnit se ve fikci a samostatnou existenci si musí zachovat jen jistý druh jejich sjednocení* [Min, 167].

První Einsteinovy kroky k obecné teorii relativity byly silně ovlivněny důsledně relačním stanoviskem Ernsta Macha. Po jejím vybudování (1915) se rozhořel dlouholetý spor o to, nakolik obecná relativita tomuto stanovisku skutečně vyhovuje. Na jedné straně je v ní prostoročas stále absolutní – nelze říci, že by mu relace věcí nějak předcházely a vytvářely jej. Na druhé straně však ani nemůžeme tvrdit, že prostoročas předchází věcem, jejichž dění je do něho prostě „vloženo“ a povahu prostoročasu nijak neovlivňuje.

Snad nejvýstižnější je říci, že „relační“ a „substanční“ aspekty vztahů prostoru, času a reality srůstají v obecně relativistickém pojetí natolik, že je nelze oddělit, a právě v tom spočívá hlavní potíž diskuse, nakolik je Einstein v souladu s Machem. Vesmír, vesmírné dění, není v prostoročase, ale je vskutku, jak s nesouhlasem konstatuje Krupička, sám prostoročasem. Určitěji řečeno, slovem **prostoročas** vyjadřujeme, že nejuniverzálnější měřitelné aspekty vesmíru jsou geometrické a chronometrické povahy – tyto aspekty ovšem interagují s dalšími vlastnostmi vesmíru. Metrické pole, které tyto aspekty popisuje, náleží k "fyzikálnímu obsahu" vesmíru. Mluvíme tedy o vesmíru – nebo o jeho části, na niž se soustřeďuje naše pozornost – jako o prostoročase v takových souvislostech, kde jsou důležité údaje o vzdálenostech a časových intervalech (z hlediska měření) či o metrickém poli (z hlediska matematického popisu). Vrátíme-li se ke shora uvedenému citátu z Patočky, můžeme říci, že takovéto chápání prostoročasu si bere ze substančního pojetí jeho schopnost snadnějšího matematického uchopení, nezatíženého nejzazšími otázkami po povaze věcí; z relačního pojetí pak přebírá to, že prostoročas nemůže být pojímán jako něco nezávislého na fyzikálních realitách – neboť prostoročasové aspekty vesmíru k těmto realitám samy patří a vzájemně se ovlivňují s jinými realitami.

Nechci tvrdit, že toto pojetí uspokojí náročného filosofa ani že je posledním slovem vědy. Filosof namítne, že zprostorověný čas je tu obrán o své nejpodstatnější vlastnosti, fyzik řekne, že se zde nepřihlíží ke kvantové teorii. Toto pojetí je však v dobré shodě s naším makroskopickým vnímáním a měřením prostoročasu a to je jediné, co budu v pokračování polemiky proti Krupičkovi hájit. Ponechám proto stranou problémy singularit, kvantové pěny apod., o nichž se dnes sotva dá říci něco definitivního a jasného.

Existoval prostoročas před Minkowskim?

Prostoročas začal svou životní kariéru zrozením v lidských hlavách, konkrétně jedné z nich – Hermana Minkowského. Konstrukce lidské mysli byla tak úspěšná ve fyzikálním výkladu světa, mnohokrát ověřená pokusy a pozorováním, přijatá za samozřejmou celou vědeckou obcí, **že začala žít svým vlastním životem**. [Kru2, 372]

Existovala analytická geometrie před Descartem, infinitezimální počet před Newtonem a Leibnizem, teorie nekonečných množin před Cantorem? Zrodily se v určitých lidských hlavách v určitou dobu, a od té doby se staly neodmyslitelnými **nástroji** *vědecké práce a myšlení.* [Kru2, 372]

Analytickou geometrii a infinitesimální počet nikdo nezhmotnil, i přes jejich nesmírný přínos lidskému poznání a tvorbě; zůstávají stále nástroji myšlení. Vzájemné poruchy v oběžných drahách planet neexistují **proto**, *že matematikové je vypočítali a výpočty stále zpřesňují. Avšak prostoročas oživl vlastním životem.* [Kru2, 372-373]

Shodl bych se s Krupičkou v tom, že před Minkowskim nebyl užíván **pojem** prostoročasu. Znamená to však, že nebyl ani prostoročas? Snad by se otázka měla upřesnit. Je prostoročas dílem Minkowského nějak podobně jako je Haškovým dílem Švejk – tj., řečeno s Popperem, jde o část „třetího světa“ lidských výtvorů, který se postupně obohacuje? Řekl bych, že jsou tu závažné rozdíly. Švejka mohl vytvořit jen Hašek a jen jeho čtenář o něm může zasvěceně hovořit; prostoročas by – snad pod jiným jménem – dříve či později zavedl někdo jiný (někteří připisují tuto zásluhu Poincarému) a můžeme se o něm dokonale poučit i bez četby Minkowského. Lze klást např. otázku, co si Švejk myslel (z knihy přímo známe jen jeho slova a činy), ale sotva lze doufat ve všeobecně přijímanou odpověď. Naproti tomu o prostoročase bylo možno formulovat hypotézy, které byly později matematicky dokázány anebo byly empiricky prověřeny jejich důsledky. V prvém případě náleží prostoročas **ideálnímu** světu matematiky, který je bezčasový a slova „před“, „po“, „vždy“ se k němu (v časovém smyslu) nedají vztáhnout – k určité době se vztahuje pouze okamžik, kdy v něm Minkowski prostoročas zahlédl a uložil jej v třetím světě. V druhém případě náleží prostoročas **reálnému** světu, který je přístupný smyslovému nazírání a empirickým testům. Protože tento prostoročas zahrnuje v sobě čas, nedá se ani o něm mluvit jako o něčem, co se vyvíjí, popř. vzniká či zaniká v čase (singularity nejsou místa vzniku či zániku prostoročasu, ale pouze jeho hranice).

Chápu – snad právem – Krupičkovy výhrady tak, že prostoročas měl být ponechán ideálnímu světu a neměl být „zhmotněn“ ve světě reálném, i když je užitečným nástrojem pro jeho poznávání. Srovnání s analytickou geometrií či infinitesimálním počtem však vzbuzuje pochybnosti – nejde o pojmy stejné úrovně, spíše se „prostoročas“ má k teorii relativity podobně jako se má „prostor“ k analytické geometrii. Těžko popřít, že analytická geometrie prostor bez zábran zhmotňuje stejně jako to činí dalším svým pojmům – např. „elipsa“ je jistý matematický vztah v analytické geometrii, ale také čára nakreslená na papíře či trajektorie, po níž se pohybuje planeta. To ale nejenže nevadí, naopak to usnadňuje užitečné spojení mezi oběma světy. Když už bych se měl vzdát užívání slova „prostoročas“ pro jeden z obou světů, rezervoval bych jej pro reálný svět, kde se přirozeně řadí k „prostoru“ a „času“, a v matematických souvislostech byl mluvil třeba o čtyřrozměrné varietě se symetrickým tenzorovým polem druhého řádu s lorentzovskou signaturou. Avšak při posuzování souvislostí mezi matematikou a fyzikou bych tak pojem až příliš fixoval (může se ukázat, že skutečný prostoročas je lépe modelován jinou matematickou strukturou). Kromě toho i v čistě matematických úvahách mohou mé intuici pomáhat názorné představy o pozorovatelích ve fyzikálním prostoročase.

Nevidím tedy ve zhmotnění prostoročasu nic výjimečného ani pohoršujícího. Pohoršení jistě může vzniknout, není-li jeho postavení ve dvou světech dostatečně vnímáno. Tvrzení, že relativisté mohou konstruovat prostoročasy a dopočítávat k nim jejich hmotnou náplň, může působit megalomansky, dokud si neuvědomíme, že to dělají jen na papíře. Na druhé straně, vycházejí-li z empirických dat (např. o symetrii prostoročasu), může jejich výsledek ukázat podobnost se skutečným prostoročasem.

Důvod, proč se v reálném světě prostoročas může jevit jako něco umělejšího než prostor, spočívá také ve způsobu našeho vnímání – bytosti, které by nebyly vázány k povrchu planety a bez námahy by putovaly vesmírem, by si možná vytvořily pojem prostoročasu dříve než pojem prostoru.

Zde bych ukončil ryze filosofickou část debaty, v níž jsem se snažil spíše objasnit své stanovisko než vyvrátit názory oponenta. Filosofické diference (zařadil bych Krupičku mezi stoupence relačního pojetí – odmítání prostoročasu samého o sobě – s výraznými prvky pojetí substančního – důraz na absolutnost vztažné soustavy) vedou ovšem profesora Krupičku k tomu, že se dostává do sporu o konkrétní vlastnosti reality, jak je předpokládá fyzik, a spatřuje ve fyzikově názoru neuvědoměné a nepřiznané nedostatky a rozpory. K jeho kritice zaměříme nadále pozornost.

Konflikt mezi speciální a obecnou relativitou?

Rychlost světla ztratila své výsadní postavení maximálnosti a neměnnosti - **ačkoli právě tento předpoklad je úhelným kamenem celé teorie relativity!** *Milionnásobek světelné rychlosti nijak neruší krásu gigantického rozpětí vesmíru ve fázi inflace.* [Kru2, 372]

Rozpíná-li se **vesmír**, *definovaný svým* **materiálním** *obsahem – galaxiemi, mlhovinami, mezigalaktickou hmotou, zářením, hledanou temnou hmotou, všemi svými fyzikálními entitami, jsou jeho rozpínání a pohyby všech těles v něm neúprosně vázány základním postulátem speciální teorie relativity s rychlostí světla jako nejvyšší možnou rychlostí všech těles. Vzniká konflikt s obecnou teorií relativity, jejíž modely vesmíru připouštějí i rychlosti vzdalování překračující rychlost světla.* [Kru2, 373]

Kosmolog musí ve svých úvahách rozlišovat mezi lokálními sousta-

vami, kde platí princip světelné rychlosti jako maximální pro pohyb těles, a velkými, vzdálenými oblastmi vesmíru, kde tento princip neplatí. **Hranici** *lokálnosti zatím nikdo nestanovil.* [Kru2, 373]

Vztah mezi speciální a obecnou teorií relativity (dále budeme někdy používat zkratek STR a OTR) je, co se týče geometrické stránky věci, dokonalou analogií vztahu mezi eukleidovskou (plochou) a neeukleidovskou (zakřivenou) geometrií. Tento vztah je nám názorně přístupný na zakřivených dvojrozměrných plochách. Pro podrobnější výklad mohu odkázat na seminární sborník [Nov2], zde jen shrnu nejpodstatnější věci. V malém okolí bodu na ploše (lokálně) platí zákony eukleidovské geometrie – analogicky v malém okolí události prostoročasu platí zákony STR. Lze zde zavést kartézské souřadnicové soustavy – analogicky inerciální (též lokálně geodetické či galileovské) vztažné soustavy. Na větší oblasti zakřivené plochy jsou souřadnicové soustavy nutně nekartézské – ve větší oblasti zakřiveného prostoročasu jsou vztažné soustavy nutně neinerciální. V geometrických a fyzikálních vztazích tu vystupují metrické koeficienty, které jsou funkcemi souřadnic (v OTR včetně časové souřadnice). V kartézských (inerciálních) soustavách jsou metrické koeficienty konstantní a geometrické (fyzikální) zákony v nich mají stejný tvar (princip relativity v STR). V obecných soustavách mají geometrické (fyzikální) zákony stejný tvar, zahrneme-li mezi proměnné i metrické koeficienty (obecný princip relativity), po dosazení metrických koeficientů jako funkcí souřadnic již stejný tvar nemusí mít, takže neinerciální soustavy jsou ekvivalentní v slabším smyslu než soustavy inerciální. (Na kolotoči se metrické koeficienty projevují jako potenciály pro odstředivou a Coriolisovu sílu apod.). Konečně je třeba dodat, že v OTR platí Einsteinovy rovnice spojující pole metrických koeficientů se základními „mechanickými“ charakteristikami výplně prostoročasu – energií, impulsem, napětími či tlaky. Takto chápáno, není mezi plochou a zakřivenou geometrií (mezi STR a OTR a jejich prostoročasy) žádný konflikt – první je přiblížením, limitním případem druhé.

Je přirozené a nelze nikomu vyčítat, že není stanovena univerzální hranice lokálnosti. Ta totiž záleží na velikosti zakřivení – na povrchu Země je jiná než na povrchu planety Malého prince – a na přesnosti, kterou konkrétní úloha vyžaduje.

Podívejme se nyní z tohoto hlediska na „úhelný kámen celé teorie relativity“ – princip maximálnosti a neměnnosti rychlosti světla. Co se týče maximálnosti, „nadsvětelné“ vzdalování dostatečně dalekých galaxií a v období inflace i nesmírně blízkých objektů tento princip nenarušují. Světlo, které vysílá vzdalující se galaxie směrem od nás, se vzdaluje ještě rychleji než tato galaxie, a částice s nenulovou klidovou hmotností za ním zaostávají. Nic nebrání tomu, aby rychlost světla ve vakuu zůstala maximální, není jen omezena hodnotou c.

Ohrožen je tedy jen princip neměnnosti rychlosti světla. Jde o tvrzení speciální teorie relativity, podobně jako Pythagorova věta náleží eukleidovské geometrii. Dalo by se říci, že v zakřiveném prostoru Pythagorova věta neplatí, mně však připadá přirozenější říci, že otázka její platnosti vůbec nevzniká – neexistují tu totiž eukleidovské pravoúhlé trojúhelníky, na něž by se mohla aplikovat. Podobně je tomu s rychlostí světla – rychlosti přesahující hodnotu c fakticky nejsou rychlostmi ve smyslu STR.

Především je nutno rozlišit rychlost objektu měřenou v daném místě a rychlost vzdalování odlehlého objektu. To není totéž. Pokusme se si to představit na příkladě, který je fakticky velmi realistický - jak se totiž zdá z nejnovějších kosmologických měření, je třírozměrný prostor vesmíru ve velkém měřítku eukleidovský. Tento prostor se však rozpíná. Představme si jej prostoupen sítí pozorovatelů, každý z nichž se může považovat za nehybný střed rozpínání, konstatuje však, že vzdálenosti mezi ním a jeho kolegy neustále rostou. Rychlost vzdalování je úměrna vzdálenosti a roste tedy se vzdáleností nade všechny meze. Rozsvítí-li však kterýkoliv z pozorovatelů svítilnu, zjistí, že čelo světelné vlny se od něho v bezprostřední blízkosti vzdaluje rychlostí c. Lze říci, že vzdálení pozorovatelé se vybranému pozorovateli vzdalují nadsvětelnou rychlostí nikoliv proto, že by se sami pohybovali, ale protože se „nadouvá“ prostor mezi nimi. (Důležité je potlačit představu dalšího, „podkladového“ prostoru, v němuž se námi uvažovaný prostor rozpíná. Této představě neodpovídá žádná pozorovatelná skutečnost – žádný z pozorovatelů zakotvený v rozpínajícím se prostoru nepociťuje zrychlený pohyb vůči nějakému podkladu.)

Poznamenejme však [Syn, 110-113], že relativní rychlosti pozorovaných objektů vzhledem k pozorovateli lze definovat, zavedeme-li inerciální soustavu podél světelného paprsku spojujícího objekt a pozorovatele (což je možné). Takto definovaná relativní rychlost je vždy menší než rychlost světla.

I místní rychlost může být ovšem změřena jako nadsvětelná v případě, že nepoužíváme hodin s časem synchronizovaným podle zásad STR. Představme si raketu letící nad dálnicí s kilometrovníky, jejíž posádka měří svou rychlost tak, že dělí vzdálenost určenou kilometrovníky časem měřeným na vlastních hodinách. Protože z hlediska země tento čas podléhá dilataci, může rychlost měřená posádkou překročit jakoukoliv mez, ačkoliv její rychlost měřená hodinami synchronizovanými podél dálnice nedosáhne rychlosti světla.

Ke konfliktu obou relativit tedy vůbec nedochází – správně měřená rychlost světla je i podle obecné teorie relativity rovna c a nadsvětelné rychlosti nejsou rychlostmi objektů v pravém slova smyslu.

Cesta do tmy

Způsobuje pohybová dilatace času zeslabení záření vzdalujících se kosmických zdrojů, a dávají astronomická pozorování nějakou odpověď? **Je pronikání k okraji vesmíru cestou do tmy?**

Vezměme příklad profesora Novotného o nesmírně pokročilé civilizaci, schopné letu do budoucnosti vesmíru. „Uvažujme o volném pohybu rakety a kosmonautovi, který se v ní už narodil. Všechny experimenty provedené v raketě a v jejím okolí jej přesvědčují o lokální platnosti speciální teorie relativity. Nepochybuje tedy o tom, že **na hvězdách a galaxiích**, *které se míhají kolem jeho oken, běží čas pomaleji.“* [Nov1, 154]

Formulace „hvězdy a galaxie **se míhají** *kolem jeho oken“ svědčí o raketové rychlosti, která mnohonásobně převyšuje rychlost světla. Průměrná galaxie má rozměry tisíců světelných let, a „mihnutí“ okolo okna by vyžadovalo rychlost řádu, s jakým pracuje hypotéza inflace vesmíru.* [Kru2, 376]

Všechny fyzikální procesy ve hvězdách, které kosmonaut míjí, se zpomalují. Výsledek se projeví zřetelně dilatačním rudým posuvem světla, který přistupuje **navíc** *k rudému posuvu, způsobenému pohybem od pozorovatele (Dopplerovým posuvem).* [Kru2, 376]

Co uvidí **kosmonaut** *při rychlosti téměř dosahující rychlosti světla?*

Odpověď je prostá. **Neuvidí nic**, *jen dokonalou tmu. Záření všech zdrojů bylo zatlačeno účinky extrémní časové dilatace mimo oblast optického spektra; velmi citlivé přístroje v raketě zaznamenají nějaké* *elektromagnetické signály v oblasti velmi dlouhých vln.* [Kru2, 376]

Zde může fyzik vyslovit několik kritických připomínek. Především budí pochybnost výraz „k okraji vesmíru“ – standardní kosmologie nepředpokládá, že vesmír (ať už konečný či nekonečný) má nějaký okraj.

Hvězdy a galaxie se mohou kolem oken míhat, aniž je rychlost světla překročena. I když cesta kolem galaxie trvá posádce rakety tisíce let v čase měřeném hodinami, které byly synchronizovány v galaxii, dilatace času na palubních hodinách zkrátí posádce tento čas na dobu, která se může libovolně přiblížit k nule. Z hlediska posádky se „mihnutí“ vysvětlí zkrácením rychle letící galaxie. Rád zde využívám věty z Krupičkovy knihy [Kru2, 376]: *V ryze teoretické úvaze technická dosažitelnost nehraje úlohu.*

Konečně poslední citát je v rozporu s prostředním, který správně mluví o skládání dvou spektrálních posuvů. Pro objekty **za raketou** je kinematický rudý Dopplerův posuv posilován relativistickým, zatímco u objektů **před raketou** je kinematický modrý Dopplerův posuv relativistickým posuvem zeslabován. Do tmy se tedy ponoří pouze vesmír za raketou a při opravdu velkých rychlostech i po stranách od ní – vždy však bude existovat úhel, kde se kinematický a relativistický posuv přesně zruší a frekvence světla zůstane zachována.

Tyto poznámky jsem musel vyslovit jako fyzik - podstaty našeho sporu se příliš nedotýkají.

Vyhasnou hvězdy?

Podtrhl jsem v předchozím odstavci výraz **kosmonaut neuvidí nic**. *Závěr je jistě překvapivý, ale zůstává ještě rozumově přijatelný, aspoň v dobré science fiction. Není v něm nic, co by vyloženě skřípalo absurdností.*

Při dalším nezbytném kroku je ovšem nutno se zhluboka nadechnout. Při otázce: jak dopadne tato rozumová přijatelnost, když do situace vložíme základní tezi teorie relativity o SKUTEČNOSTI tohoto zjevu, když ztemňování a zhasnutí galaxií není už jen smyslovým vjemem kosmonauta, ale kosmickou realitou? [Kru2, 376-377]

Všechny kosmické zdroje záření jsou skutečně zastaveny účinky časové dilatace. Nukleární reakce v nitru hvězd, vyvolané teplotami ně-

kolika milionů stupňů, budou zastaveny drastickým snížením tepelné rychlosti atomových jader a částic. Termonukleární reakce se nerozběhnou, protože zpomalené částice se nedostanou do styku, potřebného pro jadernou syntézu. Hvězdná pec v nitru hvězd vyhasíná. Teplota hvězdných atmosfér, kde vzniká záření v oblasti optického spektra, poklesne hluboko pod míru, nezbytnou pro excitaci atomů a vyvolání záření. Zmenšení zářivé plochy relativistickým zploštěním celkový efekt ještě zesílí.

Proces ve hvězdách se zastaví. *Může rozum přijmout bez otřesu tvrzení, že pohyb jedné rakety, s jedním nebo několika pozorovateli, vyvolá vyhasnutí hvězd? A jak daleko do rakety všechno „umře"? Může nějaká budoucí supercivilizace, s vesmírnými sondami světelné nebo dokonce nadsvětelné rychlosti, způsobit vyhasnutí (dočasné) celého vesmíru?* [Kru2, 377]

Z absurdity skutečného vyhasnutí hvězd, způsobeného pohybem rakety, je cesta úniku: Přijetí možnosti **nerovnocenných** *soustav, pohybujících se vzájemně rovnoměrnou rychlostí. Porušení základního principu teorie relativity o jejich rovnocennosti, o neexistenci jakékoli obecné, absolutní vztažné soustavy.*

Situace se pak nedá obrátit a říci: nic se nemění, pokládáme-li galaxie za pohybující se vůči raketě. Zavedeme-li rovnocennost obou soustav, kosmonautovy v raketě a galaxií, které raketa míjí, dostáváme se do světa mýtů. [Kru2, 378-379]

Tady je jádro našeho sporu. Jaký je v daném případě rozdíl mezi „smyslovým vjemem" a „kosmickou realitou"? Různí pozorovatelé registrují různé hodnoty fyzikálních veličin. Která je ta pravá? Nepopírám, že některý popis (některá volba vztažné soustavy) může vést k prostšímu a efektivnějšímu popisu jevů. Podle mne to však neznamená, že tento popis je jedině pravý, už proto, že která vztažná soustava je výhodnější, záleží na tom, jaký problém chceme řešit. Popisy různých pozorovatelů z různých vztažných soustav jsou prostě různými průměty téže reality, které si navzájem neodporují a kterýkoliv z nich v principu umožňuje předpovědět, jak budou vypadat průměty jiné. Podle mých zkušeností tato věc dělá při pochopení teorie relativity největší, často nepřekonatelné potíže. Přitom to ale vůbec není specifikum teorie relativity.

Uveďme příklad naprosto „klasický“. K venkovskému nádraží se v dešti blíží rychlík. Cestující ve vlaku vidí kapky letět šikmo proti rychlíku (což dokazují i stopy na oknech) a dopadat šikmo na kolejnice na nádraží. Podle pozorování přednosty, který stojí na nástupišti, dopadá déšť na vlak i na kolejnice kolmo. Jak dopadá **skutečně**? Nemám nic proti tomu, abychom dali přednost popisu z hlediska nádraží a zeměkoule, na níž se nachází. Není to však žádná absolutní přednost – koho zajímá, jak dopadá déšť vzhledem k soustavě spojené se středem hmotnosti sluneční soustavy či s reliktním zářením? Z hlediska fyzikálních zákonů je popis z hlediska vlaku a z hlediska nádraží ekvivalentní.

Může ale rozum přijmout bez otřesu tvrzení, že pohyb jednoho vlaku vyvolal změnu směru deště? A do jaké vzdálenosti od vlaku tento záhadný vliv sahá? Jak může jízda rychlíku způsobit, že přednosta vyhlížející vlak zmokne v šikmém dešti jen zezadu a nikoliv zepředu, když na nástupišti nevane žádný vítr?

Takové otázky by sotva někdo kladl, zakázány však nejsou a je na ně prostá a rozumná odpověď. Pohyb vlaku nevyvolal žádnou změnu reality deště, pouze se déšť z vlaku jeví jinak než z nástupiště a jeho směr je v obou soustavách různý. Oba pohledy se nijak nevylučují, naopak spolu souhlasí. Z hlediska pozorovatele ve vlaku se mu přednosta pohybuje vstříc - kdyby tak činil v kolmém dešti, zmokl by jen zepředu a záda by měl suchá. Protože však déšť padá šikmo, oba vlivy se vyrovnají a přednosta zmokne z obou stran stejně, jak by se muselo stát, i kdyby žádný vlak nejel.

Problém, který spatřuje v relativitě profesor Krupička, se podle mého názoru liší od právě vylíčeného jen tím, že jde o mnohem složitější jevy. Princip je však stejný. Pohyb rakety vůči hvězdě způsobí, že v soustavě rakety – nikoliv v soustavě hvězdy – bude frekvenční spektrum hvězdy ovlivněno jejím pohybem, což se vysvětlí spojením kinematického Dopplerova jevu a relativistické dilatace času. Kdybychom už chtěli mluvit o nějakém skutečném spektru hvězdy, bylo by to spektrum v soustavě, v níž je hvězda v klidu. Hvězdy se však vzájemně pohybují, stejně jako se vzájemně pohybují hvězda a raketa, takže k žádné jedině správné vztažné soustavě vyjadřující kosmickou realitu tím nedospějeme. A proč by měly jaderné reakce v letící hvězdě vyhasnout? Pokusím se příslušnou úvahu udělat podrobněji. Vzdaluje-li se hvězda rychlostí blízkou světelné, budou se této rychlosti blížit též všechna atomová jádra a částice v ní. Rozdíly rychlostí jednotlivých jader a částic poklesnou k nule a srážky nebudou dostatečně intenzivní, aby se rozhořely jaderné reakce. Splňují-li ovšem zákony fyziky požadavek relativistické invariance (a o tom zatím nemají fyzikové důvod pochybovat), nemůže rovnoměrný a přímočarý pohyb soustavy na jejich průběhu nic změnit. V čem je tedy chyba? Podle teorie relativity se relativní rychlosti nepočítají pomocí klasického skládání rychlostí. Správně počítané relativní rychlosti se (samozřejmě) seberychlejším letem hvězdy nezmění a jaderné reakce poběží se stejnými výsledky z hlediska hvězdy i z hlediska rakety.

Míjením hvězdy ohrozí raketa průběh jaderných reakcí ve hvězdě stejně málo jako hvězda míjením rakety ohrozí práci jaderného reaktoru v raketě.

Aby nedošlo k nedorozumění, dodávám, že tím nechci klást rovnítko mezi vjemy pozorovatele a skutečnost. Souhlasím, že tyč ponořená zčásti do vody není lomená, i když to pozorovatel takhle vidí. Nemluvíme tu přímo o vjemech pozorovatelů, ale o jejich interpretaci v rámci zvolené vztažné soustavy. Splňují-li fyzikální zákony princip relativity, pak rovnoprávnost vzájemně se pohybujících inerciálních soustav k žádné absurditě nevede a není tedy třeba jí unikat.

Ještě o paradoxu hodin

Profesor Novotný říká s ne zrovna přejemnělou ironií: „Profesor Krupička vyčetl z knih, že relativisté se tu odvolávají na pohyb vůči privilegované soustavě. Takové úvahy byly vskutku činěny v souvislosti s Machovým názorem, že nelze mluvit o pohybu vůči prostoru, který je sám o sobě smyslově nepostižitelný. Tyto problematické myšlenky je zde však lépe nechat stranou.“ [Nov1, 131]

Necháme-li je ovšem stranou, kde je východisko ze slepé uličky, kam nás zavádí neotřesitelný princip?

Pohyb kosmonautův vůči galaxiím NENÍ totéž jako pohyb galaxií vůči kosmonautovi. [Kru2, 379]

Hodiny v raketě jdou pomaleji a zároveň se jejich tvar zplošťuje. Po návratu trvá dál účinek časového zpoždění, tvar hodin se však vrací do původní podoby a nenese na sobě ani stopy změn, které prodělával během letu. Na žádném z pevných objektů v raketě nezanechají prosto-

rové relativistické změny sebemenší stopy a neexistuje způsob, jakým by se z jejich fyzikálního vzhledu dalo zjistit jejich předchozí tvarové zdeformování. Pokud ovšem v nich neprobíhaly časové změny, jako v případě kosmonautova těla nebo radioaktivních materiálů.

Při použití kalendářních hodin, ukazujících den, měsíc a rok, je po přistání **rozdíl** *mezi raketovými a pozemskými hodinami přímo čitelný a vyčíslitelný.* **Zůstává trvalým absolutním rozdílem pro celý vesmír**. [Kru2, 380]

Čas a prostor jsou v relativitě rovnocenné složky, a splývají v modelu prostoročasu. Kvantová teorie zdůrazňuje jejich sepětí ještě silněji; ve výkladu singularit a primárního kvantového pole převádí čas na prostor . Absolutnost relativistických časových změn a bezestopá relativita prostoročasových změn je proto překvapující svou asymetrií ve fyzice, kde symetrie přírodních zákonů je základním principem. [Kru2, 380]

Za nezamýšlenou ironii se omlouvám – já výraz „vyčetl z knih“ jako ironický necítím. Považuji dokonce za neštěstí naší doby, že v ní lidé příliš píší a málo čtou. Pozorné čtení je hodno chvály a v daném případě poukazuje na zajímavý problém. Nebezpečnou stránku vysvětlování paradoxu hodin pohybem vůči privilegované soustavě vidím v tom, že se tak vlastně nic nevysvětluje, což čtenáři snadno unikne. Nevylučuji, že někdo časem takové vysvětlení najde, ale zatím je standardní teorie nenabízí. Podle ní by se na zpožďování letících hodin oproti souboru hodin synchronizovanému v libovolné inerciální soustavě (tato zdlouhavá formulace je nyní potřebná) nic nezměnilo, ať by okolní vesmír vypadal jakkoliv.

Z Krupičkových úvah jsem nabyl dojmu, že by se smířil s relativistickou dilatací času, kdyby se mohlo říci, že je důsledkem pohybu vůči vesmíru a je „skutečná“ pouze v privilegované kosmické soustavě – nejspíše té, v níž je reliktní záření izotropní. Je však nepochybné, že reliktní záření nemá na uvažovaný jev žádný zjistitelný vliv – je to elektromagnetické záření „jako každé jiné“ a mnohem silnější elektromagnetické záření jiného původu žádnou dilataci času nepůsobí. I kdybychom příčinu paradoxu hodin spatřovali v nějakém jiném aspektu vesmíru, zůstalo by záhadou, proč se hodiny zpožďují právě tím unikátním způsobem, že z pozorování jejich zpožďování nelze absolutní pohyb rozpoznat.

Představme si pozorovatele v klidu vůči reliktnímu záření a planetu, která se od něho vzdaluje rychlostí o stejné velikosti, jakou mají vzhledem k planetě miony vyslané z ní směrem ke zmíněnému pozorovateli. Podle něho jsou miony nehybné a jejich doba života odpovídá době měřené v klidové soustavě mionu. Podle pozorovatele na planetě se doba života letících mionů zkracuje dilatací času, což mu jeho pozorování potvrzují. Rozumím-li správně Krupičkovu stanovisku, měl by tento pozorovatel uznat, že jeho výklad je mylný – ve skutečnosti miony jsou prostě v klidu a zdání jejich prodloužené životnosti vyplývá z toho, že je zjišťována pomocí špatně synchronizovaných hodin. Smůla je v tom, že konkrétní podoba zákona zpožďování znemožňuje nerovnoprávnost mezi planetární a kosmickou soustavou rozpoznat. Bez ohledu na vesmír, který třeba pro zaprášenost svého okolí nemohou vidět, si tak obyvatelé planety vytvoří a měřeními potvrdí představu o rovnoprávných inerciálních soustavách. Tato představa do žádné slepé uličky nevede a není tedy nezbytné hledat z ní východisko.

Je ovšem pravda, že při popisu vesmíru je soustava spojená se středním pohybem galaxií či definovaná izotropií reliktního záření výhodnější a přiměřenější podstatě věci než jakékoliv prodloužení kosmonautovy soustavy. Takové prodloužení není schopno převzít symetrii vesmíru, která je v kosmické soustavě patrná jako homogenita a izotropie. Neřekl bych však, že pohyb kosmonauta vůči vesmíru je něco jiného než pohyb vesmíru vůči kosmonautovi – spíše pohyb vesmíru vůči kosmonautovi je lépe popsat jako pohyb kosmonauta vůči vesmíru, ač je to vlastně totéž. V nevelkých prostoročasových oblastech, do nichž můžeme rozšířit inerciální soustavy, však nemáme důvod od principu jejich rovnoprávnosti – principu relativity – ustupovat.

Všimněme si nyní zajímavé Krupičkovy úvahy o nesymetrii mezi prostorem a časem. Tuto nesymetrii nelze popřít a alespoň částečné vysvětlení jejího původu je velikým problémem. Nejvýraznějším projevem této nesymetrie je třírozměrnost prostoru a jednorozměrnost času, která umožňuje – i když sama o sobě nevysvětluje – makroskopickou nevratnost fyzikálních procesů. (Ani teorie o vícerozměrných prostoročasech se obvykle na jednorozměrnost času neodvažují sáhnout.)

Je však jev uváděný Krupičkou opravdu projevem asymetrie mezi prostorem a časem? Myslím, že je tomu právě naopak. Rozdíl změřených dob při opětném setkání původně shodně kalibrovaných a synchronizovaných hodin svědčí o rozdílné délce různých světočar spojujících stejné události. Jeho prostorovou analogií není délka tyče, ale rozdíl mezi délkami světočar „prostorového typu“, např. železnic z Brna do Prahy přes Tišnov a přes Pardubice v určitém čase (tj. v třírozměrném řezu prostoročasem). Svědkové rozestavění podél tratí a vybavení synchronizovanými hodinami by mohli určit tyto délky spočítáním pražců a ohlášením výsledků do centrály, která by jejich údaje sečetla. Protože se ale délka tratí s časem nemění, stačí na tento úkol i dva cestující po tratích. Jen ve výjimečném případě by mohli dojít ke stejnému výsledku – obvykle mají různé cesty spojující daná místa různou délku. Prozaický údaj o rozdílu délek tratí je absolutním údajem pro celý vesmír. Je prostorově trvalý v tom smyslu, že pokračují-li trati po spojení společně, rozdíl mezi jejich délkami zůstává zachován, např. společnou cestou z Prahy do Plzně se rozdíl v počtu uražených kilometrů zjištěný po setkání cestujících v Praze již nezmění. Je však trvalý i časově v případě, že jej někdo zaznamená a postará se o uchování zápisu. Naopak podle předrelativistických představ o čase se cestující, kteří se rozejdou se stejným časovým údajem na hodinkách (za předpokladu jejich ideálnosti) se stejným časovým údajem také setkají. Podle teorie relativity však může k přesné shodě dojít jen výjimečně, takže v tomto ohledu se právě díky „paradoxu hodin“ symetrie mezi prostorem a časem nastoluje.

Co je časovou analogií zachování délky tyče, která byla během své cesty zkrácena? Je to zachování periody hodin, ať už je to doba oběhnutí ciferníku, kmitu pružiny či cokoliv jiného, která není porušena tím, že během cesty byla prodloužena. Obojí zachování je umožněno tím, že v tyči ani v hodinách nedošlo k časovým změnám. Za tohoto předpokladu není ovšem rozdíl mezi raketovými a pozemskými hodinami přímo čitelný – ani na obyčejných hodinkách nepoznáme, kolikrát již oběhly ciferník, je třeba, aby si to někdo pamatoval, popř. to zaznamenal. V ideálním případě je časová změna stejně bezestopá jako prostorová.

Kde vznikl vesmír?

Před řadou let jsem si povídal s dospívajícím vnukem o vesmíru. Měl jsem dobrého posluchače a zároveň zvídavého debatéra. Rozpínání celé té ohromnosti ho zvláště zajímalo; pohyb má v sobě více než klid. A tak jednou, když jsem se snažil znázornit velikost toho počátečního výbuchu skoro z ničeho, z nepředstavitelně malého bodu, se zeptal: A kde je teď to místo?

Zarazil jsem své povídání a hledal rozumnou odpověď. Pak jsem řekl víc než hloupě: zmizelo, už není. „Vysvětlení“ se mu nelíbilo, mladý mozek nemá rád zaběhané koleje. **Někde** *to přece muselo začít, řekl důrazně, šlo to všechno z jednoho místa na všechny strany, tak to místo musí přece pořád ještě někde být.*

Snažil jsem se vyvléknout výkladem o stejnorodosti vesmíru. Ať jsme v něm kdekoli, odevšud vypadá stejně, všude se rozbíhá na všechny strany, každé místo je jakoby začátek toho rozpínání - přesvědčoval jsem jeho i sebe, a nelíbilo se mi to. Jemu taky ne. A kdyby se to všechno obrátilo, tak by přece celý ten vesmír musel spadnout nazpátek, tam kde začal, prohlásil a podíval se na mne nedůvěřivě. [Kru2, 383]

Zastaví-li se někde vesmírné rozpínání a změní v kontrakci, začne se všechno stahovat k **určitému** *středu.* **Kde**, *ve zcela stejnorodém vesmíru, „vznikne“ tento střed, kde se objeví preferované místo?*

Nenašel jsem jméno kosmologa, který by si dal tuto otázku. Asi je příliš naivní - ta otázka.

A přitom existence takového středu je nevyhnutelným důsledkem úvah o gravitační kontrakci vesmíru. [Kru2, 384]

Každá úvaha o kontrakci vesmíru vytváří automaticky **střed** *souběhu kosmických hmot, a tím pevné místo ve vesmíru.* **Vzniká univerzální vztažná soustava pro celý kosmos**. *Naprostý relativismus vesmírného dění padá.* [Kru2, 384]

Je teď na mně, abych se pokusil na chlapcovu otázku odpovědět. Myslím, že obě spontánní dědečkovy odpovědi byly správnější než jeho dodatečná úvaha. Je třeba začít otázkou: Kdy říkáme o událostech v rozličných časech, že proběhly na stejném místě?

Relativista by mohl říci, že „místo“ závisí na volbě vztažné soustavy a ta je omezena jen tím, že vztažný bod by se měl pohybovat podsvětelnou rychlostí. Na stejném místě jako počáteční událost může tedy nastat libovolná koncová událost, která je z ní podsvětelnou rychlostí dosažitelná. Profesor Krupička by proti tomu zřejmě postavil svou víru v absolutní soustavu, která by místo definovala jednoznačně.

Myslím, že v běžné řeči chápeme pojem stejného místa ještě poněkud jinak, jaksi kompromisně. V Brně máme pamětní desky na rodných domech Ernsta Macha a Kurta Gödela – stojím-li před nimi, mám poněkud slavnostní pocit: **tady** se oba velikáni narodili a strávili své dětství. Mohlo by se zdát, že si místo definuji „geocentricky“, ale není to tak jisté. Kdybych věděl o někom, kdo se narodil na lodi na širém moři, považoval bych za jeho rodné místo spíše kajutu lodi než průsečík jistého poledníku a rovnoběžky – na druhé straně bych neupíral kapitánu právo připomenout na tomto průsečíku posádce, že tady se nám kdysi narodilo dítě. V muzeu na Špicberkách jsem se dověděl, že tady kdysi rostly obří rostliny, které se přeměnily v uhelné sloje, protože souostroví před dávnými časy leželo poblíž rovníku a bylo až později zatlačeno do Arktidy geologickými procesy.

Jak se zdá, definujeme si místo vzhledem k nějaké trvající a zhruba se zachovávající struktuře – takových struktur může být i více a kterou si vybereme, závisí na okolnostech. Nenajdeme-li takovou strukturu, jsme oprávněni říci, že toto místo už není. Odpověď, že raný vesmír už není, je tedy docela rozumná.

Dalo by se namítnout, že v kosmických souvislostech zachovávající se struktura existuje, je dána izotropií reliktního záření, které takto definuje privilegovanou vztažnou soustavu. Nezničitelný pozorovatel, jenž by byl přítomen vzniku Země a udržoval by se od té doby na místě, kde by se mu reliktní záření jevilo ve všech směrech stejně, by mohl dosvědčit, že Země se zrodila „tady“, a budoucí vyspělá civilizace by tam mohla pořádat turistické poutě. Pochybuji ovšem, že by této možnosti využívala, protože na „místě“ (na rozdíl od rodných domů) nezůstalo nic pro „rodáka“ specifického (ani na porodnice se pamětní desky nedávají).

Nedejme se však odradit a hledejme v kosmu místo, kde se odehrála počáteční exploze. Krupičkova úvaha by se mohla odbýt tím, že předpokládá uložení smršťujícího se vesmíru v nějakém větším prostoru, v němž se smrštěním vytvoří pevný bod (a musel tam tedy být i při zpětně sledovaném rozpínání). To standardní kosmologie nepředpokládá. Připusťme ale, že pozorovaný vesmír je „bublina“ s okrajem, ke kterému nedohlédneme. Pokusím se ukázat, že ani to nevede k existenci jednoznačně definovaného místa exploze.

Představme si, že ve zhruba plochém prostoročase se v nějakém místě a čase pořádá slet kosmických raket. Rakety se slétnou ze vzdálených koutů vesmíru, při setkání se však nezastaví a opět se všemi směry a nejrůznějšími rychlostmi rozletí. Na oslavu události při setkání posádky na okamžik zapnou silné zdroje světla. Ve vesmíru tak vznikne rozpínající se bublina raket obalená šířícím se sférickým čelem světelné vlny. A místo sletu, očekával by možná čtenář, zůstane určitelné jak střed této sféry. Ale není tomu tak. Podle teorie relativity je rychlost světla konstantní pro všechny rakety. Každá posádka má tedy právo si myslet, že ona se nachází ve středu rozpínání a setrvává na místě, v němž se odehrál slet. Zpětný pohled na rozpínání, popřípadě jeho vystřídání kontrakcí tedy vedou pouze k určité **události**, nikoliv k určitému místu, které by bylo možno nadále sledovat. Tím spíše nenajdeme takové místo ve stejnorodém vesmíru, který není uložen v ničem vnějším. Vesmír se rozpíná či smršťuje kolem libovolně zvoleného „středu", každé místo v něm se stejným právem hlásí k dědictví velkého třesku, a nejlepší odpovědí na chlapcovu otázku tedy je, že místo, na které se ptá, je **všude**.

Přestože se rozcházím s profesorem Krupičkou v mnoha podstatných věcech, jeho nezdolný zájem o principiální otázky sleduji s obdivem. Při čtení jeho textů si vždycky vzpomenu na výrok starce Zosimy z *Bratrů Karamazovových*, kterým komentuje vášnivé hledání Ivana Karamazova: „... ušlechtilé srdce, schopné trpět taková muka, o svrchní věci pečovati a jich hledati ..." Snad ale hledání přináší i radost - mně ji aspoň přineslo a za to svému oponentovi na závěr děkuji. Poděkování patří také doktorce Janě Rybníčkové, bez jejíhož pečlivého a kritického pročtení by byl předchozí text mnohem méně srozumitelný.

Literatura

[Kru1] Krupička J.: *Renesance rozumu.* Český spisovatel, Praha, 1994.

[Kru2] Krupička J.: *Rozmanitost života.* Paseka, Praha, 2002.

[Min] Minkowski H.: *Raum und Zeit.* Přednáška na shromáždění německých přírodovědců a lékařů 1908, rusky ve sborníku *Princip otnositeľnosti*, Atomizdat, Moskva 1973.

[Nov1] Novotný J.: *Čas v teorii relativity I, II.* Sborník z VIII. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky, JČMF, Brno, 1996.

[Nov2] Novotný J.: *Princip relativity v proměnách věků.* Sborník z X. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky, Prométheus, Velké Meziříčí 2002.

[Pat] Patočka J.: *Aristoteles.* Vyšehrad, Praha 1994.

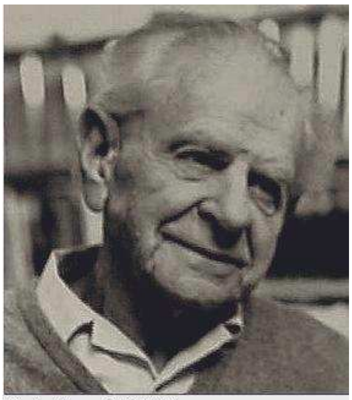
[Syn] Synge J. L.: *Obščaja teorija otnositeľnosti.* IIL, Moskva 1963.

KARL RAIMUND POPPER

Jan Slavík

Milé kolegyně, vážení kolegové !

Chtěl bych dnes říci pár slov o Karlu Raimundu Popperovi.



Sir Karl Popper (1902-1994)

Mám k tomu tři, doufám pádné, důvody.

Za prvé: Karl Popper bývá považován za nejvýznamnějšího filosofa vědy 20. století. Samozřejmě ne všemi. Někteří ho dokonce ani nepovažují za filosofa, ale tak už to ve filosofických luzích chodí. Osobně si myslím, že mezi významné filosofy, a tím spíše filosofy vědy, patří.

Za druhé: Asi před měsícem, přesně **28. července**, tomu bylo 100 let, co se Karl Popper narodil, a sté výročí narození je snad vhodným důvodem pro jeho připomenutí.

Konečně za třetí: Karl Popper je vázán na české prostředí. Nepodařilo se mi sice zjistit přesně jak, ale následující vím: Ve své autobiografii *Unended quest* (Věčné hledání) Karl Popper uvádí, že jeho dědeček žil v Kolíně. Žák Popperův J. Watkins pak ve stručné Popperově biografii uvádí, že i otec Popperův se narodil v Kolíně. Potvrzení této skutečnosti jsem již jinde nenalezl.

V přednášce bych chtěl uvést některá základní data z Popperova života a ve 4 intermezzech se pokusím trochu přiblížit jeho názory.

Pokud jde o Popperův život, začali jsme již v úvodu. Vraťme se ale ještě k Popperovu otci: V době, kdy se Karl narodil, žil otec Simon se svou ženou Jenny, rozenou Schiff, ve Vídni. Pracoval jako právník. Oba, Simon i Jenny, byli poluterštění židé. Před narozením Karlovým měli již dvě dcery Doru (nar. 1893) a Annie (nar. 1898).

Ze svého dětství si toho Karl moc nepamatoval. Ve své autobiografii uvádí, že nejranější vzpomínka, která mu utkvěla v paměti, byla z doby, kdy mu bylo asi 5 let, a byla to vzpomínka na lásku k nevidomé dívence. Poprvé se věnoval filosofickému problému v 8 letech: byl to problém nekonečna.

Jeho mládí probíhá v nepříliš šťastném čase. Právě v den jeho 12. narozenin je vyhlášena válka, která později dostane označení 1. světová. Válka se ale zpočátku rodiny Popperových příliš nedotýká. K ostrému průlomu dojde, když do místa, kde jsou na letním pobytu, přijde zpráva, že syn rodinné přítelkyně Rosy Graf (sestry „jistého" Sigmunda Freuda), která je s nimi na dovolené, zemřel na frontě.

Po válce, bez maturity, opouští Karl střední školu a začíná studovat na vídeňské univerzitě. (K zapsání předmětů maturita potřebná nebyla.) Jeho život je v tu dobu dosti neuspořádaný. Pracuje jako spolupracovník psychoanalytika Adlera (jehož psychoanalýza bude pro Poppera příkladem pseudovědy), dává hodiny americkým studentům (nezjistil jsem, hodiny čeho dával) a asi 3 měsíce se angažuje v komunistickém hnutí. Po střílení do mladých socialistů, k němuž dojede ve Vídni v roce 1919, ostře změní názor:

Přijal jsem nekriticky a dogmaticky jedno nebezpečné učení. Nejprve následovala skeptická reakce a nějaký čas jsem odmítal veškerý racionalismus. Jak jsem později zjistil, jedná se o typickou reakci zklamaného marxisty. Ještě než mi bylo 17, stal jsem se odpůrcem marxismu. Uvědomil jsem si dogmatický charakter tohoto učení a jeho neuvěřitelnou intelektuální domýšlivost. Je hrozné dělat si nárok na určitý druh poznání, které dovolí riskovat životy jiných lidí pro nekriticky přijímané dogma nebo sen, který se může ukázat jako neuskutečnitelný. Je to hrozné zejména u intelektuála, u někoho, kdo dokáže číst *a přemýšlet. Nesmírně mne deprimovalo, že jsem se nechal do takové pasti polapit.*

Později se stane z Karla Poppera jeden z nejvýznamnějších antikomunistů. Tomuto aspektu se budu níže také věnovat.

Ve 20. létech pokračuje Popperův zájem o hudbu. Vstoupí do klubu přátel moderní hudby (vedené Schönbergem), aby pak přešel do klubu přátel hudby chrámové (pro vstup do klubu skládá fugu!). V roce 1922 složí maturitu a získá právo učit na nižším gymnáziu matematiku, fyziku a chemii. Později získá i právo učit na vyšším gymnáziu. Od roku 1925 působí na Pedagogickém institutu (kde se zřejmě zároveň učí i vede semináře). Začíná se zabývat problémem demarkace: odlišení vědy a pseudovědy. V roce 1928 píše a obhajuje doktorskou práci *O problému metody v psychologii myšlení.* V témže roce se také setkává se svou budoucí ženou Josefinou Henninger. V roce 1929 pak píše své základní dílo *Die beiden Grund-probleme der Erkenntnistheorie*, zabývající se problémem demarkace a problémem indukce. Po dvojím zkrácení (poprvé Popperem a pak redaktorem) vychází v roce 1934 tato práce jako *Logik der Forschung* (s vročením 1935). Mezitím, v roce 1930, získává Popper učitelské místo na střední škole a ožení se s Josefínou.

* * *

INTERMEZZO 1. *Logik der Forschung* (později upravená a vydaná anglicky jako *Logic of Scientific Discovery*).

Jak už bylo zmíněno, zabývá se Popper dvěma problémy: problémem demarkace a problémem indukce. Skupina filosofujících fyziků (později známá jako Vídeňský kruh) se v tu dobu snažila oddělit „pozitivní vědu“ od „neverifikovatelné metafyziky“ (zvl. německé). Standardní odpověď na daný problém je, že metafyzika spekuluje a věda používá indukci. Zbývá pak jen odůvodnit samotnou indukci. To je ale dosti obtížný úkol: Popper patří k těm filosofům, kteří dospěli k názoru, k němuž již kdysi dospěl David Hume, totiž, že indukci odůvodnit nelze. Z toho, že se nějaká událost za určitých okolností udála třeba stokrát, nelze logicky odvodit, že se udá po 101.

Příkladem takové nemožnosti je Russellovo kuře :

1. den dostane zrní, 2. den dostane zrní,... 10. den dostane zrní,...20. den dostane zrní, ...atd. až 35. den indukce končí a kuře je zaříznuto.

Popper vskutku radikálně tvrdí: Žádná indukce neexistuje. (Ve smyslu logického důkazního postupu.) Dodává ale, že žádnou indukci nepotřebujeme. Metoda vědy je jiná a demarkaci vědy a pseudovědy proto formuluje jinak.

Pro nový obraz vědy se dovolává autority :

Přírodopisci [18. a 19. století] byli většinou přesvědčeni, že základní pojmy a základní zákony fyziky nejsou v logickém smyslu svobodnými výtvory lidského ducha, nýbrž že mohou být vyvozeny z pokusů "abstrakcí", tj. logicky. Jasné poznání, že toto pojetí je nesprávné, přinesla vlastně až obecná teorie relativity, neboť ukázala, že dle základu, velmi odlišného od Newtonova, můžeme vysvětlit okruh faktů zkušenosti dokonce uspokojivěji a úplněji, než bylo možné dle základu Newtonova.

A. Einstein

Věda začíná teorií, resp. hypotézou (a Popper bude dodávat, že odvážné hypotézy jsou lepší), ne pozorováním. Dáme-li studentům pokyn – jak prý Popper rád dělával –, aby pozorovali, pak se, alespoň ti chytřejší, po chvíli zeptají, co mají pozorovat.

To, co charakterizuje vědu, není verifikace, ale falzifikace. Stovka tvrzení může nějaký zákon potvrzovat, ale 101. pozorování – jediné pozorování – ji může vyvrátit. Právě vyhýbání se falzifikaci je to, co charakterizuje pseudovědu, jejímiž klasickými popperovskými příklady jsou psychoanalýza a marxismus.

Abychom mohli testovat teorie, potřebujeme testovací „základní výroky". Jsou to, slovy Popperovými, výroky, které říkají, že „*v prostoročasové oblasti existuje nebo se děje to a to.*"

Vzorovým základním výrokem je :
Tady je sklenice vody.

Celou proceduru testování komplikuje skutečnost, že „základní výroky" nejsou definitivní. Kapalina ve sklenici nemusí být vodou. (Popperův příklad: může jít o těžkou vodu.) Takováto situace je typická, protože obecné termíny, jimiž popisujeme pozorování, jsou „teoriovité". Nicméně při posuzování platnosti tvrzení vyjadřovaných základními výroky se obvykle shodneme.

Dalším problémem je skutečnost, že často se lze vyhnout negativnímu výroku testu tím, že nějakou její část upravíme. Takovéto úpravy Popper v zásadě odmítá, i když si je vědom, že nejednou lze takové doplňkové hypotézy ověřovat a mohou se ukázat pravdivými.

Popper formuluje pravidla „vědecké hry“:

1) *Vědecká hra v principu nekončí. Jestliže někdo prohlásí, že vědecká tvrzení nevyžadují další ověřování, přestává být účastníkem hry.*

2) *Jakmile byla určitá hypotéza formulována a ověřena, jakmile prokázala svou životaschopnost, nelze o ní bez „dobrého“ důvodu pochybovat.*

Z uvedené formulace je patrné, že falzifikovatelnost $\not\equiv$ falzifikace, a Popper tedy není „naivním falzifikacionistou“.

Doplňme naše stručné vylíčení Popperovy teorie vědy třemi komentovanými výroky.

Striktně existenciální tvrzení jsou nefalzifikovatelná.
Příklad: Existuje bílá vrána.
(Je třeba omezit uvažovanou oblast prostoročasu.)

Jednodušší teorie jsou lepší, protože jsou lépe falzifikovatelné.
(Vysvětluje přirozeně preferování jednoduchých teorií.)

Čím více zákony zakazují, tím více říkají.
(Tím, co zákony zakazují, vymezuje Popper tzv. empirický obsah zákona.)

* * *

Pokračujme Popperovým životopisem. V létech 1935-36 odjíždí přednášet do Anglie. V roce 1936 pak napíše první verzi *Bídy historicismu*, práce, která otvírá Popperovo společenskovědní období. V roce 1936 také navštíví Kodaň a neshodne se s Bohrem na interpretaci kvantové teorie. (Odtud pak vychází Popperova zajímavá objektivní *propenzitní* interpretace pravděpodobnosti. Propenzita je objektivní sklon k tomu nebo onomu výslednému jevu.) Vzhledem k situaci v Rakousku odjíždí v roce 1937 pracovat do Christchurch na Novém Zélandě. Když se po Anschlussu v Rakousku situace ještě zhorší, pomáhá uprchlíkům.

Píše také jednu ze základních antikomunistických knih *Otevřená společnost a její nepřátelé*. Dopíše ji v roce 1943, ale díky různým peripetiím (americký kritik Popperovi vytýká, že nepovažuje Aristotela za hodného kritiky) vyjde kniha až po válce v roce 1945.

* * *

INTERMEZZO 2. Otevřená společnost a její nepřátelé

Třemi hlavními nepřáteli otevřené společnosti jsou podle Poppera Platon, Hegel a Marx.

Popper upozorňuje, jak geniálně položil Platon svoji otázku moci: Kdo má vládnout ? Odpověď je pak nasnadě: Ten nejlepší! A nejlepší je ovšem filosof Platon. Popper tvrdě kritizuje Platonovu společnost, tak jak je představena v *Ústavě* a *Zákonech*, společnost se vskutku totalitní kontrolou (včetně eugenické kontroly plození potomků). Ač určité kritické připomínky na adresu Platonovy koncepce společnosti se objevily již dříve, byl to Popper, který ukázal, jak nekriticky je tento obdivovaný filosof čten.

Popper je také rozhodným kritikem hegelovské dialektiky. Jeho přístup může dobře charakterizovat krátký článek *Co je dialektika?* z roku 1937. Základní hodnocení zní: „*Vágně vystihuje určité přírodní zákonitosti. Ale připuštěním možnosti kontradikce je zbavena možnosti vyvrácení. Odtud pramení nebezpečný dogmatismus.*" Následuje „klasický" citát z Engelse: „*Mějme algebraickou veličinu a, negujme ji, dostaneme* $-a$*. Negujme nyní tuto negaci, dostaneme* $-a \cdot -a = a^2$*, což není nic jiného než původní veličina, jenže na vyšším stupni.*" Popper výrok komentuje: „*Přijměme negaci jako* $-a$*, pak bychom očekávali negaci negace jako* $-(-a) = a$*. Ale co např. zkusit: syntéza = téze + antitéze, tj.* $a + (-a) = 0$ *?*"

Pokud jde o Marxe, upozorňuje Popper, že Marx formuloval řadu tvrzení o vývoji společnosti, která se nepotvrdila (např. pokles životní úrovně proletariátu). Marxisté ovšem tyto falzifikace nepřijali a udělali tak z marxismu pseudovědu. Jako jeden ze zásadních omylů vidí Popper Marxovo tvrzení, že komunisté, až se dostanou k moci, ji nezneužijí. (Psáno v průběhu 2. světové války!)

* * *

V roce 1946 Popper nastupuje na London School of Economics, kde působil až do svého penzionování v roce 1969. Profesor Popper (tím se stal v roce 1949) zřejmě nebyl příliš oblíben, byl pánovitý a nepříliš tolerantní, ale obvykle si dovedl vybrat bystré žáky, s nimiž spolupracoval, aby se s nimi pak ne vždy v dobrém rozešel. (Nejklasičtějším příkladem je asi Imre Lakatos, tvůrce sofistikovaného falzifikacionismu, zvaného metodologie vědeckých výzkumných programů, zjevně inspirovaného Popperovými metafyzickými výzkumnými programy.) V poválečné době se Popperův zájem začíná znovu obracet k přírodním vědám. Věnuje se přirozené dedukci, aby se pak věnoval problematice šipky času. V roce 1950 odjíždí do Spojených států na Harward Lectures, kde je, podle svých vlastních slov, placen jako filmová hvězda : $600 za přednášku. Za získané peníze zakoupí sídlo v předměstí Londýna Penn, kam pak zve řadu hostů. V roce 1959 konečně vychází anglická verze *Logik der Forschung – Logic of Scientific Discovery.* V témže roce prodělá operaci očí. Rok na to zavádí pojem *verisimilitude* – podobnosti pravdě, podstatně se lišící od *Wahrscheinlichkeit*, tj. pravděpodobnosti. Konkrétní návrh explikace pojmu verisimilitude vyvrací český emigrant Tichý v roce 1973.

* * *

INTERMEZZO 3. Verisimilitude

Definujme $Cn(A)$ jako množinu logických důsledků systému tvrzení A. Nechť T je množina pravdivých výroků a F je množina nepravdivých výroků. Pak pravdivý obsah $A \equiv A_T \equiv Cn_T(A) = Cn(A) \cap T$ a obdobně nepravdivý obsah $A \equiv A_F \equiv Cn_F(A) = Cn(A) \cap F$.

Budeme říkat, že A má větší verisimilitude než B, jestliže buď $A_T \supset B_T$ a $A_F \subseteq B_F$, nebo $A_T \supseteq B_T$ a $A_F \subset B_F$, čili slovy: je-li větší pravdivý obsah a nepravdivý obsah není větší, nebo naopak pravdivý obsah není menší, ale je menší nepravdivý obsah.

Nevhodnost této definice ukázal Tichý (1973) důkazem tvrzení: Předp. $\exists f \in B_F$. Pak B nemá větší verisimilitude než (libovolné)A .

Důkaz: Nechť

1) $B_T \supset A_T$, pak $\exists b \in (B_T - A_T)$. Zřejmě $f \wedge b \in B_F$ a $f \wedge b \notin A_F$ (jinak $b \in A_T$), tj. není $B_F \subseteq A_F$.

2) $B_F \subset A_F$, pak $\exists a \in (A_F - B_F)$. Zřejmě $(f \Rightarrow a) \in A_T$ a $(f \Rightarrow a) \notin B_T$, tj. není $B_T \supseteq A_T$.

Ani jedna z variant pro větší verisimilitude B vůči A nenastala. Důkaz je proveden.

* * *

INTERMEZZO 4. Obecná teorie růstu poznání, teorie 3 světů

Popper formuluje obecnou teorii poznání jednoduchým schématem (vypadajícím lépe v angličtině):

$$P_1 \to TT \to EE \to P_2,$$

kde $P_1 \equiv$ *problem* 1 je počáteční problém, $TT \equiv$ *tentative theory* je pokusná teorie, $EE \equiv$ *error elimination* je odstranění chyb a kde $P_2 \equiv$ *problem* 2 je následný problém. Naše poznání se tedy pohybuje od problému k problému, dospět k nějakému (nedočasnému) řešení mu není přáno.

Charakter růstu poznání je přitom univerzální. Týká se jednoduchých organismů jako je améba, i tak složitých jako je Einstein. I když jsou i určité rozdíly.

K tomu několik citátů:

Od améby k Einsteinovi je růst poznání stále stejný: zkoušíme řešit naše problémy a získat eliminací chyb něco blížící se adekvátnosti našich zkusmých řešení.

Einstein se může mýlit, stejně jako se může mýlit améba.

Einstein na rozdíl od améby … přistupuje k řešením kriticky.

U améby: přírodní výběr eliminuje mylné hypotézy eliminací organismu. Naše kritická metoda pak spočívá v tom, že necháváme své hypotézy umřít za nás (in our stead).

Problém učení ovšem zůstává: Uvažme pro příklad 2 univerzální zákony. 1) Všechny labutě jsou bílé. 2) Všechny labutě jsou černé.

První zákon jsme nejednou v životě koroborovali (corroborate = potvrdit – Popperem zavedený termín pro potvrzení, které není důkazem neboli verifikací) a druhý nejednou falzifikovali. Jenže, když se s Karlem Popperem vydáme na Nový Zéland, může se stát, že spatříme černou labuť! Navzdory Popperovu doporučení se falzifikovaná teorie může stát „lepší“ než koroborovaná.

Popper také formuluje svoji teorii 3 světů : světa fyzického, světa mentálního a světa duševních výtvorů, o nichž předpokládá, že vzájemně interagují. Naše teorie přece ovlivňují svět, v němž žijeme.

* * *

Zbývá uzavřít Popperův životopis : V roce 1965 je pasován na rytíře a píše vlivnou práci *O oblacích a hodinách* zabývající se problematikou determinismu ve světě. Popper je pro „otevřenost“ a neúplnou determinaci i v přírodě. Jak jsem již uvedl, v roce 1969 je Popper penzionován, aby pak přednášel takřka po celém (otevřeném) světě. V roce 1974 je mu ve slavné edici *Library of Living Philosophers* věnována kniha, jejíž rozsah obsáhne (poprvé) 2 svazky. V roce 1977 píše s nositelem Nobelovy ceny za fyziologii J. Ecclesem, každý na půl, knihu *The Self and its Brain*, věnující se problému vztahu těla a duše, které chápou jako interagující systémy.

V roce 1994 se po mnoha létech vrací do země svých předků, do Čech. 25. května tohoto roku je mu udělen titul Doktor Honoris Causa Lékařské fakulty Karlovy Univerzity, právě za zmíněné dílo *The Self and its Brain*. 17. září 1994 pak umírá.

POST SCRIPUM

Zbývá dodat, že existuje jeden významný, byť nedoceněný filosof, který teorii odstraňování omylů, jako základní koncepci v teorii poznání, předložil již před Popperem. Protože v období kolem 1. světové války se často vyskytoval ve Vídni a tam také měl řadu přednášek, není vyloučeno, že K. Popper zneužil příslovečně nízkého paměťového koeficientu zmíněného filosofa a tuto teorii si přisvojil.

Citujme z referátu prosloveného na 3. všesvětovém filosofickém symposiu v Basileji:

„Ze zachovaného dopisu A. Einsteinovi: *Co je věc a co je prázdno dokazuje má teorie poznání. A jestliže si někdo hraje se slovy, já to*

rozhodně nejsem".
„Vy jste např. svou teorií relativity dokázal, že Newtonova teorie je chybná. Přesto však tvrdíte, že není *chybná*, že je jen nepřesná. Jakým právem však označuje se *chyba* jako *nepřesnost*? Víte-li pak vůbec, milý Alberte, že na takových slovních hříčkách vybudoval hrabě Karl Marx celou svou teorii poznání?"

V dopise je uvedeno schéma porovnávající teorii poznání Marxovu a autora:

MARX	Má teorie
1) PRAVDA - nepřesná	1) OMYL - přesný
2) ZPŘESŇUJEME PRAVDU	2) VYVRACÍME OMYL
3) VÍME VŠE	3) NEVÍME NIC

V autorově pojetí ovšem nejde o žádný nihilismus. Poznání je v podstatě kladný proces, při němž se vymaňujeme z počátečních omylů a chyb, abychom nakonec „*stanuli před tváří Všehomíra s hlavou jasnou a prázdnou*". Autor pak uzavírá : „*Jestliže tedy nevíme nic, víme to správně.*"

(Referát přednesl prof. L. Smoljak)

Poznámka editora J. Novotného

S problémem „verisimilitude“ jsem se setkal, aniž jsem to tušil, nad testy, kterými občas bavím své studenty. Např. jsem je nechal spojovat fyziky s jejich objevy. Uvažoval jsem, jak test vyhodnotím, a napadlo mne, že pouhé sečtení správných odpovědění (popř. odečtení nesprávných) nemusí dávat dobré závěry, protože jednotlivé znalosti nejsou stejně důležité a přitom na jejich důležitost mohou mít různí lidé různé názory. Přesto mohou nastat případy, kdy lze jednoznačně říci, že jeden student byl v testu úspěšnější než druhý. Např. dva studenti se ve všech odpovědích (popř. i neodpovědích) shodovali až na jediný případ, kdy jeden připisoval předpověď rozpínání vesmíru Fridmanovi a druhý Einsteinovi. Tedy co nevěděl první student, nevěděl ani druhý, naproti tomu první student věděl vše, co věděl druhý a ještě něco navíc. Kdo by tedy pochyboval o jeho větší úspěšnosti?

Posuďme však, jak by se oba studenti stavěli k výroku:
„Fridman předpověděl rozpínání vesmíru a Galilei pokles tlaku vzduchu s výškou“ za předpokladu, že druhou předpověď připisovali Galileimu. Nepochybně by první student (mylně) označil tento výrok za pravdivý, zatímco druhý student (v souladu se skutečností) za nepravdivý. Jako by tedy druhý student, označený zbrkle za slabšího, přece jen věděl něco, co první neví.

Myslím, že tu jde o konkrétní příklad námitky, kterou v obecné formě vznesl proti Popperovi Tichý. Já se ale domnívám, že můj původní názor na stanovení pořadí mezi studenty nebyl námitkou otřesen – zůstává v platnosti, že druhý student neví nic, co by nevěděl první. Problém je v tom, že logik hodnotí konjunkci výroků jako nový výrok, ačkoliv spojení výroků do konjunkce nepřináší žádnou novou informaci. Nestačilo by k záchraně Popperovy definice verisimilitude, kdybychom zakázali při formulování výroků teorie používat konjunkce? Nikoliv, protože výrok:
„Jestliže Fridman předpověděl rozpínání vesmíru, pak Galilei nepředpověděl pokles tlaku vzduchu s výškou“
označí první student mylně za nepravdivý a druhý správně za pravdivý. Přesto se nemohu zbavit pocitu, že Tichého námitka je vpodstatě sofistickou lstí, proti níž je třeba se bránit přesnější formulací Popperovy teorie, nikoliv jejím resignovaným opuštěním. Je třeba ně-

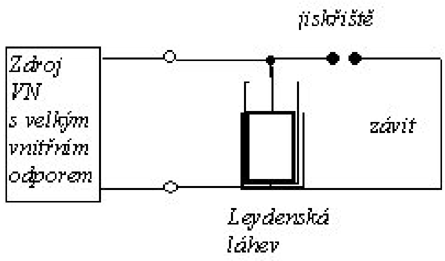
jak postihnout ne samotnou pravdivost výroků, ale jejich informační obsah.

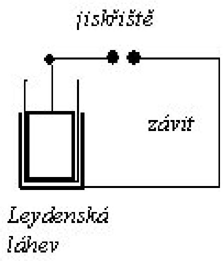
Můj přechytralý počítač s tím zřejmě nesouhlasí, protože mi místo „proti Popletovi“ záludně píše … nu, sami vidíte, co.

HISTORICKÉ POKUSY S ELEKTROMAGNETICKOU VLNOU A DNEŠNÍ TECHNICKÉ MOŽNOSTI

Josef Hubeňák[1], Jiří Hubeňák[2]

Poznatky z oblasti elektromagnetických jevů byly vzájemně propojeny v ucelenou teorii v 50. a 60. letech 19. století. Zásluhu na tom má především James Clerk Maxwell, skotský fyzik, nar. 13. 11. 1831, zemřel 5. 11. 1879. Byl profesorem na univerzitě v Aberdeenu, na King's College v Londýně a v Cambridgi a také členem Královské společnosti v Londýně. Jeho předpověď existence elektromagnetické vlny byla výsledkem ryze teoretickým s použitím obtížného matematického formalismu: Maxwell ve své původní práci, která vyšla v r. 1873, použil čtyřsložková čísla – kvaterniony. Jedním z podstatných výsledků jeho výpočtů byla číselná hodnota rychlosti šíření elektromagnetických vln ve vakuu, přičemž v jeho době nikdo experimentálně elektromagnetickou vlnu neobjevil. Hodnota souhlasila se známou rychlostí šíření světla a Maxwell byl tak prvním fyzikem, který si uvědomoval, že světlo je také elektromagnetické vlnění. Laboratorně prokázal existenci elektromagnetického vlnění až Heinrich Hertz v r. 1887. Prvními zdroji elektromagnetických vln byly obvody s jiskřištěm, leydenskou lahví a jedním závitem:



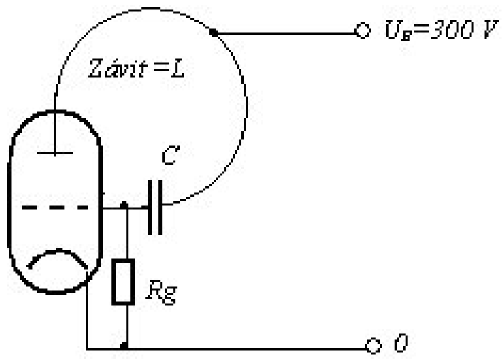


Po nabití kondenzátoru - leydenské láhve - dojde k přeskoku jiskry a v obvodu LC, který je tvořen leydenskou lahví a závitem, vzniknou

[1]josef.hubenak@uhk.cz
[2]hubenak@ttnet.cz

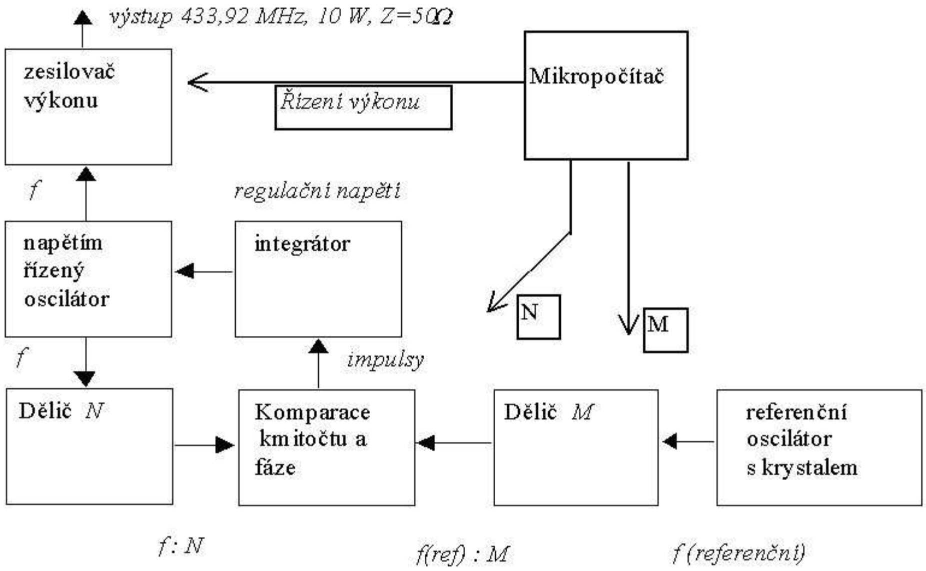
na okamžik tlumené kmity. Odsud se do okolí šíří elektromagnetické vlnění a obdobný obvod s jiskřištěm, stejným závitem a kondenzátorem se rozkmitá rezonančně tak, že lze pozorovat jiskru. Tyto experimenty pocházejí od anglického fyzika Lodge a podobné soupravy se ještě najdou v kabinetech fyziky. Ještě před objevem elektronky (přesněji triody) vyvinul Ernst Lecher metodu měření vlnové délky elektromagnetické vlny. Profesor Lecher (1856–1926) působil na německé technice v Praze a později ve Vídni a jeho měření vlnové délky je známé od r. 1889.

S elektronkami vznikly oscilátory netlumených elektromagnetických kmitů a ve sbírkách najdeme oscilátory z dvacátých a třicátých let minulého století. Zapojení s jednou triodou je velmi jednoduché:



Připojením zdroje napětí vzniknou v obvodu LC vysokofrekvenční kmity a trioda připojená k obvodu LC část energie kmitů odebere, zesílí a vrátí do obvodu. Demonstrační oscilátory s elektronkami pracují na frekvencích od 80 do 450 MHz a ještě se s nimi ojediněle můžeme setkat na školách. Mají v sobě kouzlo technické historie, ale jsou napájeny napětím, které již není bezpečné a jsou kmitočtově nestabilní. Bezpečný vysokofrekvenční generátor na frekvenci 433,920 MHz s výstupním výkonem 10 W osazený moderními polovodiči má napájecí napětí pouze 13,8 V a kmitočtovou stabilitu zaručuje obvod fázového závěsu, řízený mikropočítačem. Výkon lze přepnout na 50% a 100%, což je výhodné u některých experimentů. Blokové schéma generátoru:

Funkce systému spočívá na porovnávání kmitočtů, získaných na



výstupech dvou děličů frekvencí. Pokud se nerovnají, tj.

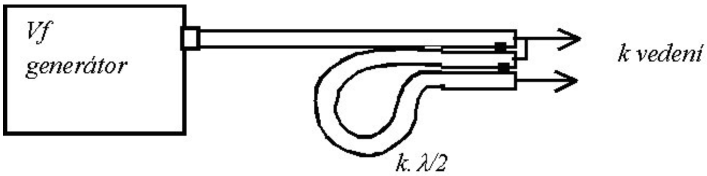
$$\frac{f}{N} \not\equiv \frac{f(ref)}{M} \ ,$$

jsou na výstupu komparátoru přítomny impulsy, ty se v integrátoru přemění na stejnosměrné napětí, které mění kmitočet oscilátoru, až dosáhne požadované hodnoty.

Lecherovo vedení tvoří dvě měděné trubičky o průměru 6 mm a jejich osy jsou vzdáleny 35 mm. Impedance vedení

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = 372 \cdot \frac{\ln \frac{d-r}{r}}{\pi} = 280\ \Omega$$

je vyšší než impedance na výstupu zdroje a navíc je třeba z nesymetrického signálu vytvořit signál symetrický. K tomu se dobře hodí půlvlnná smyčka z koaxiálního kabelu s impedancí 50 Ω.
Koaxiální kabel RG 58 má impedanci 50 Ω a činitel zkrácení $k = 0,66$, takže geometrická délka smyčky pro daný kmitočet je 22,8 cm. Funkce přizpůsobení je zřejmá: vlna od vstupu do smyčky se zpozdí na výstupu ze smyčky o $T/2$ a než se objeví na výstupu smyčky kladná výchylka napětí, přichází po koaxiálu od zdroje již výchylka záporná.



Obr. 1: Přizpůsobení generátoru a Lecherova vedení

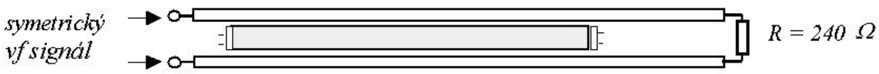
Napětí mezi výstupními vodiči je nyní dvojnásobné a stejný výkon bude přenášen při polovičním proudu; impedance na výstupu je čtyřnásobkem impedance koaxiálního kabelu. Přizpůsobení není zcela dokonalé, ale pro následující experimenty vyhovuje.

Popis experimentů

1. Postupná vlna na vedení

Na výstup generátoru připojíme koaxiální kabel se symetrizační smyčkou a připojíme Lecherovo vedení. Na konec vedení zapojíme zatěžovací odpor a do stojánků položíme zářivku bez rezonátoru. Zářivku umístíme blíže k symetrizační smyčce.

Výkon generátoru nastavíme na 100% a po zapnutí stejnosměrného zdroje zapálíme výboj v zářivce piezoelektrickým zapalovačem. Zářivka svítí takřka rovnoměrně po celé délce.



Připojený rezistor se zahřívá, což mohou studenti ověřit dotykem.

2. Stojatá vlna na vedení

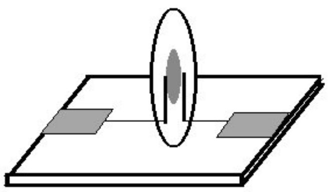
Do stojánků položíme zářivku bez rezonátoru a bez kovových konců. Odpojíme zatěžovací odpor a asi 10 cm od konce nasuneme zkratovací terč. Výkon generátoru nastavte na 50%. Zářivku přesuneme blíže ke zkratu a zapalovačem rozsvítíme. Ve výboji jsou patrná tmavá místa (dvě až tři), nejtmavší je přibližně 35 cm od zkratu.

Ve zkratové spojce vzniká přesouváním nábojů elektrické pole s opačně orientovanou intenzitou a zkratová spojka se stává zdrojem vysokofrekvenčního signálu s fází opačnou, než má vlna přicházející od generátoru. Vpravo od zkratu se obě vlny ruší, vlevo vzniká stojaté vlnění. Zářivka má nyní výrazná slabě svítící místa - zde jsou napěťové uzly. Posunutí zkratové spojky vede i k posuvu tmavých míst na zářivce. Vzdálenost zkratu a napěťového uzlu je právě polovina vlnové délky.

Dekorační zářivkou ukážeme, že před zkratem je intenzívní elektromagnetická vlna, za zkratem se nepodaří zářivku rozsvítit – zde se vlna od generátoru a vlna s opačnou fází od zkratové spojky vzájemně ruší.

3. Napěťové a proudové kmitny na zkratovaném vedení

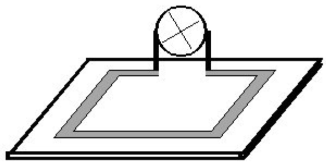
Pro sledování kmiten napětí použijeme kapacitní sondu s doutnavkou:



Je vyrobena z jednostranného tištěného spoje a přiložením na vedení se ponechané pásky mědi stanou jednou deskou kondenzátoru;

druhou je samotný vodič Lecherova vedení. Posouváním po vedení najdeme místa maximálního svitu.

Pro určení kmiten proudu je použita indukční sonda:



Čtvercový závit z tištěného spoje je v místě přerušení připojen na žárovku 24 V, 50 mA. Strana závitu má délku 25 mm. Sondu položíme na vedení a hledáme místo maximálního svitu žárovky.

Doporučený postup:

3.1. Vyladění vedení do rezonance

Výkon generátoru na 50%, indukční sondu umístíme těsně na začátek vedení a na druhém konci přesouváme zkrat. Nastavíme polohu pro maximální svit žárovky. Vedení má nyní aktivní délku rovnu násobku $\frac{\lambda}{2}$.

3.2. Proudové kmitny

Výkon generátoru na 100%. Indukční sondy umístíme do vzdáleností 1krát, 2krát a $3 \cdot \frac{\lambda}{2}$ od zkratu. *Najdeme polohy, kdy svit všech sond je přibližně stejný.* Ověříme vzdálenosti.

3.3. Napěťové kmitny

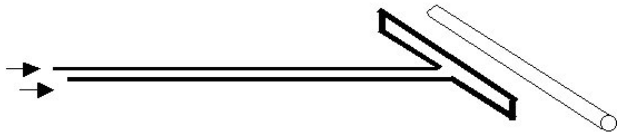
Výkon generátoru na 100%. Kapacitní sondy umístíme mezi zkrat a první žárovku a další mezi žárovky. Zapálíme výboj (pokud se doutnavky nerozsvítí samovolně parazitními elektrostatickými výboji) a přesouváním najdeme polohy maxim. Pozor, maxima neleží uprostřed mezi proudovými kmitnami. Vedení je zatíženo odběrem činného výkonu a fázový posuv mezi napětím a proudem není 90^o.

4. Měření vlnové délky

Pro měření vlnové délky použijeme jednu indukční sondu a výkon generátoru nastavíme na 50%. Připravíme si papírové značky pro označení bodů na vedení. Na vedení posouváme sondu od zkratu až ke vstupu a značkami zachytíme polohy, kdy žárovka zcela pohasne. Ze změřených vzdáleností mezi značkami vypočteme $\frac{\lambda}{2}$ a poté frekvenci. Porovnáme se skutečnou hodnotou $f = 433,92$ MHz.

5. Vedení zakončené skládaným dipólem

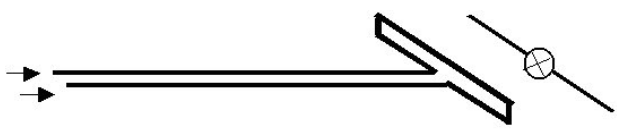
Vstupní impedance půlvlnného dipólu je asi 75 Ω a jeho připojením na konec vedení dojde k částečnému odrazu elektromagnetické vlny. Lépe je k vedení přizpůsoben skládaný dipól se vstupní impedancí asi 300 Ω, který větší část energie vyzáří do okolí. Indukční sonda na vedení ukáže jen nevýrazná maxima a minima proudu, takže na vedení je takřka postupná vlna. Elektromagnetické vlny v blízkosti dipólu prokážeme nejprve zářivkou, umístěnou rovnoběžně se zářičem. Po zapálení výboje piezoelektrickým zapalovačem svítí nejvíce u konce dipólu. V poloze kolmé k rovině zářiče svítí jen menší část uprostřed, což ukazuje na průběh siločar elektrického pole u dipólu.



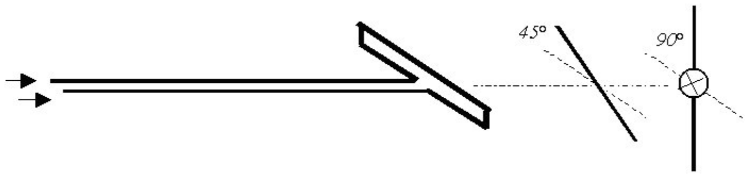
Použijte plný výkon generátoru.
Dekorační zářivku protáhněte mezi vodiči vedení – svítí všude prakticky stejně.

6. Polarizační rovina elektromagnetické vlny

Přijímací dipól má uprostřed maximální amplitudu proudu a žárovka 2 V, 180 mA se rozsvítí zřetelně ještě ve vzdálenosti více než 0,3 metru. Přijímací dipól otáčíme a prokážeme polarizaci elektromagnetického vlnění. V daném uspořádání je rovina polarizace vodorovná a přijímací dipól postavený svisle žárovku nerozsvítí. (Použijte výkon 100%.)

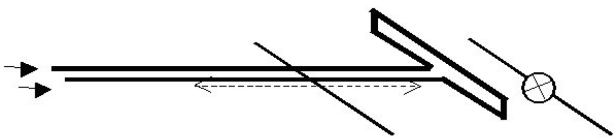


Pro další experiment upevněte přijímací dipól se žárovkou do stojanu asi 25 cm od skládaného dipólu. Stojan by měl být nejlépe nevodivý. Polarizační rovinu lze postupně otočit soustavou dalších pasivních dipólů. Průmět elektrické intenzity pole zářiče do směru dipólu otočeného o 45^o stačí na rozkmitání náboje v něm. Tento dipól pak vysílá dále a složka elektrické intenzity jeho pole rozkmitá dipól se žárovkou.



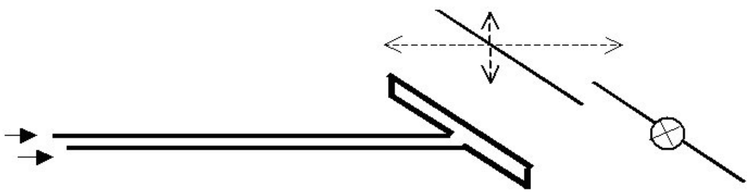
7. Odraz a interference elektromagnetické vlny

Použijte výkon 100%. Přijímací dipól se žárovkou nechte ve stojanu asi 25 cm od skládaného dipólu.



Odraz a interferenci ukážeme pomocí pasivního dipólu: pasivní dipól přesouváme nad vedením za zářičem dopředu a dozadu. Žárovka svítí maximálně, je-li pasivní dipól vzdálen o čtrtinu vlnové délky.

Maxima a minima svitu žárovky se objeví také, jestliže pasivní dipól přenášíme nad rovinou zářiče a dipólu se žárovkou.

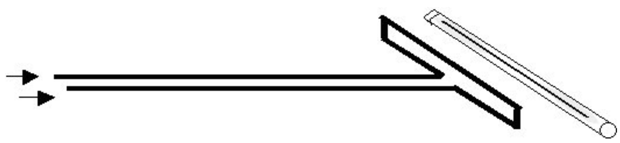


Pasivní dipól umístíme kamkoliv mezi skládaný dipól a dipól se žárovkou. Žárovka zhasne. Tento efekt již studenti mohou objasnit sami na základě předchozích poznatků.

Pasivní dipól umístíme až za dipól se žárovkou. Opět najdeme polohy, kdy žárovka svítí maximálně. Takto pracují např. televizní přijímací antény s reflektorem.

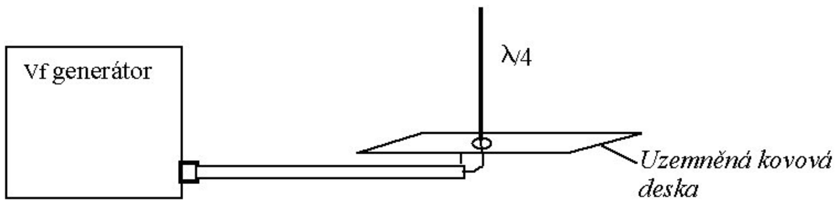
8. Vliv rezonance

Pole rezonujícího pasivního dipólu je dost intenzivní na to, aby udrželo výboj v zářivce. Na zářivku je připevněn rezonátor – půlvlnný dipól: Po ionizaci piezoelektrickým zapalovačem se zářivka rozsvítí jen u konců dipólu, zato svítí i několik decimetrů od zářiče.

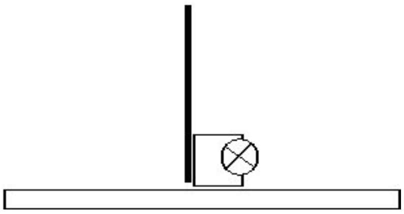


9. Pole čtvrtvlnného dipólu

Z nesymetrického výstupu vysokofrekvenčního generátoru lze velmi dobře napájet čtvrtvlnný dipól, jehož vstupní impedance je přibližně 50 Ω.



Teleskopickou anténu lze nastavit do rezonance pomocí indukční sondy se žárovkou: Sondu položíme k patě dipólu a délku dipólu nastavujeme na maximální svit.
Pro toto ladění použijte do sondy žárovku 6 V/ 50 mA. Sondu postavte mezi upevňovací šroubek a svorku.



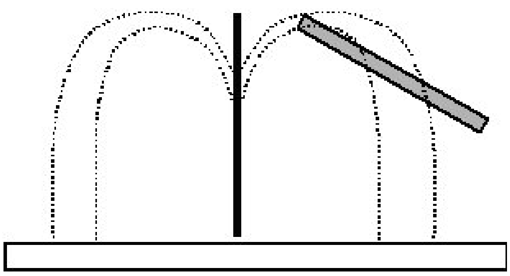
10. Proudové a napěťové obložení dipólu

Proud má maximální amplitudu u paty čtvrtvlnného dipólu. Indukční sondu se *žárovkou* 24 V / 50 mA posouváme podél dipólu – u paty svítí maximálně a směrem k vrcholu zhasíná.

Napětí je maximální při vrcholu – přiložíme sondu s doutnavkou izolantem k dipólu, ionizujeme a při vrcholu se doutnavka bezpečně rozsvítí. Pak posouváme k patě a její jas se zmenšuje, až zcela zhasne.

11. Elektrické siločáry v okolí čvrtvlnného dipólu

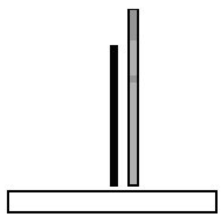
Zářivku bez rezonátoru rozsvítíme zapalovačem a sondujeme pole v okolí. Vytvoříme představu siločar, které vycházejí z vrcholu dipólu a končí na kovové desce. Zářivkou držíme vodorovně a přejíždíme dipól shora dolů a poté svisle a obkroužíme dipól kolem dokola. Upozorníme na rozsah svítící části zářivky.



Dekorační zářivku zapálíme dotekem jejích kovových kontaktů s vrcholem dipólu a pokus můžeme opakovat.

12. Vyšší harmonické kmity dipólu

Teleskopickou anténku natáhneme na maximální délku, což odpovídá přibližně $\frac{3}{4}\lambda$. Svisle postavenou zářivku bez rezonátoru rozsvítíme zapalovačem. V jedné třetině od vrcholu antény je zřetelný napěťový uzel. Geometrická délka je nyní asi 51 cm a jako čtvrtvlnný dipól by tato anténa rezonovala na kmitočtu $f_0 = \frac{433}{3}$ MHz. Signálem generátoru ji donutíme kmitat na trojnásobku základní frekvence. Akustickou analogií je uzavřená píšťala, kterou „přefoukneme“ na vyšší harmonický tón.



13. Absorpce vf výkonu v živé tkáni

Výkon generátoru nastavte na 100% a bříško prstu lehce přiložte na okraj vrcholu čtvrtvlnného dipólu. Za okamžik prst „pálí“. Kov antény je přitom chladný a teplo se vytváří uvnitř tkáně. Na stejném principu funguje mikrovlnná trouba, kde se používá výkon 800 a více wattů a frekvence 2450 MHz. V tkáni se teplo uvolňuje tak, že elektromagnetická vlna vytváří v částečně vodivém prostředí vysokofrekvenční proudy a také rozkmitá molekuly vody, které mají vlastnosti elektrických dipólů.

Poznámka: v poli čtrtvlnného dipólu lze předvést většinu experimentů, které byly popsány se skládaným dipólem.

* * *

Uvedené experimenty jsou dostatečně efektní, aby vzbudily zájem studentů, a jsou zcela bezpečné, takže i studenti si mohou se soupravou „pohrát“. Fyzikální obsah je dobře sdělitelný na úrovni středoškolské fyziky a je tedy žádoucí znovu tyto klasické experimenty, jejichž historie sahá k přelomu 19. a 20 století, zařadit do výuky.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Aleš Trojánek

Pro zájemce uvádíme přehled populárně vědeckých publikací z našich oborů, které vyšly česky nebo slovensky od roku 1995. Předložený seznam, který vznikl úpravou a doplněním seznamu ze sborníku [Sb], jistě není úplný, ale hlavní tituly z dané oblasti obsahuje. (Je do jisté míry překvapující, jak obsáhlý tento přehled je.) Z početné řady svazků edice Dějiny matematiky, které vydávají editoři J. Bečvář a E. Fuchs v nakladatelství Prometheus, je uveden jenom ten poslední [DM]. V něm je však možno nalézt informace o všech dosud vydaných svazcích. Dále bychom chtěli upozornit na jedinečnou učebnicí fyziky [HRW], která svým pojetím a zpracováním jistě může být zařazena do populárních publikací.

[Sb] Trojánek A., Novotný J., Hrubý D. (editoři): *Matematika, fyzika a jejich lidé. Sborník z X. semináře o filozofických otázkách matematiky a fyziky. Velké Meziříčí, 2000.* Prometheus, Velké Meziříčí 2002.

[DM] Hykšová M.: *Karel Rychlík (1885–1968).* Prometheus, Praha 2003.

[HRW] Halliday D., Resnick J., Walker J.: *Fyzika.* VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM a nakladatelství Prometheus, Praha 2001. Dotisk 2003.

[1] Al-Khalili J.: *Černé díry, červí díry a stroje času.* Aurora, Praha 2003.

[2] Balibarová F.: *Einstein – radost z myšlení.* Nakladatelství Slovart, Bratislava 1995.

[3] Barrow J. D.: *Teorie všeho.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1996.

[4] Barrow J. D.: *Původ vesmíru.* Archa, edice Mistři věd, Bratislava 1996.

[5] Barrow J. D.: *Vesmír plný umění.* Jota, Brno 2000.

[6] Barrow J. D.: *Pí na nebesích. O počítání, myšlení a bytí.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2000.

[7] Bečvář J.: *René Descartes.* Prometheus, Praha 1998.

[8] Bodanis D.: *$E = mc^2$. Životopis nejslavnější rovnice na světě.* Dokořán, Praha 2002.

[9] Brockman J., Matsonová K. (editoři): *Jak se věci mají. (Průvodce myšlenkami moderní vědy.)* Archa, edice Mistři věd, Bratislava 1996.

[10] Bührke T.: *Převratné objevy fyziky. Od Galileiho k Lise Meitnerové.* Academia, Praha 1999.

[11] Cipra B.: *Chibičky. A jak je najít dříve než učitel.* Dokořán, Praha 2002.

[12] Coveney P., Highfield R.: *Šíp času. (Cesta vědou za rozluštěním největší záhady lidstva.)* Oldag, Ostrava 1995.

[13] Davies P.: *Poslední tři minuty. (Úvahy o konečném osudu vesmíru.)* Archa, edice Mistři věd, Bratislava 1994.

[14] Davies P.: *Jsme sami? O důsledcích případného objevu mimozemského života.* Archa, edice Mistři věd, Bratislava 1996.

[15] Davis P.: *O čase. Einsteinova nedokončená revoluce.* Motýl, Bratislava 1999.

[16] Delvin K.: *Jazyk matematiky. (Jak zviditelnit neviditelné.)* Dokořán, Argo, Praha 2002.

[17] Einstein A., Infeld L.: *Fyzika jako dobrodružství poznání.* Aurora, Praha 2000.

[18] Fergusonová K.: *Stephen Hawking – hledání teorie všeho.* Aurora, Praha 1996.

[19] Feynman R. P.: *O povaze fyzikálních zákonů. Sedmkrát o rytmech přírodních jevů.* Aurora, Praha 1998.

[20] Feynman R. P.: *To snad nemyslíte vážně!* Aurora, Praha 1999.

[21] Feynman R. P.: *Snad ti nedělají starosti cizí názory?* Aurora, Praha 2000.

[22] Feynman R. P.: *O smyslu bytí.* Aurora, Praha 2000.

[23] Feynman R. P.: *Neobyčejná teorie světla a látky.* Aurora, Praha 2001.

[24] Feynman R. P.: *Radost z poznání.* Aurora, Praha 2003.

[25] Filkin D.: *Vesmír Stephena Hawkinga. Výklad kosmu.* (Předmluvu napsal S. Hawking.) Motýl, Bratislava 1998.

[26] Fölsing A.: *Albert Einstein.* Volvox Globator, Praha 2001.

[27] Fraser G., Lillestøl E., Sellevåg I.: *Hledání nekonečna, řešení záhad vesmíru.* (Úvod napsal S. Hawking.) Columbus, Praha 1996.

[28] Gamow G.: *Moje světočára. Neformální autobiografie.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2000.

[29] Gamow G., Stannard R.: *Pan Tompkins stále v říši divů.* Aurora, Praha 2001.

[30] Gleick J.: *Chaos. Vznik nové vědy.* Ando Publishing, Brno 1996.

[31] Gott III. J. R.: *Cestování časem v Einsteinově vesmíru. Fyzikální možnosti cestování časem.* Argo a Dokořán, Praha 2002.

[32] Greene B.: *Elegantní vesmír. (Superstruny, skryté rozměry a hledání finální teorie.)* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2001.

[33] Gribbin J.: *Pátrání po Schrödingerově kočce. Kvantová fyzika a skutečnost.* Columbus, Praha 1998.

[34] Gribbin J.: *Schrödingerova koťata. Pátrání po skutečnosti.* Columbus, Praha 2001.

[35] Gribbin J.: *Vesmír.* Euromedia Group k. s., Praha 2003.

[36] Gribbin J.: *Pátrání po velkém třesku. Život a smrt vesmíru.* Columbus, Praha 2002.

[37] Grygar J.: *Vesmír, jaký je. (Současná kosmologie (téměř) pro každého).* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1997.

[38] Grygar J.: *O vědě a víře.* Karmelitánské nakladatelství. Kostelní Vydří 2001.

[39] Hardy G. H.: *Obrana matematikova.* Prostor, Praha 1999.

[40] Hawking S.: *Černé díry a budoucnost vesmíru.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1995.

[41] Hawking S.: *Stručná historie času v obrazech.* Aktualizované a rozšířené vydání. Argo, Praha 2002.

[42] Hawking S.: *Vesmír v kostce.* Argo, Praha 2002.

[43] Hawking S.: *Ilustrovaná teorie všeho. Počátek a osud vesmíru.* Argo, Praha 2004.

[44] Heisenberg W.: *Část a celek. Rozhovory o atomové fyzice.* Votobia, Olomouc 1997.

[45] Heisenberg W.: *Fyzika a filosofie. Druhé, přehlédnuté vydání.* Aurora, Praha 2000.

[46] Heřt J., Pekárek L. (editoři): *Věda kontra iracionalita. Sborník přednášek českého klubu skeptiků – Sisyfos a AV ČR.* Academia, Praha 1998.

[47] Heřt J., Pekárek L. (editoři): *Věda kontra iracionalita 2.* Sborník přednášek Českého klubu skeptiků – Sisyfos a AV ČR. Český klub skeptiků a AV ČR, Praha 2002.

[48] Highfield R.: *Kouzelná věda a Harry Potter.* Dokořán, Praha 2003.

[49] Holton G.: *Věda a antivěda.* Academia, Praha 1999.

[50] Horský J.: *Albert Einstein.* Prometheus, Praha 1998.

[51] Chown M.: *Vesmír hned vedle. Dvanáct šokujících myšlenek z přední výspy vědy.* Granit, Praha 2003.

[52] Jáchym F.: *Tycho Brahe.* Prometheus, Praha 1998.

[53] Jex J.: *Max Planck.* Prometheus, Praha 2000.

[54] Kippenhahn R.: *Odhalená tajemství Slunce.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1999.

[55] Kleczek J.: *Vesmír a člověk.* Academia, Praha 1998.

[56] Kolektiv: *Myšlenky na zlomu tisíciletí. Thoughts for the New Millenium.* VUT v Brně – nakladatelství VUTIUM, Brno 2002.

[57] Kraus I.: *Wilhelm Conrad Röntgen.* Prometheus, Praha 1997.

[58] Kraus I.: *Dějiny evropských objevů a vynálezů. Od Homéra k Einsteinovi.* Academia, Praha 2001.

[59] Levinová J.: *Jak vesmír přišel ke svým skvrnám. Deník o konečném čase a prostoru.* Dokořán, Argo, Praha 2003.

[60] Mackintosh R., Al-Khalili J., Jonson B., Pena T.: *Jádro. Cesta do srdce hmoty.* Academia, Praha 2003.

[61] Malina J., Novotný J. (editoři): *Kurt Gödel.* Nadace Universitas Masarykiana v Brně, Nakladatelství Georgetown v Brně, Nakladatelství a vydavatelství NAUMA v Brně, 1996.

[62] Malíšek V: *Isaac Newton.* Prometheus, Praha 1999.

[63] Mandelbrot B.: *Fraktály. Tvar, náhoda a dimenze.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2003.

[64] Mayer D.: *Pohledy do minulosti elektrotechniky.* Kopp, České Budějovice 1999.

[65] McEvoy J. P., Zarate O.: *Stephen Hawking.* Portál, Praha 2002.

[66] Mornstein V.: *Utopený Archimedés. Malý alternativní výkladový slovník.* Nadace Universitas Masarykiana v Brně, Nakladatelství Georgetown v Brně, Nakladatelství a vydavatelství NAUMA v Brně, Masarykova univerzita, 1999.

[67] Nagel E., Newman J. R., Hofstadter D. R. (redakce a předmluva): *Gödelův důkaz.* VUT v Brně, nakladatelství VUTIUM, Brno 2003.

[68] Pascal B.: *Myšlenky.* Mladá fronta, edice Klasická knihovna, Praha 2000.

[69] Penrose R. (Shimony A., Cartwrighotová N., Hawking S., sestavil M. Longair): *Makrosvět, mikrosvět a lidská mysl.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1999.

[70] Polkinghorne J.: *Kvantový svět.* Aurora, Praha 2000.

[71] Polkinghorne J.: *Věda a teologie. Úvod do problematiky.* Centrum pro studium demokracie a kultury. Brno 2002.

[72] Prigogine I., Stengersová I.: *Řád z chaosu.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2001.

[73] Raab M.: *Materiály a člověk. (Netradiční úvod do současné materiálové vědy.)* Encyklopedický dům, spol. s r. o., Praha 1999.

[74] Rees M.: *Náš neobyčejný vesmír.* Dokořán, Praha 2002.

[75] Rektorys K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika.* Academia, Praha 2001.

[76] Sagan C.: *Kosmos.* Tok, Eminent, Praha 1996.

[77] Sagan C.: *Komety - tajemní poslové hvězd.* Eminent, Praha 1998.

[78] Schvartz J., McGuinness M.: *Einstein pro začátečníky.* Ando Publishing, Brno 1996.

[79] Singh S.: *Velká Fermatova věta.* Academia, Praha 2000 (Dotisk 2002).

[80] Singh S.: *Kniha kódů a šifer. Utajování od starého Egypta po kvantovou kryptografii.* Dokořán, Argo, Praha 2003.

[81] Smolka J.: *Galileo Galilei.* Prometheus, Praha 2000.

[82] Sodomka L., Sodomková M.: *Nobelovy ceny za fyziku.* SET OUT, Praha 1997.

[83] Stewart I.: *Čísla přírody. Neskutečná skutečnost matematické představivosti.* Archa, edice Mistři věd, Bratislava 1996.

[84] Štefl V.: *Mikuláš Koperník – tvůrce heliocentrické soustavy.* Prometheus, Praha 2002.

[85] Štoll I.: *Jan Marek Marci z Kronlandu.* Prometheus, Praha 1996.

[86] Štoll I.: *Svět očima fyziky.* Prometheus, Praha 1996.

[87] Thorne Kip S.: *Černé díry a zborcený čas.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 2004.

[88] Vopěnka P.: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci. Souborné vydání Rozprav s geometrií.* Práh, Praha 2000.

[89] Weinberg S.: *Snění o finální teorii.* Hynek, Praha 1996.

[90] Weinberg S.: *První tři minuty. Moderní pohled na počátek vesmíru.* Mladá fronta, edice Kolumbus, Praha 1998.

[91] Weinlich R.: *Laureáti Nobelovy ceny za fyziku.* Alda, Olomouc 1998.

[92] Zajac R., Pišút J., Šebesta J.: *Historické pramene súčasnej fyziky 2. Od objavu elektronu po prah kvantovej mechaniky.* Univerzita Komenského Bratislava, Bratislava 1997. (1. díl vyšel v nakladatelství Alfa v roce 1990, třetí díl se připravuje.)

Matematika, fyzika a vzdělávání

**Sborník
z XI. semináře o filozofických otázkách matematiky
a fyziky**

Editoři: A. Trojánek, J. Novotný, D. Hrubý
Vydala Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF ve spolupráci s Vysokým učením technickým v Brně, nakladatelstvím VUTIUM v roce 2004.

Publikace neprošla redakční ani jazykovou úpravou v redakci nakladatelství.

Sazba programem LaTeX: Renata Chytková
Návrh obálky: Ateliér Michlíček, Velké Meziříčí
Tisk: Astera G, vydavatelství a tiskárna, Jihlava

ISBN 80-214-2601-2 (VUTIUM)